

КУРСЪ

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО И ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЙ

И. А. СЕРРЕ

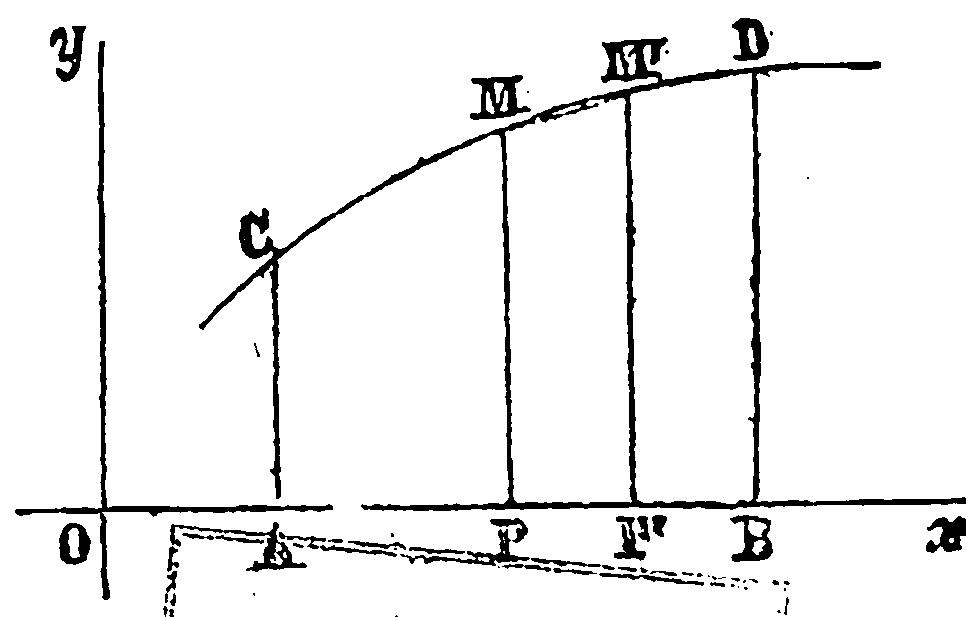
ЧЛЕНА ИНСТИТУТА И ГЕОДЕЗИЧЕСКАГО БЮРО

Переводъ со втораго французскаго изда

Д. КРЮКОВСКАГО

ТОМЪ II

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ



Установа адукацыі
"Віцебскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя П.М.Машэрска"
БІБЛІЯТЭКА

ИЗДАНИЕ ТОВАРИЩЕСТВА М. О. ВОЛЬФЪ

С.-ПЕТЕРБУРГЪ

МОСКВА

Гостиный дворъ, №№ 17 и 18

Петровка, д. Михалкова, № 5

1884

524039

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

ГЛАВА I.

ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦІАЛОВЪ.

Предметъ Интегральнаго исчисленія.

406. Въ Дифференціальномъ исчисленіи мы дали правила, посредствомъ которыхъ получаютъ дифференціалы разныхъ порядковъ функцій одной или нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ; мы также показали, что, комбинируя данныя уравненія, въ которыя входитъ нѣсколько переменныхъ, съ тѣми, которыя получаютъ отъ ихъ дифференцированія, можно исключить нѣкоторыя произвольныя количества и образовать то, что мы назвали *дифференціальными уравненіями* или *системами такихъ уравненій*.

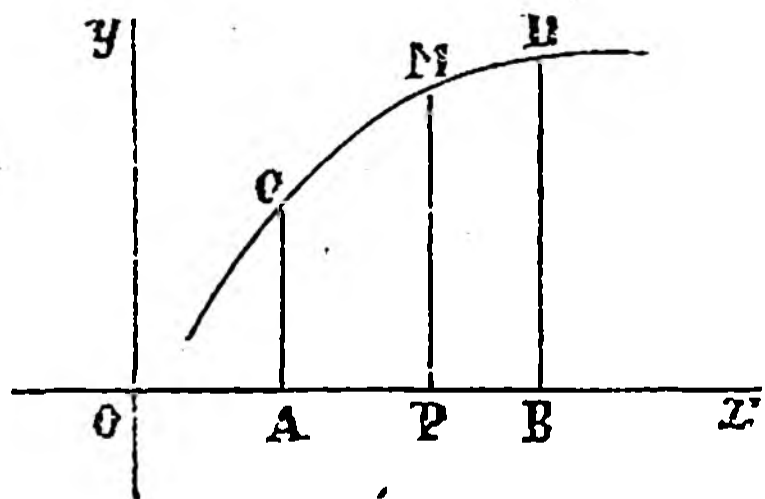
Интегральное исчисленіе имѣетъ въ виду обратныя задачи. Оно имѣетъ предметомъ: 1) опредѣленіе функцій по ихъ дифференціаламъ; 2) розысканіе соотношеній, связывающихъ между собой нѣсколько переменныхъ, удовлетворяющихъ даннымъ дифференціальнымъ уравненіямъ. Первая задача, очевидно, заключается во второй, она представляетъ самый простой случай; сюда относится громадное число

вопросовъ, которые и будутъ для насъ предметомъ серьезнаго изученія.

Мы должны здѣсь замѣтить, что нѣсколько разъ мы имѣли случай въ Дифференціальномъ исчисленіи разсуждать о вопросахъ, принадлежащихъ собственно къ Интегральному исчисленію. Эти вопросы, которые мы могли рѣшить помощью основныхъ свойствъ различныхъ функцій, составляютъ полезную подготовку къ теоріи, которую мы желаемъ изложить.

О неопредѣленныхъ и опредѣленныхъ интегралахъ.

407. Пусть будетъ $f(x)$ дѣйствительная функція независимой переменнѣй x , которую мы предположимъ непрерывной для дѣйствительныхъ значеній x , заключенныхъ между x_0 и X . Мы видѣли (§ 187), что всегда существуетъ функція, имѣющая дифференціаломъ $f(x)dx$; дѣйствительно, если проведемъ двѣ прямоугольныя оси Ox и Oy , потомъ построимъ кривую $СМН$, ординатѣ которой y равна $f(x)$, и если проведемъ двѣ ординаты $СА$, $МР$, отвѣчающія двумъ абсциссамъ, заключающимся между x_0 и X , то, такъ какъ



одна изъ этихъ абсциссъ будетъ постоянная, а другая x будетъ рассматриваться какъ переменная, площадь $АСМР$ будетъ функція отъ x , имѣющая производной $f(x)$ и дифференціаломъ $f(x)dx$.

Сверхъ того, чтобы двѣ функціи имѣли одинъ и тотъ же дифференціалъ, нужно и достаточно, чтобы разность этихъ функцій была постоянная; поэтому существуетъ неопредѣленно большое число функцій, имѣющихъ дифференціаломъ $f(x)dx$, и эти функціи различаются другъ отъ друга только на постоянную. Нашъ чертежъ показываетъ намъ существованіе всѣхъ этихъ функцій, такъ какъ постоянная

ордината CA , отъ которой отсчитывается площадь $ACMP$, была выбрана произвольно; если вмѣсто этой ординаты возьмемъ другую $C'A'$, то получимъ новую площадь $A'C'MP$, которая будетъ имѣть дифференціаломъ опять $f(x)dx$.

Функция, которой дифференціалъ есть $f(x)dx$, содержитъ такимъ образомъ произвольную постоянную; она называется *неопределеннымъ интеграломъ* или просто *интеграломъ дифференціала* $f(x)dx$ и обозначается черезъ

$$\int f(x) dx.$$

На основаніи этого, если $F(x)$ означаетъ одно изъ значеній этого интеграла, т. е. одну изъ функций, имѣющихъ дифференціаломъ $f(x)dx$, то будемъ имѣть

$$(1) \quad \int f(x) dx = F(x) + C,$$

гдѣ C произвольная постоянная.

408. Задача, имѣющая цѣлью интегрированіе даннаго дифференціала, сдѣлается опредѣленной, если прибавимъ то условіе, что для даннаго значенія x_0 переменнѣй x интеграль обращается въ нуль. Дѣйствительно, постоянная C предыдущей формулы должна быть такая, чтобы

$$F(x_0) + C = 0,$$

и мы получимъ

$$(2) \quad \int f(x) dx = F(x) - F(x_0);$$

это же будетъ выраженіе площади $ACMP$, рассмотрѣнной выше, если предположимъ, что постоянная ордината CA отвѣчаетъ абсциссѣ x_0 .

Если дадимъ x опредѣленное значеніе X , то интеграль (2) получитъ опредѣленное значеніе, равное

$$F(X) - F(x_0);$$

его обозначаютъ черезъ

$$\int_{x_0}^X f(x) dx,$$

и онъ называется *опредѣленнымъ интеграломъ дифференциала* $f(x)dx$, взятымъ отъ $x=x_0$ до $x=X$; такимъ образомъ имѣемъ

$$(3) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = F(X) - F(x_0).$$

Этотъ интегралъ имѣетъ значеніемъ площадь ACDB, заключенную между кривой, которой $f(x)$ есть ордината, осью x и ординатами CA, DB, отвѣчающими абсциссамъ x_0 и X . Мы видѣли (§§ 10 и 188), что если раздѣлить промежутокъ $X-x_0$ на n равныхъ или неравныхъ частей, обозначаемыхъ вообще черезъ Δx , потомъ построить вписанные и описанные прямоугольники, имѣющіе основаніями эти различныя части и высотами соотвѣтствующія ординаты кривой CD, то сумма этихъ прямоугольниковъ $f(x) \Delta x$ будетъ стремиться къ предѣлу, равному площади ACDB, когда Δx стремится къ нулю и когда ихъ число возрастаетъ безпредѣльно. Отсюда слѣдуетъ, что

$$(4) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=x_0}^{x=X} f(x) \Delta x,$$

а это выражаетъ слѣдующее предложеніе:

Опредѣленный интегралъ дифференциала $f(x)dx$, взятый отъ $x=x_0$ до $x=X$, есть предѣлъ, къ которому стремится сумма значеній, принимаемыхъ дифференциаломъ $f(x)dx$ или $f(x)\Delta x$, когда x , измѣняясь отъ x_0 до X , принимаетъ послѣдовательныя безконечно-малыя приращенія.

На основаніи этого-то свойства интегралы обозначаютъ знакомъ \int , который есть начальная буква слова *сумма* (сумма).

Только-что приведенное нами разсужденіе не предполагаетъ, что функція $f(x)$ сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ, когда x измѣняется отъ x_0 до X , или что высшій предѣлъ X больше низшаго предѣла x_0 ; если $X < x_0$, то приращенія Δx отрицательны и каждое произведеніе $f(x) \Delta x$ во всѣхъ случаяхъ положительное или отрицательное, смотря по тому

мѣютъ ли его множители одинъ и тотъ же знакъ или они противныхъ знаковъ.

409. Обозначеніе, употребленное нами для представленія опредѣленныхъ интеграловъ, можетъ быть съ выгодой употреблено въ случаѣ неопредѣленныхъ интеграловъ. Возьмемъ снова формулу (3) и станемъ разсматривать высшій предѣлъ X интеграла, какъ переменную; въ этомъ случаѣ вмѣсто X можно написать x , и мы получимъ

$$(5) \quad \int_{x_0}^x f(x) dx = F(x) - F(x_0);$$

это выраженіе представляетъ одно изъ значеній неопредѣленного интеграла дифференціала $f(x)dx$, именно то изъ этихъ значеній, которое уничтожается для $x = x_0$; поэтому имѣемъ

$$(6) \quad \int f(x) dx = \int_{x_0}^x f(x) dx + C,$$

гдѣ C произвольная постоянная.

Предѣлъ x_0 можетъ быть выбранъ произвольно, исключая однако частныхъ значеній, для которыхъ $F(x_0)$ есть, безконечность; если этотъ предѣлъ разсматриваемъ какъ произвольную постоянную, то $F(x_0)$ само собой будетъ произвольная постоянная, и мы, на основаніи формулы (5), можемъ просто написать

$$\int f(x) dx = \int_{x_0}^x f(x) dx;$$

но лучше вообще сохранить за собой право выбора предѣла, отъ котораго начинается интегралъ, и оставить во второй части формулы произвольную постоянную.

О способахъ интегрированія.

410. Какая ни была-бы явная или неявная функція $f(x)$ дѣйствительной переменной x , лишь-бы она была непрерывна въ извѣстномъ промежуткѣ, постоянно существуетъ, какъ мы до-

казали, вполне определенная функция, имѣющая дифференціаломъ $f(x)dx$ и обращающаяся въ нуль для какого-нибудь даннаго значенія x_0 переменнѣй x . Мы согласились обозначать эту функцию черезъ

$$\int_{x_0}^x f(x) dx;$$

поэтому естественно теперь постараться выразить ее, когда это возможно, посредствомъ извѣстныхъ аналитическихъ элементовъ, т. е. посредствомъ *алгебраическихъ, логарифмическихъ показательныхъ и круговыхъ* функций. Розысканіе этого и есть то, что мы называемъ *интегрированиемъ* дифференціала $f(x)dx$; оно составитъ предметъ изученій, которыя мы намѣреваемся здѣсь представить и которыя необходимо ограничиваются небольшимъ числомъ случаевъ.

411. СЛУЧАЙ ИНТЕГРАЛА, ВЫРАЖАЮЩАГОСЯ ПРОСТОЙ ФУНКЦІЕЙ. — Мы должны прежде всего повторить результаты, къ которымъ насъ привело дифференцирование простыхъ функций, потому что эти результаты дадутъ интегралы, выражающіеся такой же функцией. Имѣемъ

$$d \frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n dx, \quad d \sin x = \cos x dx, \quad d \cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$d \frac{e^{mx}}{m} = e^{mx} dx, \quad d \cos x = -\sin x dx, \quad d \sec x = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x},$$

$$d \log x = \frac{dx}{x}, \quad d \tan x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x dx}{\sin^2 x},$$

$$d \arcsin x = \frac{+ dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \operatorname{arccot} x = -\frac{dx}{1+x^2},$$

$$d \arccos x = \frac{- dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \operatorname{arcsec} x = \frac{+ dx}{x \sqrt{x^2-1}},$$

$$d \arctan x = \frac{dx}{1+x^2}, \quad d \operatorname{arccosec} x = \frac{- dx}{x \sqrt{x^2-1}};$$

означивъ черезъ C произвольную постоянную, непосредственно вычисляемъ

$$\begin{aligned}
\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, & \int \cos x dx &= \sin x + C, & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\cot x + C, \\
\int e^{mx} dx &= \frac{e^{mx}}{m} + C, & \int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} &= \sec x + C, \\
\int \frac{dx}{x} &= \log x + C, & \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x + C, & \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} &= -\operatorname{cosec} x + C \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C = -\arccos x + C, \\
\int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C, \\
\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &= \operatorname{arcsec} x + C = -\operatorname{arccosec} x + C.
\end{aligned}$$

Означивъ черезъ x_0 какое-нибудь значеніе x , мы также можемъ написать

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^x x^n dx &= \frac{x_0^{n+1} - x^{n+1}}{n+1}, \\
\int_{x_0}^x e^{mx} dx &= \frac{e^{mx} - e^{mx_0}}{m}, \\
\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} &= \log x - \log x_0 = \log \frac{x}{x_0}.
\end{aligned}$$

Третья формула этой группы заключается въ первой и она получится изъ этой, если заставимъ $n+1$ стремиться къ нулю; действительно, по правилу § 124, имѣемъ

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \log x - \log x_0 = \lim_{n \rightarrow -1} \frac{x^{n+1} - x_0^{n+1}}{n+1} \text{ для } n+1=0.$$

Если въ предыдущей формулѣ положимъ $x_0=1$, то получимъ

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x;$$

также, взявъ $x_0=0$, найдемъ

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x, \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Функция $\log x$ и обратныя круговыя функции, такія какъ $\arctan x$, $\arcsin x$ поэтому суть интегралы алгебраическихъ

дифференциаловъ, какъ это мы уже замѣтили (§ 44), и если Алгебра и Тригонометрія не составляли прежде теоріи, то онѣ представляются съ самаго начала Интегральнаго исчисленія какъ новые необходимые аналитическіе элементы. Этого замѣчанія достаточно, чтобы видѣть изъ настоящаго, что интегрирование должно дать безконечное число новыхъ функцій, не приводимыхъ къ извѣстнымъ уже типамъ, а это открываетъ въ анализѣ безпредѣльное поле розысканій.

412. СЛУЧАЙ ДИФФЕРЕНЦІАЛА РАВНАГО ПРОИЗВЕДЕНІЮ ДАННАГО ДИФФЕРЕНЦІАЛА НА ПОСТОЯННУЮ. — Пусть будетъ дифференціалъ $au\,dx$, въ которомъ a есть постоянная и u функція отъ x ; очевидно, имѣемъ

$$\int au\,dx = a \int u\,dx,$$

потому что обѣ части этого равенства имѣютъ одинъ и тотъ же дифференціалъ и каждая изъ этихъ частей, сверхъ того, содержитъ произвольную постоянную.

Если желаемъ взять интегралъ $au\,dx$ такъ, чтобы онъ уничтожался для $x = x_0$, то напомнимъ

$$\int_{x_0}^x au\,dx = a \int_{x_0}^x u\,dx,$$

очевидное равенство, потому что обѣ части имѣютъ одинъ и тотъ же дифференціалъ и обѣ онѣ уничтожаются для $x = x_0$.

413. СЛУЧАЙ, КОГДА ДАННЫЙ ДИФФЕРЕНЦІАЛЪ ЕСТЬ СУММА НѢСКОЛЬКИХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛОВЪ. — Пусть u, v, w, \dots, s данныя функціи отъ x ; если положимъ

$$y = u + v + w + \dots + s,$$

то очевидно, что неопредѣленный интегралъ дифференціала $y\,dx$ будетъ имѣть значеніе

$$\int y\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx + \int w\,dx + \dots + \int s\,dx$$

потому, что обѣ части этого равенства имѣютъ одинъ и тотъ же дифференціалъ и слѣдовательно могутъ разниться только на постоянную; каждый интегралъ кромѣ того имѣетъ при себѣ произвольную постоянную.

Если желаемъ взять интегралъ дифференціала $y dx$ такъ, чтобы онъ уничтожался для $x = x_0$, то будемъ имѣть

$$\int_{x_0}^x y dx = \int_{x_0}^x u dx + \int_{x_0}^x v dx + \int_{x_0}^x w dx + \dots + \int_{x_0}^x s dx,$$

потому что обѣ части этой формулы уничтожаются для $x = x_0$.

Если u и v двѣ дѣйствительныя функціи дѣйствительной переменнѣй x , то, сдѣлавъ

$$y = u + v \sqrt{-1},$$

будемъ имѣть (§ 359)

$$\int y dx = \int u dx + \sqrt{-1} \int v dx,$$

или

$$\int_{x_0}^x y dx = \int_{x_0}^x u dx + \sqrt{-1} \int_{x_0}^x v dx.$$

414. **ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМЪ.** — Способъ, называемый *интегрированіемъ по частямъ*, часто употребляется въ Анализѣ, гдѣ онъ представляетъ громадную помощь; вотъ въ чемъ онъ состоитъ. Пусть u и v двѣ какія-нибудь функціи одной переменнѣй x , имѣемъ

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx};$$

умноживъ обѣ части на dx и взявъ потомъ неопредѣленный интегралъ обѣихъ частей, получимъ

$$uv = \int \left(u \frac{dv}{dx} \right) dx + \int \left(v \frac{du}{dx} \right) dx,$$

или

$$(1) \quad \int \left(u \frac{dv}{dx} \right) dx = uv - \int \left(v \frac{du}{dx} \right) dx;$$

мы не прибавляемъ постоянной, потому что каждый интегралъ имѣетъ при себѣ произвольную постоянную.

Предъидущая формула выражаетъ, какъ это мы сейчасъ покажемъ, правило интегрированія по частямъ. Пусть $y dx$ данный дифференціалъ; между безконечнымъ числомъ способовъ разложенія $y dx$ на два множителя, выберемъ такой, чтобы одинъ изъ множителей былъ дифференціалъ нѣкоторой функции v , а другой обозначимъ черезъ u , тогда будемъ имѣть

$$y dx = u \frac{dv}{dx} dx,$$

на основаніи же формулы (1) интегралъ дифференціала $y dx$ можетъ быть разложенъ на двѣ части, именно: на *проинтегрированную часть* uv и на *непроинтегрированную часть* $-\int \left(v \frac{du}{dx} \right) dx$. Поэтому нахождение интеграла дифференціала $y dx$ или $u \frac{dv}{dx} dx$ приводится къ интегрированію дифференціала $v \frac{du}{dx} dx$. Если новый дифференціалъ проще даннаго, то интегрированіе по частямъ мы употребили съ выгодой.

Если желаемъ взять интегралы формулы (1) такъ, чтобы они уничтожались для $x = x_0$, то необходимо принять въ расчетъ произвольную постоянную, сопровождающую интегралъ одной изъ частей, напримѣръ хотъ интегралъ второй части. Эта постоянная, очевидно, равна значенію противнаго знака, которое принимаетъ проинтегрированная часть uv для $x = x_0$; поэтому, если обозначимъ черезъ u_0 и v_0 значенія u и v , отвѣчающія $x = x_0$, то будемъ имѣть

$$\int_{x_0}^x \left(u \frac{dv}{dx} \right) dx = (uv - u_0 v_0) - \int_{x_0}^x \left(v \frac{du}{dx} \right) dx;$$

иногда также пишутъ

$$\int_{x_0}^x \left(u \frac{dv}{dx} \right) dx = [uv]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x \left(v \frac{du}{dx} \right) dx,$$

гдѣ символъ $[uv]_{x_0}^x$ выражаетъ разность $uv - u_0v_0$ или интегралъ $\int_{x_0}^x \frac{d(uv)}{dx} dx$.

415. П р и м ѣ р ы. — Впослѣдствіи мы будемъ имѣть случай сдѣлать множество приложеній только-что показаннаго нами дѣйствія; однако дадимъ и здѣсь нѣсколько примѣровъ.

1) Разсмотримъ сперва интегралъ

$$\int \log x \, dx$$

и возьмемъ

$$u = \log x, \, v = x, \text{ откуда } \frac{dv}{dx} dx = dx,$$

будемъ имѣть

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int x \frac{dx}{x};$$

интегралъ второй части приводится къ $\int dx$, т. е. къ $x + \text{постоянная}$; поэтому имѣемъ

$$\int \log x \, dx = x \log x - x + C,$$

гдѣ C произвольная постоянная. Въ этомъ примѣрѣ интегрированіе по частямъ позволяетъ найти значеніе даннаго интеграла.

2) Разсмотримъ интегралъ

$$\int x^m e^{-x} \, dx,$$

разложимъ дифференціалъ на два множителя

$$x^m e^{-x} \, dx;$$

изъ которыхъ второй есть дифференціалъ $-e^{-x}$; функціи, которыя мы обозначали чрезъ u и v здѣсь суть x^m и $-e^{-x}$; поэтому имѣемъ

$$\int x^m e^{-x} \, dx = -x^m e^{-x} + m \int x^{m-1} e^{-x} \, dx.$$

Данный интегралъ приводится къ другому такого же вида, но отличающемуся отъ перваго только тѣмъ, что показатель m переменнѣй x замѣненъ черезъ $m - 1$. Если число m положительное, то новый интегралъ проще перваго; противное имѣетъ мѣсто тогда, когда m отрицательное, и въ этомъ послѣднемъ случаѣ интегралъ второй части нужно рассматривать какъ приводящійся къ интегралу первой части; если напишемъ $-m + 1$ вмѣсто m , то предыдущая формула дастъ

$$\int x^{-m} e^{-x} dx = \frac{x^{1-m} e^{-x}}{1-m} + \frac{1}{1-m} \int x^{1-m} e^{-x} dx.$$

Предположимъ, что m цѣлое положительное число, и положимъ для краткости

$$u_m = \int_0^x x^m e^{-x} dx, \quad \alpha_m = -x^m e^{-x},$$

то по формулѣ, найденной выше, замѣтивъ, что α_m уничтожается для $x = 0$, будемъ имѣть

$$u_m = \alpha_m + m u_{m-1};$$

если же m дадимъ значенія $1, 2, 3, \dots, m$, то получимъ

$$u_1 = \alpha_1 + u_0,$$

$$u_2 = \alpha_2 + 2u_1,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$u_m = \alpha_m + m u_{m-1};$$

если сложимъ эти уравненія, умноживъ ихъ сперва соотвѣтственно на множители

$$1, \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots, \frac{1}{1 \cdot 2 \dots m},$$

то получимъ

$$\frac{u_m}{1 \cdot 2 \dots m} = u_0 + \frac{\alpha_1}{1} + \frac{\alpha_2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\alpha_m}{1 \cdot 2 \dots m};$$

но

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + \text{const.},$$

откуда

$$u_0 = \int_0^x e^{-x} dx = 1 - e^{-x};$$

поэтому будемъ имѣть

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \int_0^x x^m e^{-x} dx \\ &= 1 - e^{-x} \left[1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{x^m}{1 \cdot 2 \cdot m} \right]. \end{aligned}$$

416. **ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЧЕРЕЗЪ ВНЕСЕНИЕ.** — Способъ интегрированія, который намъ нужно показать, состоитъ въ перемѣнѣ независимой перемѣнной; этотъ способъ и способъ интегрированія по частямъ составляютъ главные средства той части Интегральнаго исчисленія, которой мы занимаемся.

Пусть будетъ $f(x)dx$ данный дифференціалъ; если возьмемъ новую независимую перемѣнную t , связанную съ x уравненіемъ

$$(1) \quad x = \varphi(t),$$

то будемъ имѣть

$$dx = \varphi'(t) dt,$$

и, слѣдовательно,

$$f(x) dx = f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \psi(t) dt;$$

отсюда заключаемъ, что

$$(2) \quad \int f(x) dx = \int \psi(t) dt.$$

Если умѣемъ найти интегралъ дифференціала $\psi(t)dt$ и если имѣемъ

$$\int \psi(t) dt = \Psi(t) + \text{const.},$$

то также будемъ имѣть

$$\int f(x) dx = \Psi(t) + \text{const.},$$

замѣнивъ теперь t его значеніемъ въ функціи x , получимъ

$$\int f(x) dx = F(x) + \text{const.},$$

гдѣ $F(x)$ есть известная функція.

Употребленіе метода внесенія можетъ быть очень полезно даже и тогда, когда онъ не имѣетъ слѣдствіемъ интегрированіе даннаго дифференціала; онъ позволяетъ въ самомъ дѣлѣ, въ большей части случаевъ, замѣнить интегралъ $\int f(x) dx$ этого дифференціала другимъ болѣе простымъ $\int \psi(t) dt$.

Положимъ, что мы желаемъ взять интегралъ дифференціала $f(x) dx$ такъ, чтобы онъ уничтожался для $x = x_0$; въ этомъ случаѣ интегралъ дифференціала равнаго $\psi(t) dt$ долженъ быть также взятъ такъ, чтобы онъ уничтожался для того же значенія x . Слѣдовательно, если t_0 есть значеніе, которое нужно дать t , чтобы x обратился въ x_0 , будемъ имѣть

$$\int_{x_0}^x f(x) dx = \int_{t_0}^t \psi(t) dt.$$

417. П р и м ѣ р ы. — 1) Разсмотримъ сначала интегралъ $\int (ax + b)^m dx$. Положивъ

$$ax = b - t, \quad x = \frac{t - b}{a}, \quad dx = \frac{dt}{a},$$

получимъ

$$\int (ax + b)^m dx = \frac{1}{a} \int t^m dt = \frac{t^{m+1}}{(m+1)} + \text{const.}$$

или

$$\int (ax + b)^m dx = \frac{(ax + b)^{m+1}}{(m+1)} + \text{const.}$$

2) Пусть будетъ теперь интегралъ $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$, гдѣ p и q такія данныя количества, что $p^2 - 4q < 0$. Если положимъ

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} t, \quad dx = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} dt,$$

то получимъ

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \int \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

но

$$\int \frac{dt}{t^2 + 1} = \text{arc tang } t + \text{const.};$$

поэтому

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \text{arc tang } \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + \text{const.}$$

Интегрирование рациональных дифференціаловъ.

418. Сейчасъ мы будемъ заниматься изученіемъ алгебраическихъ дифференціаловъ, но это изученіе должно быть ограничено здѣсь самыми простыми случаями; мы рассмотримъ сперва рациональные дифференціалы.

Всякая рациональная функція $\frac{F(x)}{f(x)}$ переменнѣй x разлагается (§ 392) на цѣлую часть, которая можетъ быть нуль и на разныя простыя функціи, имѣющія числителями постоянныя количества, и знаменателями степени линейныхъ биномовъ, на которыя дѣлится знаменатель $f(x)$. Такимъ образомъ, положивъ

$$f(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta \dots (x - l)^\lambda,$$

получимъ

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m \\ &+ \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\ &+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}, \end{aligned} \right.$$

гдѣ $A, A_1, \dots, B, \dots, L, \dots, a_0, a_1, \dots$, постоянные коэффициенты. Но

$$\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + \text{const.};$$

также, когда μ не есть 1, имѣемъ

$$\int \frac{dx}{(x-g)^\mu} = -\frac{1}{(\mu-1)(x-g)^{\mu-1}} + \text{const.},$$

и въ случаѣ $\mu = 1$,

$$\int \frac{dx}{x-g} = \log(x-g) + \text{const.};$$

если поэтому возьмемъ интегралъ обѣихъ частей формулы (1), предварительно умноживъ ихъ на dx , то получимъ

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \int \frac{F(x)}{f(x)} dx &= \frac{a_0}{m+1} x^{m+1} + \frac{a_1}{m} x^m + \dots + \frac{a_{m-1}}{2} x^2 + a_m x + \text{const.} \\ &- \frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} - \dots - \frac{A_{\alpha-2}}{x-a} + A_{\alpha-1} \log(x-a) \\ &- \frac{B}{(\beta-1)(x-b)^{\beta-1}} - \dots - \frac{B_{\beta-2}}{x-b} + B_{\beta-1} \log(x-b) \\ &\dots \dots \dots \\ &- \frac{L}{(\lambda-1)(x-l)^{\lambda-1}} - \dots - \frac{L_{\lambda-2}}{x-l} + L_{\lambda-1} \log(x-l); \end{aligned} \right.$$

изъ этой формулы вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

ТЕОРЕМА. — *Интегралъ рациональнаго дифференціала постоянно выражается алгебраическими и логарифмическими функциями.*

Условія, при которыхъ интегралъ рациональнаго дифференціала есть алгебраическій.

419. Для того чтобы интегралъ рациональнаго дифференціала $\frac{F(x)}{f(x)} dx$ былъ алгебраическій, нужно и достаточно, чтобы въ разложеніи $\frac{F(x)}{f(x)}$ на простыя функціи не было ни одного члена, котораго знаменатель былъ бы первой степени. Эти условія, при которыхъ это будетъ такъ, если сохранимъ обозначенія предъидущаго параграфа, суть

$$A_{\alpha-1} = 0, \quad B_{\beta-1} = 0, \quad C_{\gamma-1} = 0, \dots$$

Это требует сперва, чтобы полиномъ $f(x)$ не содержалъ ни одного простаго линейнаго множителя. Мы видѣли въ § 398, что, положивъ

$$\varphi(x) = (x-a)^\alpha \frac{F(x)}{f(x)}, \quad \psi(x) = (x-b)^\beta \frac{F(x)}{f(x)}, \dots$$

будемъ имѣть

$$A_{\alpha-1} = \frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{1.2 \dots (\alpha-1)}, \quad B_{\beta-1} = \frac{\psi^{\beta-1}(b)}{1.2 \dots (\beta-1)}, \dots;$$

условія, при которыхъ $\int \frac{F(x)}{f(x)} dx$ будетъ алгебраическій, поэтому

$$\varphi^{\alpha-1}(a) = 0, \quad \psi^{\beta-1}(b) = 0, \dots,$$

какія ни были бы количества a, b, \dots, c , дѣйствительныя или мнимыя.

Условій этихъ столько, сколько корней a, b, \dots, l ; но если степень $F(x)$ меньше степени $f(x)$, по крайней мѣрѣ двумя единицами, то одно изъ условій будетъ содержаться въ другихъ. Дѣйствительно, обозначимъ черезъ m степень $f(x)$ и предположимъ, что $F(x)$ самое большее степени $m-2$; цѣлая часть $E(x)$ дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$ будетъ нуль, если-же всѣ простыя дроби приведемъ къ одному знаменателю, чтобы ихъ потомъ сложить и снова разложить дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$, то нетрудно видѣть, что числитель дроби, такимъ образомъ полученный, будетъ содержать x^{m-1} съ коэффициентомъ

$$A_{\alpha-1} + B_{\beta-1} + \dots + L_{\lambda-1}.$$

Этотъ коэффициентъ долженъ быть нуль, потому что $F(x)$ самое большее степени $m-2$; поэтому имѣемъ

$$\frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{1.2 \dots (\alpha-1)} + \frac{\psi^{\beta-1}(b)}{1.2 \dots (\beta-1)} + \dots + \frac{\omega^{\lambda-1}(l)}{1.2 \dots (\lambda-1)} = 0;$$

слѣдовательно, одно изъ условій, при которыхъ $\int \frac{F(x)}{f(x)} dx$ есть алгебраическій, содержитсяъ въ другихъ.

Предъидущее уравненіе содержитъ въ себѣ, какъ частный случай, формулу, полученную нами въ § 394.

Другой видъ интеграла раціональныхъ дифференціаловъ.

420. То что мы сказали въ § 418, прилагается къ какому угодно раціональному дифференціалу $\frac{F(x)}{f(x)}dx$. Если между корнями уравненія $f(x) = 0$ есть мнимые, то интеграль будетъ содержать мнимые логариѣмы; но ихъ можно будетъ замѣнить дѣйствительными дугами круга, воспользоавшись для этого формулами, полученными въ § 371; такимъ образомъ мы получимъ результатъ, освобожденный отъ мнимыхъ величинъ, если только коэффиціенты полиномовъ $F(x)$ и $f(x)$ дѣйствительны. Если предположимъ этотъ послѣдній случай, то раціональная функція $\frac{F(x)}{f(x)}$ способна, какъ мы видѣли (§ 401), только къ одному способу разложенія, въ который входятъ только дѣйствительныя количества, и не трудно произвести ея интегрированіе, сдѣлавъ это новое разложеніе.

Здѣсь выраженіе $\frac{F(x)}{f(x)}$ можетъ содержать члены такого же вида, какъ и въ § 418, и новые члены вида $\frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n}$, гдѣ P и Q обозначаютъ дѣйствительные постоянные коэффиціенты, а $x^2 + px + q$ произведеніе линейныхъ множителей, отвѣчающихъ двумъ сопряженнымъ мнимымъ корнямъ уравненія $f(x) = 0$. Что касается первыхъ членовъ, то мы ничего не можемъ прибавить къ тому, что было сказано выше, и мы будемъ заниматься только интегралами вида

$$\int \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} dx.$$

Черезъ внесеніе

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} t,$$

предыдущій интеграль сдѣлается равнымъ

$$\frac{P}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{n-1}} \int \frac{t dt}{(t^2 + 1)^n} + \frac{Q - \frac{1}{2} P p}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{n-\frac{1}{2}}} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n},$$

но такъ какъ $t dt$ половина дифференціала $t^2 + 1$, то при $n > 1$ имѣемъ

$$\int \frac{t dt}{(t^2 + 1)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(t^2 + 1)^{n-1}} + \text{const.},$$

при $n = 1$,

$$\int \frac{t dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \log(t^2 + 1) + \text{const.};$$

поэтому все приводится къ опредѣленію интеграла

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}.$$

Если введемъ въ числитель дифференціала множитель $(t^2 + 1) - t^2$, то получимъ

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n} = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{n-1}} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + 1)^n};$$

имѣемъ потомъ

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + 1)^n} = \frac{1}{2} \int t \frac{2t dt}{(t^2 + 1)^n}$$

и

$$\frac{2t dt}{(t^2 + 1)^n} = d \left[-\frac{1}{(n-1)(t^2 + 1)^{n-1}} \right];$$

интегрирование по частямъ поэтому дастъ

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + 1)^n} = -\frac{t}{2(n-1)(t^2 + 1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{n-1}},$$

посредствомъ чего будемъ имѣть

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n} = \frac{1}{2n-2} \frac{t}{(t^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{n-1}}.$$

Точно также, написавъ $n-1$, $n-2$, ..., 2 вмѣсто n , будемъ имѣть

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{n-1}} = \frac{1}{2n-4} \frac{t}{(t^2 + 1)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2n-4} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{n-2}},$$

.....

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{t}{t^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

Если сложимъ $n - 1$ предыдущихъ уравненій, послѣ умноженія ихъ соотвѣтственно на множители

$$1, \frac{2n-3}{2n-2}, \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)}, \dots,$$

то получимъ

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = & \left[\frac{1}{2n-2} \frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} \right. \\ & + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)} \frac{t}{(t^2+1)^{n-2}} + \dots \\ & \left. + \frac{(2n-3) \dots 1}{(2n-2) \dots 2} \frac{t}{t^2+1} \right] \\ & + \frac{(2n-3)(2n-5) \dots 1}{(2n-2)(2n-4) \dots 2} \arctan t + \text{const.}, \end{aligned}$$

потому что

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + \text{const.}$$

Если желаемъ ввести въ интегралъ раціональнаго дифференціала только дѣйствительныя количества, то должны сказать, что этотъ интегралъ выражается *алгебраическими, логарифмическими и круговыми* функціями.

Объ алгебраическихъ дифференціалахъ, не содержащихъ другихъ ирраціональных выраженій кромѣ дробныхъ степеней переменнѣй.

421. Мы сейчасъ станемъ разбирать главные случаи, въ которыхъ ирраціональный алгебраическій дифференціалъ $f(x)dx$ можетъ быть приведенъ къ раціональному виду посредствомъ измѣненія переменнѣй.

Упрощеніе, о которомъ идетъ рѣчь, получается непосредственно, когда функція $f(x)$ есть раціональная функція цѣлыхъ и дробныхъ степеней x ; въ этомъ случаѣ, если обозначимъ черезъ m цѣлое число, дѣлящееся на знаменатели показателей x въ $f(x)$, то достаточно будетъ положить

$$x = t^m, \quad dx = mt^{m-1} dt,$$

и мы будемъ имѣть

$$f(x) dx = mf(t^m) t^{m-1} dt,$$

это же есть вполнѣ раціональный дифференціалъ.

Подобное преобразование произведетъ искомое упрощеніе, когда $f(x)$ есть раціональная функція отъ x и дробныхъ степеней бинорма первой степени $ax + b$. Если m обозначаетъ цѣлое число, дѣлящееся на знаменателей показателей этихъ степеней, то положимъ

$$ax + b = t^m, \quad x = \frac{t^m - b}{a}, \quad dx = \frac{m}{a} t^{m-1} dt,$$

и послѣ подстановки будемъ имѣть

$$f(x) dx = \varphi(t) dt,$$

гдѣ $\varphi(t)$ есть раціональная функція.

422. П р и м ѣ р ъ. — Разсмотримъ дифференціалъ

$$\frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx;$$

положивъ

$$x = t^6, \quad dx = 6 t^5 dt,$$

получимъ

$$6 \frac{t^3 + t^5}{t^2 + 1} dt = 6 (t^6 - t^4 + t^3 + t^2 - t - 1) + \frac{6t dt}{t^2 + 1} + \frac{6dt}{t^2 + 1};$$

взявъ потомъ интегралъ, будемъ имѣть

$$\int \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx = \frac{6}{7} t^7 - \frac{6}{5} t^5 + \frac{3}{2} t^4 + 2 t^3 + 3 t^2 - 6 t \\ + 3 \log (t^2 + 1) + 6 \operatorname{arc} \operatorname{tang} t + \operatorname{const.},$$

или, написавъ вмѣсто t его значеніе $x^{\frac{1}{6}}$,

$$\int \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx = \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + 2 x^{\frac{1}{2}} - 3 x^{\frac{1}{3}} - 6 x^{\frac{1}{6}} \\ + 3 \log \left(x^{\frac{1}{3}} + 1 \right) + 6 \operatorname{arc} \operatorname{tang} x^{\frac{1}{6}} + \operatorname{const.}$$

Объ алгебраическихъ дифференціалахъ, не содержащихъ другаго ирраціональнаго выраженія, кромѣ квадратнаго корня изъ полинома второй степени.

423. Случай, который мы здѣсь имѣемъ въ виду, есть

тотъ, когда въ дифференціалѣ вида

$$F(x, X) dx,$$

X означаетъ квадратный корень трехчлена второй степени относительно x , а $F(x, X)$ — рациональную функцію отъ x и X .

Пусть

$$X = \sqrt{a + bx + cx^2};$$

если коэффициентъ c есть нуль, то чтобы уничтожить иррациональность данного дифференціала, достаточно положить (§ 421)

$$a + bx = t^2, \quad dx = \frac{2}{b} t dt.$$

Предположимъ поэтому c отличнымъ отъ нуля; такъ какъ изъ-подъ радикала можно вывести численный множитель, равный квадратному корню изъ абсолютнаго значенія c , то очевидно мы можемъ положить

$$X = \sqrt{a + bx \pm x^2}.$$

Надлежитъ разобрать отдѣльно случай, когда x^2 подъ радикаломъ предшествуетъ знакъ $+$ и когда этому квадрату предшествуетъ знакъ $-$.

Пусть сначала

$$X = \sqrt{a + bx + x^2}.$$

ПЕРВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ. — Чтобы уничтожить иррациональность данного дифференціала, можно положить $X = t \pm x$, гдѣ t есть новая переменная; сдѣлаемъ, наприимѣръ,

$$X = t - x;$$

возвысивъ въ квадратъ, получимъ

$$a + bx = t^2 - 2tx,$$

откуда

$$x = \frac{t^2 - a}{2t + b}, \quad X = \frac{t^2 + bt + a}{2t + b}, \quad dx = \frac{2(t^2 + bt + a)}{(2t + b)^2} dt;$$

внесение этих значений дастъ

$$F(x, X) dx = \Phi(t) dt,$$

гдѣ $\Phi(t)$ есть рациональная функція отъ t .

Второе преобразование. — Можно употребить еще такое преобразование

$$X = \sqrt{a} + tx;$$

но, если a и b количества действительныя и если мы желаемъ избѣгнуть употребленія мнимыхъ величинъ, это преобразование относится только къ тому случаю, когда a положительное. Возвысивъ въ квадратъ предыдущее уравненіе, получимъ

$$b + x = 2t\sqrt{a} + t^2 x,$$

откуда

$$x = \frac{2t\sqrt{a} - b}{1 - t^2}, \quad X = \frac{t^2\sqrt{a} - bt + \sqrt{a}}{1 - t^2},$$

$$dx = \frac{2(t^2\sqrt{a} - bt + \sqrt{a})}{(1 - t^2)^2} dt;$$

внесение этихъ значений опять дастъ

$$F(x, X) dx = \Phi(t) dt,$$

гдѣ $\Phi(t)$ есть рациональная функція.

Третье преобразование. — Преобразование, которое намъ остается указать, действительно только тогда, когда уравненіе $X^2 = 0$ имѣетъ действительные корни, это же постоянно имѣетъ мѣсто, когда a отрицательное. Пусть будутъ поэтому x_0 и x_1 корни уравненія $X^2 = 0$, такъ что

$$X = \sqrt{(x - x_0)(x - x_1)};$$

обозначивъ черезъ t новую переменную, положимъ

$$X = (x - x_0) t,$$

или, возвысивъ въ квадратъ,

$$x - x_1 = (x - x_0) t^2.$$

это же дастъ

$$x = \frac{x_1 - x_0 t^2}{1 - t^2}, \quad X = \frac{(x_1 - x_0) t}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{2 (x_1 - x_0) t dt}{(1 - t^2)^2},$$

а подставивъ эти значенія, опять будемъ имѣть

$$F(x, X) dx = \Phi(t) dt,$$

гдѣ $\Phi(t)$ есть раціональная функція.

424. П р и м ѣ р ы. — 1) Предположимъ, что ищется интегралъ дифференціала

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}};$$

первое преобразование дастъ

$$\int \frac{dx}{X} = \int \frac{dt}{t + \frac{b}{2}} = \log \left(t + \frac{b}{2} \right) + \text{const.}$$

или, подставивъ вмѣсто t его значеніе $x + X$, получимъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \log \left(x + \frac{b}{2} + \sqrt{a + bx + x^2} \right) + \text{const.}$$

2) Предположимъ, что ищется интегралъ дифференціала

$$X dx = \sqrt{a + bx + x^2} dx;$$

первое преобразование дастъ

$$\begin{aligned} \int X dx &= \frac{1}{4} \int \frac{\left[\left(t + \frac{b}{2} \right)^2 + \left(a - \frac{b^2}{4} \right) \right]^{\frac{3}{2}}}{\left(t + \frac{b}{2} \right)^3} dt \\ &= \frac{1}{4} \int \left(t + \frac{b}{2} \right) dt + \frac{1}{2} \left(a - \frac{b^2}{4} \right) \int \frac{dt}{t + \frac{b}{2}} + \frac{1}{4} \left(a - \frac{b^2}{4} \right)^2 \int \frac{dt}{\left(t + \frac{b}{2} \right)^3} \\ &= \frac{1}{8} \left(t + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{b^2}{4} \right) \log \left(t + \frac{b}{2} \right) - \frac{1}{8} \left(a - \frac{b^2}{4} \right)^2 \frac{1}{\left(t + \frac{b}{2} \right)^2} + \text{const}; \end{aligned}$$

кромѣ того количества $t + \frac{b}{2}$ и $\frac{a - \frac{b^2}{4}}{t + \frac{b}{2}}$ имѣють соотвѣтственно

значеніями $x + \frac{b}{2} + X$ и $-x - \frac{b}{2} + X$; поэтому имѣемъ

$$\int \sqrt{a + bx + x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{b}{2} \right) \sqrt{a + bx + x^2} + \frac{1}{2} \left(a - \frac{b^2}{4} \right) \log \left(x + \frac{b}{2} + \sqrt{a + bx + x^2} \right) + \text{const.}$$

Нужно замѣтить, что данный интегралъ посредствомъ интегрированія по частямъ можно привести къ первому примѣру. Дѣйствительно, имѣемъ:

$$\int \sqrt{a + bx + x^2} dx = x \sqrt{a + bx + x^2} - \int \frac{x^2 + \frac{b}{2}x}{\sqrt{a + bx + x^2}} dx,$$

кроме того

$$\int \sqrt{a + bx + x^2} dx = \int \frac{a + bx + x^2}{\sqrt{a + bx + x^2}} dx;$$

а если сложимъ эту формулу съ предыдущей, то получимъ

$$2 \int \sqrt{a + bx + x^2} dx = x \sqrt{a + bx + x^2} + \int \frac{a + \frac{b}{2}x}{\sqrt{a + bx + x^2}} dx;$$

членъ подъ \int второй части этой новой формулы, равенъ суммѣ

$$\left(a - \frac{b^2}{4} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} + \frac{b}{2} \int \frac{x + \frac{b}{2}}{\sqrt{a + bx + x^2}} dx;$$

первый членъ извѣстенъ изъ примѣра I, а второй очевидно имѣетъ значеніемъ $\frac{b}{2} \sqrt{a + bx + x^2}$; такимъ образомъ мы возвращаемся уже къ полученному результату.

3) Пусть будетъ еще дифференціалъ

$$\frac{(x + ex) dx}{\sqrt{a + bx + x^2}},$$

который часто встрѣчается и котораго интегралъ выводится непосредственно изъ произведенныхъ только-что нами вычисленій. Имѣемъ

$$\frac{(\alpha + \epsilon x) dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \left(\alpha - \frac{b\epsilon}{2} \right) \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} + \epsilon \frac{\left(x + \frac{b}{2} \right) dx}{\sqrt{a + bx + x^2}};$$

взявъ интегралъ, получимъ

$$\int \frac{(\alpha + \epsilon x) dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \left(\alpha - \frac{b\epsilon}{2} \right) \log \left(x + \frac{b}{2} + \sqrt{a + bx + x^2} \right) + \epsilon \sqrt{a + bx + x^2} + \text{const.}$$

425. Разсмотримъ теперь случай, когда

$$X = \sqrt{a + bx - x^2}.$$

Чтобы дифференціалъ $F(x, X) dx$ привести къ раціональному виду, можно употребить второе или первое преобразование § 423, если только a положительное. Въ случаѣ $a < 0$ мы должны будемъ ограничиться только третьимъ преобразованиемъ, если желаемъ ввести только дѣйствительныя количества.

1) Предположимъ $a > 0$, сдѣлаемъ

$$X = \sqrt{a} + tx;$$

возвысивъ обѣ части въ квадратъ, получимъ

$$b - x = 2t \sqrt{a} + t^2 x,$$

откуда

$$x = \frac{b - 2t \sqrt{a}}{1 + t^2}, \quad X = \frac{\sqrt{a} + bt - t^2 \sqrt{a}}{1 + t^2},$$

$$dx = -2 \frac{\sqrt{a} + bt - t^2 \sqrt{a}}{(1 + t^2)^2} dt;$$

внесеніе этихъ значеній дастъ

$$F(x, X) dx = \Phi(t) dt,$$

гдѣ $\Phi(t)$ есть раціональная функція.

2) Какая бы ни была постоянная a , уравненіе $X^2 = 0$ всегда имѣетъ дѣйствительные корни, потому что иначе выраженіе X будетъ мнимое. Мы не исключаемъ этого случая изъ нашего анализа, но такъ какъ функція X въ этомъ случаѣ равна $\sqrt{-1} \sqrt{-a - bx + x^2}$, то онъ входитъ въ

случай § 423. Обозначивъ поэтому черезъ x_0 , x_1 корни уравненія $X^2 = 0$ и предположивъ, что $x_1 > x_0$, имѣемъ

$$X = \sqrt{(x - x_0)(x_1 - x)}.$$

Чтобы произвести преобразованіе, которое мы имѣемъ въ виду, нужно положить

$$X = (x - x_0) t \quad \text{или} \quad x_1 - x = (x - x_0) t^2,$$

откуда

$$x = \frac{x_1 + x_0 t^2}{1 + t^2}, \quad X = \frac{(x_1 - x_0) t}{1 + t^2}, \quad dx = -\frac{2(x_1 - x_0) t dt}{(1 + t^2)^2},$$

это же опять дастъ

$$F(x, X) dx = \Phi(t) dt,$$

гдѣ $\Phi(t)$ есть рациональная функція.

426. Различныя преобразованія, которыя мы употребляли, позволяютъ рѣшить всѣ случаи, которые могутъ встрѣтиться; но не всегда ихъ необходимо употреблять; можетъ случиться, что другія преобразованія гораздо скорѣе приведутъ къ иско-мому результату.

Разсмотримъ, на примѣръ, дифференціалъ

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}};$$

его можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{dx}{\sqrt{\left(a + \frac{b^2}{4}\right) - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}},$$

и мы безъ труда видимъ, что онъ приводится къ элементарному виду $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, если употребимъ преобразованіе

$$x - \frac{b}{2} = t \sqrt{a + \frac{b^2}{4}};$$

потому что

$$dx = dt \sqrt{a + \frac{b^2}{4}}$$

и

$$\sqrt{\left(a + \frac{b^2}{4}\right) - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a + \frac{b^2}{4}} \sqrt{1 - t^2};$$

поэтому имѣемъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + \text{const.}$$

или

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = \arcsin \frac{x - \frac{b}{2}}{\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}} + \text{const.}$$

Этотъ результатъ позволяетъ непосредственно получить значеніе интеграла

$$\int \frac{\alpha + \epsilon x}{\sqrt{a + bx - x^2}} dx,$$

такъ какъ этотъ интегралъ можетъ быть разложенъ на двѣ части, именно:

$$\left(\alpha + \frac{b\epsilon}{2}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} - \epsilon \int \frac{\left(\frac{b}{2} - x\right) dx}{\sqrt{a + bx - x^2}};$$

первая часть есть тотъ интегралъ, который мы только-что опредѣлили, только съ постояннымъ множителемъ, а вторая часть имѣетъ значеніемъ $-\epsilon \sqrt{a + bx - x^2}$.

427. Къ раціональному виду можно привести еще дифференціалъ вида

$$F(x, \sqrt{a + bx}, \sqrt{a' + b'x}) dx,$$

гдѣ F обозначаетъ раціональную функцію трехъ количествъ x , $\sqrt{a + bx}$, $\sqrt{a' + b'x}$. Дѣйствительно, этотъ случай заключается въ томъ, который мы только-что разобрали; потому что если сдѣлаемъ

$$a' + b'x = t^2, \quad x = \frac{t^2 - a'}{b'}, \quad dx = \frac{2}{b'} t dt,$$

то данный дифференціалъ приведется къ виду

$$\Phi(t, T)dt,$$

гдѣ T обозначаетъ квадратный корень изъ многочлена второй степени, а Φ рационала функцію.

Ученіе объ алгебраическихъ дифференціалахъ, не содержащихъ инаго ирраціональнаго выраженія, кромѣ квадратнаго корня изъ многочлена третьей или четвертой степени.

428. Самый простой случай изъ алгебраическихъ дифференціаловъ, послѣ тѣхъ, которые мы только-что разобрали, есть случай дифференціала вида

$$(1) \quad dV = F(x, X) dx,$$

гдѣ X обозначаетъ квадратный корень изъ многочлена третьей или четвертой степени, а $F(x, X)$ рациональную функцію отъ x и X . Интегралы алгебраическихъ дифференціаловъ, разсмотрѣнные нами въ предъидущихъ параграфахъ, выражаются, какъ мы видѣли, алгебраическими, логариѳмическими и круговыми функціями; но не то вообще будетъ относительно дифференціала dV , которымъ мы станемъ заниматься. Изъ того, что мы сейчасъ будемъ изучать, вытекаетъ необходимость ввести въ анализъ три новые элемента, которымъ Лежандръ далъ названіе *эллиптическихъ функцій*, и тогда интегралъ V будетъ выражаться алгебраическими, логариѳмическими, круговыми и эллиптическими функціями.

Пусть будетъ

$$(2) \quad X = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4};$$

мы должны предположить, что полиномъ, находящійся подъ радикаломъ этой формулы, не имѣетъ кратныхъ линейныхъ множителей, потому что иначе дифференціалъ dV будетъ принадлежать къ классу дифференціаловъ, которыми мы занимались только въ § 423 и 425, а интегралъ V будетъ выражаться только алгебраическими, логариѳмическими и круговыми функціями; такимъ образомъ, въ частности, коэффициенты δ

и ε не могут одновременно равняться нулю, но мы можем имѣть $\varepsilon = 0$.

Сперва нужно постараться упростить выраженіе дифференціала dV ; мы сейчас докажемъ, что если постоянныя, которыя онъ содержитъ, дѣйствительны, то всегда можно, посредствомъ дѣйствительной и линейной подстановки

$$(3) \quad x = \frac{p + qt}{1 + t},$$

ему дать видъ

$$dV = \Phi(t, T) dt,$$

гдѣ T обозначаетъ радикалъ вида

$$T = \sqrt{\pm (t^2 + \lambda)(t^2 + \mu)},$$

въ которомъ λ и μ дѣйствительныя постоянныя, а Φ раціональная функція отъ t и T .

429. Предположимъ сначала, что ε не равенъ нулю; полиномъ, находящійся подъ радикаломъ формулы (2), можетъ быть всегда разложенъ на два дѣйствительныхъ множителя второй степени, и слѣдовательно мы можемъ написать

$$(4) \quad X = \sqrt{\varepsilon (f - 2gx + x^2)(f' - 2g'x + x^2)}.$$

Теперь, черезъ внесеніе (3), имѣемъ

$$f - 2gx + x^2 = \frac{F - 2Gt + Ht^2}{(1 + t)^2},$$

$$f' - 2g'x + x^2 = \frac{F' - 2G't + H't^2}{(1 + t)^2},$$

гдѣ для краткости сдѣлано

$$(5) \quad \begin{cases} F = f - 2gp + p^2, & F' = f' - 2g'p + p^2, \\ G = -f + g(p + q) - pq, & G' = -f' + g'(p + q) - pq, \\ H = f - 2gq + q^2, & H' = f' - 2g'q + q^2, \end{cases}$$

и если сверхъ того положимъ

$$(6) \quad T = \sqrt{\pm \left(\frac{F}{H} - \frac{2G}{H}t + t^2 \right) \left(\frac{F'}{H'} - \frac{2G'}{H'}t + t^2 \right)},$$

то будемъ имѣть

$$(7) \quad X = \frac{V \pm \varepsilon \sqrt{HH'}}{(1+t)^2} T;$$

кроме того формула (3) даетъ

$$(8) \quad dx = (q - p) \frac{dt}{(1+t)^2};$$

поэтому дифференціалъ dV , черезъ наше внесеніе, обратится въ

$$(9) \quad dV = \Phi(t, T) dt,$$

гдѣ Φ есть раціональная функція.

Но мы ввели два неопредѣленныхъ количества p и q , которыя мы должны взять такими, чтобы уничтожить нечетныя степени t подъ радикаломъ формулы (6); дѣйстви-тельно, достаточно положить $G = 0$, $G' = 0$, т. е. на осно-ваніи формулъ (5),

$$\begin{aligned} f - g(p + q) + pq &= 0, \\ f' - g'(p + q) + pq &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда имѣемъ

$$(10) \quad \begin{cases} p + q = \frac{f - f'}{g - g'}, \\ pq = \frac{fg' - gf'}{g - g'}, \end{cases}$$

потомъ

$$(11) \quad p - q = \frac{V(f + f' - 2gg')^2 - 4(f - g^2)(f' - g'^2)}{g - g'}.$$

Исключивъ случай $g = g'$, къ которому мы сейчасъ воз-вратимся, мы видимъ, что формула (11) съ первой изъ формулъ (10) опредѣляетъ коэффициенты внесенія p и q . Нужно доказать, что постоянно можно такъ сдѣлать, чтобы эти коэффициенты были дѣйствительные.

Обозначимъ черезъ a, b, c, d четыре корня уравненія $X^2 = 0$ и положимъ $f = ab$, $g = \frac{a+b}{2}$, $f' = cd$, $g' = \frac{c+d}{2}$. За-мѣнивъ въ выраженіи $p - q$ количества f, g, f', g' ихъ значеніями, мы видимъ, что количество подъ радикаломъ

уничтожается для $a = c$ или $a = d$, а также для $b = c$ или $b = d$; отсюда слѣдуетъ, что

$$p - q = 2 \frac{\sqrt{(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)}}{a + b - c - d}.$$

Если четыре корня дѣйствительны, то предположимъ

$$a > b > c > d.$$

Если два корня дѣйствительные и два мнимые, то возьмемъ за a и за b два дѣйствительные корня; такъ какъ множители $a - c$, $a - d$ сопряженные, то они имѣютъ дѣйствительное произведение; то же самое относится и къ множителямъ $b - c$, $b - d$.

Если всѣ корни мнимые, то мы предположимъ, что a и b два сопряженные корня. Два множителя $a - b$, $b - d$ будутъ сопряженные, а также и множители $a - d$, $b - c$.

Въ случаѣ $g' = g$, данную задачу мы рѣшимъ непосредственно, если положимъ

$$x = g + t.$$

Замѣтимъ наконецъ, что дѣленіе формулы (8) на (7) даетъ

$$\frac{dx}{X} = v - \frac{dt}{T},$$

гдѣ v обозначаетъ постоянную.

430. Намъ остается разобрать случай $\varepsilon = 0$. Въ этомъ случаѣ полиномъ, находящійся подъ радикаломъ формулы (1), разлагается на два дѣйствительныхъ множителя, одинъ первой степени, другой второй. Имѣемъ

$$X = \sqrt{-\delta(a - x)(f - 2gx + x^2)},$$

черезъ внесеніе (3) получимъ

$$a - x = \frac{(q - a) \left(\frac{a - p}{q - a} - t \right) (1 + t)}{(1 + t)^2} = \frac{F' - 2G't + H't^2}{(1 + t)^2},$$

$$f - 2gx + x^2 = \frac{F - 2Gt + Ht^2}{(1 + t)^2};$$

гдѣ F, G, H имѣютъ значенія, даваемыя формулами (5). Поэтому формулы (6) и (7) существуютъ и въ этомъ случаѣ, если только напишемъ — δ вмѣсто ϵ ; первая степень t уничтожится въ каждомъ множителѣ подъ радикаломъ, если сдѣлаемъ $G = 0, G' = 0$, т. е.

$$\frac{a-p}{q-a} = 1, \quad -f + g(p+q) - pq = 0;$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{p+q}{2} = a, \quad pq = 2ga - f$$

и

$$\frac{p-q}{2} = \sqrt{a^2 - 2ga + f} = \sqrt{(a-b)(a-c)},$$

гдѣ b и c означаютъ два корня трехчлена $x^2 - 2fx + g$. Если корни b и c дѣйствительные, то мы возьмемъ для a самый большій или самый меньшій изъ трехъ корней многочлена X^2 . Если b и c мнимые, то произведение сопряженныхъ множителей $a-b, a-c$ положительное.

431. Рациональная функція $\Phi(t, T)$ можетъ быть представлена въ видѣ

$$\frac{M + Nt}{M' + N't},$$

гдѣ M, N, M', N' цѣлыя функціи отъ t^2 и T ; если оба члена этого выраженія умножимъ на $M' - N't$, то мы дадимъ ему видъ

$$P + Qt,$$

гдѣ P и Q рациональныя функціи отъ t^2 и T . Такимъ образомъ, данный дифференціалъ dV будетъ

$$dV = P dt + Qt dt.$$

Если же сдѣлаемъ $u = t^2, du = 2t dt$, то членъ $Qt dt$ обратится въ $\frac{1}{2} Q du$, гдѣ Q есть рациональная функція отъ u и квадратнаго корня трехчлена второй степени, вслѣдствіе

этого интегралъ дифференціала $Qt \, dt$ выражается, на основаніи того, что было изложено прежде, алгебраическими, логариѳмическими и круговыми функціями.

Что касается члена Pdt , то онъ очевидно имѣетъ видъ

$$\frac{M + NT}{M' + N'T} dt \text{ или } \frac{N + \frac{M}{T}}{N' + \frac{M'}{T}} dt,$$

гдѣ M, N, M', N' суть цѣлыя функціи отъ t^2 ; если же оба члена умножимъ на $N' - \frac{M'}{T}$, то будемъ имѣть

$$P \, dt = \psi(t^2) \, dt + \varphi(t^2) \frac{dt}{T},$$

гдѣ $\psi(t^2)$ и $\varphi(t^2)$ суть раціональныя функціи отъ t^2 . Дифференціалъ $\psi(t^2) \, dt$ раціональный и слѣдовательно его интегралъ есть алгебраическій, логариѳмическій и круговой; если же сдѣлаемъ

$$dU = \varphi(t^2) \frac{dt}{T},$$

то интегралъ U будетъ выражаться алгебраическими, логариѳмическими и круговыми функціями, соединенными съ новыми элементами, которые содержитъ интегралъ U .

432. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДИКАЛА T . — Предложенный нами вопросъ, на основаніи предъидущаго, сводится къ изученію дифференціала вида

$$dU = \varphi(t^2) \frac{dt}{T};$$

$\varphi(t^2)$ есть раціональная функція отъ t^2 , а T означаетъ радикалъ, имѣющій одинъ изъ слѣдующихъ пяти видовъ:

- | | |
|----|---------------------------------------|
| 1) | $T = \sqrt{+(t^2 - p^2)(t^2 - q^2)},$ |
| 2) | $T = \sqrt{-(t^2 - p^2)(t^2 - q^2)},$ |
| 3) | $T = \sqrt{+(t^2 + p^2)(t^2 - q^2)},$ |
| 4) | $T = \sqrt{-(t^2 + p^2)(t^2 - q^2)},$ |
| 5) | $T = \sqrt{+(t^2 + p^2)(t^2 + q^2)},$ |

гдѣ p и q данныя дѣйствительныя количества; мы исключаемъ предположеніе

$$T = \sqrt{-(t^2 + p^2)(t^2 + q^2)},$$

потому что оно отвѣчаетъ мнимому значенію dU ; кромѣ того этотъ случай приведетъ къ пятому изъ тѣхъ, которые мы перечислили, если напомнимъ $dU \sqrt{-1}$ вмѣсто dU .

Во всѣхъ пяти случаяхъ, которые мы станемъ разсматривать, радикалъ можетъ быть приведенъ къ одному и тому же виду посредствомъ измѣненія переменнѣй; видъ, допускаемый нами, не единственный, который можно выбрать, но онъ есть самый удобный и чаще всего употребляемый.

1) Разсмотримъ сперва первый случай; предположимъ что всегда возможно, $p^2 < q^2$ и положимъ

$$\frac{p^2}{q^2} = k^2;$$

чтобы радикалъ T оставался дѣйствительнымъ, нужно, чтобы

$$t^2 < p^2 \text{ или } t^2 > q^2.$$

Если $t^2 < p^2$, то мы положимъ

$$t = px, \quad dt = p dx,$$

и мы будемъ имѣть

$$T = kq^2 \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)},$$

откуда

$$\frac{dt}{T} = \frac{1}{q} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Если $t^2 > q^2$, то мы положимъ

$$t = \frac{q}{x}, \quad dt = -\frac{q dx}{x^2},$$

откуда слѣдуетъ, что

$$T = \frac{q^2}{x^2} \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)},$$

и мы будемъ имѣть для $\frac{dt}{T}$ то же значеніе, что и, въ

предыдущемъ предположеніи, такъ какъ радикалы имѣютъ двойные знаки.

2) Во второмъ случаѣ мы можемъ опять предположить, что $p^2 < q^2$, и мы положимъ

$$\frac{q^2 - p^2}{q^2} = k^2.$$

Чтобы радикалъ T имѣлъ дѣйствительное значеніе, нужно, чтобы t^2 заключалось постоянно между p^2 и q^2 ; мы употребимъ внесеніе

$$t^2 = q^2 (1 - k^2 x^2),$$

которое дастъ

$$dt = k^2 q \frac{x dx}{\sqrt{1 - k^2 x^2}}, \quad T = k^2 q^2 x \sqrt{1 - x^2}$$

и слѣдовательно

$$\frac{dt}{T} = \frac{1}{q} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

3) Въ третьемъ случаѣ дѣйствительность радикала T требуетъ, чтобы t^2 было $> q^2$, мы сдѣлаемъ

$$\frac{p^2}{p^2 + q^2} = k^2,$$

и мы употребимъ внесеніе

$$t^2 = \frac{q^2}{1 - x^2},$$

которое дастъ

$$dt = \frac{qx dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad T = \frac{pq}{k} \frac{x \sqrt{1 - k^2 x^2}}{1 - x^2},$$

откуда слѣдуетъ

$$\frac{dt}{T} = \frac{k}{p} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

4) Въ четвертомъ случаѣ, чтобы радикалъ T имѣлъ дѣйствительное значеніе, мы должны имѣть $t^2 < q^2$; мы положимъ

$$\frac{q^2}{p^2 + q^2} = k^2,$$

и мы употребимъ внесение

$$t^2 = q^2 (1 - x^2),$$

которое даетъ

$$dt = q \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad T = \frac{q^2}{k} x \sqrt{1 - k^2 x^2},$$

откуда имѣемъ

$$\frac{dt}{T} = \frac{k}{q} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

5) Наконецъ, въ пятомъ случаѣ, радикалъ T постоянно дѣйствительный; мы предположимъ $p^2 < q^2$ и сдѣлаемъ

$$\frac{q^2 - p^2}{q^2} = k^2.$$

Потомъ мы употребимъ внесение

$$t^2 = p^2 \frac{x^2}{1 - x^2},$$

которое дастъ

$$dt = \frac{p dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad T = pq = \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{1 - x^2},$$

и мы будемъ имѣть

$$\frac{dt}{T} = \frac{1}{q} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}.$$

Мы видимъ, наконецъ что, положивъ

$$X = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)},$$

гдѣ k^2 обозначаетъ положительное количество, меньшее единицы, отношеніе $\frac{dt}{T}$ равно, въ каждомъ изъ пяти случаевъ, которые мы разобрали, отношенію $\frac{dx}{X}$, умноженному на нѣкоторую постоянную. Сверхъ того, въ различныхъ преобразованіяхъ, которыя мы употребляли, квадратъ t^2 выражается ра-

ціональної функціей квадрата x^2 новою перемѣнною x ; поэтому дифференціалъ dU приводится къ виду

$$dU = f(x^2) \frac{dx}{X},$$

гдѣ $f(x^2)$ есть раціональная функція отъ x^2 .

433. Функція $f(x^2)$ можетъ быть разложена на цѣлую часть и на различныя простыя дроби, имѣющія числителями постоянныя, а знаменателями цѣлыя степени бинома, образованнаго отъ сложенія x^2 съ постоянной. Когда эта постоянная равна нулю, тогда соотвѣтствующая простая дробь обращается въ произведеніе постоянной на цѣлую и отрицательную степень x^2 ; поэтому каждый членъ функціи $f(x^2)$ будетъ имѣть одинъ изъ двухъ слѣдующихъ видовъ

$$x^{2\mu}, \quad \frac{1}{(1 + nx^2)^\nu},$$

въ которыхъ отброшенъ коэффициентъ и въ которыхъ n обозначаетъ постоянную, а μ и ν цѣлыя числа, изъ которыхъ первое можетъ равняться нулю или быть отрицательнымъ.

Если поэтому положимъ

$$(1) \quad Y_\mu = \int \frac{x^{2\mu} dx}{X}, \quad Z_\nu = \int \frac{dx}{(1 + nx^2)^\nu X},$$

то интегралъ U будетъ сумма членовъ, получающихся отъ умноженія функцій вида Y_μ или Z_ν на постоянные коэффициенты; намъ остается изучить эти функціи.

Разсмотримъ сначала интегралы Y_μ . Имѣемъ

$$X^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2),$$

откуда

$$X \frac{dX}{dx} = -(1 + k^2)x + 2k^2 x^3;$$

если умножимъ эту формулу на $\frac{x^{2\mu-3} dx}{X}$ и возьмемъ потомъ интегралъ каждой части, то получимъ

$$2k^2 Y_\mu - (1 + k^2) Y_{\mu-1} = \int x^{2\mu-3} \frac{dX}{dx} dx.$$

Интегрирование по частямъ дастъ

$$\int x^{2\mu-3} \frac{dX}{dx} dx = x^{2\mu-3} X - (2\mu - 3) \int X x^{2\mu-4} dx;$$

сверхъ того

$$\begin{aligned} \int X x^{2\mu-4} dx &= \int \frac{X^2 x^{2\mu-4}}{X} dx \\ &= \int \frac{x^{2\mu-4} - (1 - k^2) x^{2\mu-2} + k^2 x^{2\mu}}{X} dx \\ &= Y_{\mu-2} - (1 + k^2) Y_{\mu-1} + k^2 Y_{\mu}; \end{aligned}$$

поэтому имѣемъ

$$(2) \quad (2\mu - 1) k^2 Y_{\mu} - (2\mu - 2) (1 + k^2) Y_{\mu-1} + (2\mu - 3) Y_{\mu-2} = x^{2\mu-3} X.$$

Мы не прибавляемъ постоянной ко второй части, потому что каждый изъ интеграловъ Y_{μ} содержитъ произвольную постоянную. Нужно замѣтить, что формула (2) могла бы быть найдена скорѣе, если-бы взяли дифференціалъ произведенія $x^{2\mu-3} X$ и потомъ интегрировали полученный дифференціалъ; но ходъ дѣйствій, которому мы слѣдовали, аналитичнѣе.

Если въ формулѣ (2) сдѣлаемъ $\mu = 2, 3, 4, \dots$, то послѣдовательно опредѣлимъ

$$Y_2, Y_3, Y_4, \dots$$

въ функціи Y_0, Y_1 и алгебраическихъ количествъ. Если сдѣлаемъ $\mu = 1$, то формула (2) опредѣлитъ Y_{-1} въ функціи Y_1 и алгебраическихъ количествъ; наконецъ, если сдѣлаемъ $\mu = 0, -1, -2, -3, \dots$, то та-же формула послѣдовательно опредѣлитъ значенія

$$Y_{-2}, Y_{-3}, Y_{-4}, \dots,$$

въ функціи Y_0, Y_1 и алгебраическихъ количествъ. Такимъ образомъ разсмотрѣніе интеграловъ Y_{μ} приводитъ къ двумъ новымъ элементарнымъ функціямъ Y_0 и Y_1 .

434. Займемся теперь функціями Z_{ν} ; индексъ ν для насъ есть цѣлое положительное число, но мы должны замѣтить, что если этому числу дадимъ отрицательныя значенія, то соотвѣтствующія функціи Z_{ν} будутъ состоять изъ суммъ

Функцій Y_μ ; слѣдовательно, онѣ могутъ быть выражены функціями Y_0 , Y_1 и алгебраическими количествами; дѣйствительно имѣемъ

$$Z_{-\nu} = \int \frac{(1 + nx^2)^\nu dx}{X} = Y_0 + \frac{\nu}{1} n Y_1 + \dots + \text{const.}$$

Теперь, чтобы получить формулу аналогичную той, которая относится къ функціямъ Y_μ , мы можемъ употребить интегрированіе по частямъ, но искомой цѣли мы достигнемъ скорѣе, если поступимъ слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ дифференціалъ функціи

$$\frac{xX}{(1 + nx^2)^{\nu-1}},$$

будемъ имѣть

$$d \left[\frac{xX}{(1 + nx^2)^{\nu-1}} \right] = \left[\frac{(2\nu - 2)X^2}{(1 + nx^2)^\nu} - \frac{(2\nu - 3)X^2 - \frac{x}{2} \frac{d(X^2)}{dx}}{(1 + nx^2)^{\nu-1}} \right] \frac{dx}{X},$$

потомъ, если расположимъ полиномы X^2 и $\frac{x}{2} \frac{d(X^2)}{dx}$ по степенямъ $(1 + nx^2)$, найдемъ

$$X^2 = \frac{(n+1)(n+k^2)}{n^2} - \frac{n+(n+2)k^2}{n^2}(1 + nx^2) + \frac{k^2}{n^2}(1 + nx^2)^2,$$

$$\frac{x}{2} \frac{d(X^2)}{dx} = \frac{n+(n+2)k^2}{n^2} - \frac{n+(n+4)k^2}{n^2}(1 + nx^2) + \frac{2k^2}{n^2}(1 + nx^2)^2,$$

если же для краткости сдѣлаемъ

$$(3) \quad \begin{cases} A = (2\nu - 2) \frac{(n+1)(n+k^2)}{n^2}, \\ B = (2\nu - 3) \frac{n(n+2) + (2n+3)k^2}{n^2}, \\ C = (2\nu - 4) \frac{n+(n+3)k^2}{n^2}, \\ D = (2\nu - 5) \frac{k^2}{n^2}, \end{cases}$$

то, на основаніи предъидущихъ формулъ, будемъ имѣть

$$d \left[\frac{xX}{(1 + nx^2)^{\nu-1}} \right] = AdZ_\nu - BdZ_{\nu-1} + CdZ_{\nu-2} - DdZ_{\nu-3},$$

откуда, взявъ интегралъ,

$$(4) \quad AZ_v - BZ_{v-1} + CZ_{v-2} - DZ_{v-3} = \frac{xX}{(1+nx^2)^{v-1}}.$$

Коэффициентъ A есть нуль въ двухъ случаяхъ: когда $n = -1$ и когда $n = -k^2$, въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$B = -(2v-3)(1-k^2) \quad \text{или} \quad B = +(2v-3)\frac{1-k^2}{k^2};$$

B не есть нуль, потому что k меньше единицы. Формула (4) приводится къ

$$(5) \quad -BZ_{v-1} + CZ_{v-2} - DZ_{v-3} = \frac{xX}{(1+nx^2)^{v-1}},$$

если-же v дадимъ значеніе 2, 3, 4, . . . , то формула (5) послѣдовательно опредѣлитъ

$$Z_1, Z_2, Z_3, \dots$$

въ функціи алгебраическихъ количествъ и интеграловъ Z_0 , Z_{-1} или, если желаемъ, интеграловъ Y_0 , Y_1 , потому что

$$Z_0 = Y_0, \quad Z_{-1} = Y_0 + nY_1.$$

Такимъ образомъ въ томъ случаѣ, когда $1+nx^2$ равно одному изъ множителей X^2 , разсмотрѣніе функцій Z_v не вводитъ никакого новаго аналитическаго элемента.

Предположимъ теперь, что n не равно ни -1 , ни $-k^2$; въ этомъ случаѣ A можетъ равняться нулю только для $v=1$. Если дадимъ v значеніе 2, 3, 4, . . . , то формула (4) опредѣлитъ послѣдовательно

$$Z_2, Z_3, Z_4, \dots$$

въ функціи Z_1 , Z_0 , Z_{-1} и алгебраическихъ количествъ. Интегралы Z_0 , Z_{-1} выражаются, какъ мы только-что сказали, посредствомъ Y_0 и Y_1 ; поэтому разсмотрѣніе функцій Z_v вводитъ только одинъ новый элементъ Z_1 .

Изъ произведеннаго только-что нами анализа слѣдуетъ, что интегралъ даннаго дифференціала выражается посредствомъ извѣстныхъ элементарныхъ функцій и интеграловъ, принадлежащихъ къ тремъ видамъ:

$$Y_0, Y_1, Z_1.$$

Интегралы Y_0, Y_1, Z_1 действительно составляют три новые аналитические элемента, въ общемъ случаѣ, различные между собой.

Объ эллиптическихъ функціяхъ.

435. Предположимъ, что мы такъ взяли интегралы, обозначенные въ предыдущемъ параграфѣ черезъ Y_0, Y_1, Z_1 , что они уничтожаются въ одно время съ x , обозначивъ ихъ въ этомъ случаѣ черезъ u, v, w , будемъ имѣть

$$u = \int_0^x \frac{dx}{V(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

$$v = \int_0^x \frac{x^2 dx}{V(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

$$w = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)V(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

Трансцендентныя функціи u, v, w называются *эллиптическими функціями* или *эллиптическими интегралами первого, второго и третьего рода*.

Функціи первого и второго рода содержатъ постоянную k меньшую единицы, которая получила названіе *модуля*; функція третьего рода содержитъ также модуль k и вторую постоянную n , называемую *параметромъ*. Мы видѣли, что если n равно -1 или $-k^2$, то функція третьего рода выражается функціями первого и второго рода и алгебраическими количествами. Действительно, въ случаѣ $n = -1$, на основаніи формулы (4) § 434, имѣемъ

$$(1-k^2)w + k^2(u-v) = \frac{xV(1-x^2)(1-k^2x^2)}{1-x^2},$$

въ случаѣ же $n = -k^2$

$$(-k^2)w - (u - k^2v) = \frac{-k^2xV(1-x^2)(1-k^2x^2)}{1-k^2x^2},$$

въ чемъ не трудно убѣдиться посредствомъ дифференцированія.

436. Эллиптическія функціи обращаются въ круговыя или логариѣмическія, въ предѣльныхъ случаяхъ, когда модуль становится равнымъ нулю или единицѣ.

Въ случаѣ $k = 0$, имѣемъ

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$v = \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$w = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{1-x^2}};$$

первая формула есть

$$u = \arcsin x;$$

что-же касается функцій v и w , то ихъ дифференціалы могутъ быть приведены къ раціональной формѣ посредствомъ метода § 423; но ихъ значеніе также можно получить слѣдующимъ способомъ. Интегрирование по частямъ дастъ

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int x \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x \sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} dx,$$

если же возьмемъ такъ интегралы, чтобы они уничтожились вмѣстѣ съ x , то получимъ

$$\int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x \sqrt{1-x^2} + \int_0^x \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

интеграль второй части этой формулы равенъ $u - v$, поэтому имѣемъ

$$v = -\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x.$$

Дифференціаль dw приводится къ раціональному виду посредствомъ подстановки

$$t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

имѣемъ

$$x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

и слѣдовательно

$$dw = \frac{dt}{1 + (1+n)t^2} = \frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tang} t \sqrt{1+n}}{\sqrt{1+n}},$$

поэтому

$$w = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x \sqrt{1+n}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Такъ какъ параметръ n предполагается дѣйствительнымъ, то предыдущую формулу можно освободить отъ мнимыхъ количествъ, которыя содержатся въ случаѣ $1+n$ отрицательномъ, если вмѣсто дуги круга введемъ логариѣмы (§ 372). Сверхъ того можно написать

$$dw = \frac{dt}{1 + (1+n)t^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1-n}} \left(\frac{dt}{1+t\sqrt{-1-n}} + \frac{dt}{1-t\sqrt{-1-n}} \right),$$

откуда

$$w = \frac{1}{2(-1-n)} \log \frac{1+t\sqrt{-1-n}}{1-t\sqrt{-1-n}} = \frac{1}{2(-1-n)} \log \left(\frac{\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{-1-n}}{\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{-1-n}} \right).$$

Предыдущія выраженія w невѣрны, когда $n = -1$. Въ этомъ случаѣ оба члена дроби

$$w = \frac{\operatorname{arctang} t \sqrt{1+n}}{\sqrt{1+n}}$$

уничтожаются, и мы имѣемъ

$$w = t \text{ или } w = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

437. Въ случаѣ $k^2 = 1$, имѣемъ

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1-x^2}, \quad v = \int_0^x \frac{x^2 dx}{1-x^2}, \quad w = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)(1-x^2)}.$$

Дифференціалы функцій u , v , w здѣсь раціональны; прилагая къ первой правило § 418, найдемъ

$$u = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{1-x} = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

сверхъ того имѣемъ $du - dv = dx$, откуда

$$v = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - x.$$

Потомъ имѣемъ

$$\frac{1}{(1+nx^2)(1-x^2)} = \frac{1}{1+n} \left(\frac{n}{1+nx^2} + \frac{1}{1-x^2} \right),$$

и слѣдовательно

$$w = \frac{1}{1+n} \int_0^x \frac{ndx}{1+nx^2} + \frac{u}{1+n}.$$

Если n положительное, то, положивъ $x\sqrt{n} = t$, найдемъ

$$\int_0^x \frac{ndx}{1+nx^2} = \sqrt{n} \int_0^t \frac{dt}{1+t^2} + \sqrt{n} \arctan t,$$

откуда

$$w = \frac{1}{1+n} \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{\sqrt{n}}{1+n} \arctan (x\sqrt{n}).$$

Если напротивъ n отрицательное, то положимъ $x\sqrt{-n} = t$ и мы будемъ имѣть

$$\int_0^x \frac{ndx}{1+nx^2} = -\sqrt{-n} \int_0^t \frac{dt}{1-t^2} = -\sqrt{-n} \log \sqrt{\frac{1+t}{1-t}},$$

откуда

$$w = \frac{1}{1+n} \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{\sqrt{-n}}{1+n} \log \sqrt{\frac{1+x\sqrt{-n}}{1-x\sqrt{-n}}}.$$

Чтобы получить значеніе w въ случаѣ $n = -1$, достаточно взять производную выраженія

$$-\sqrt{-n} \log \sqrt{\frac{1+x\sqrt{-n}}{1-x\sqrt{-n}}}$$

относительно n и сдѣлать потомъ $n = -1$ (§ 124). Такимъ образомъ найдемъ

$$w = \frac{1}{4} \log \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{x}{1-x^2}.$$

438. Три эллиптическія функціи u , v , w примутъ очень простую форму, когда введемъ уголъ, имѣющій синусомъ независимую переменную x ; если сдѣлаемъ

$$x = \sin \varphi, \sqrt{1-x^2} = \cos \varphi,$$

и если положимъ, сверхъ того,

$$\Delta \varphi = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi},$$

то будемъ имѣть

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}, \quad v = \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta \varphi} d\varphi, \quad w = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n \sin^2 \varphi) \Delta \varphi}.$$

Разсмотримъ особенно интегралъ перваго рода. Уголъ φ называется *амплитудой* u и пишется

$$\varphi = \operatorname{am} u;$$

вслѣдствіе этого имѣемъ

$$x = \sin \operatorname{am} u, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos \operatorname{am} u, \quad \sqrt{1-k^2 x^2} = \Delta \operatorname{am} u.$$

До сихъ поръ переменную u мы рассматривали какъ функцію отъ x , но если возьмемъ теперь u за независимую переменную, то x , $\sqrt{1-x^2}$ и $\sqrt{1-k^2 x^2}$ или, что все равно, $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$ сдѣлаются функціями отъ u . Эти замѣчательныя функціи, къ которымъ мы снова возвратимся далѣе, должны быть рассматриваемы какъ *прямыя эллиптическія функціи* или главныя; относительно интеграла, изъ котораго онѣ происходятъ, онѣ представляютъ тоже, что и круговыя функціи $\sin u$, $\cos u$ относительно обратныхъ функцій $\arcsin x$, и $\arccos x$.

Когда беремъ u за независимую переменную, то эллиптическіе интегралы втораго и третьяго рода, на основаніи равенства $\frac{d\varphi}{\Delta \varphi} = du$, имѣютъ значенія

$$v = \int_0^u \sin^2 \operatorname{am} u du, \quad w = \int_0^u \frac{du}{1+n \sin^2 \operatorname{am} u}.$$

О дифференціальныхъ биномахъ.

439. Между алгебраическими дифференціалами нужно замѣтить тѣ, которымъ дали названіе *дифференціальныхъ бино-*

мовъ и которые очень часто встрѣчаются. Общій видъ этихъ дифференціаловъ есть

$$x^m (a + b x^n)^p dx,$$

гдѣ a и b обозначаютъ данныя постоянныя, а m , n , p раціональные показатели.

Можно предположить n положительнымъ, потому что данный дифференціалъ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$x^m + np (b + ax^{-n})^p dx,$$

который отъ перваго отличается только тѣмъ, что показатель x , находящійся въ скобкахъ, перемѣнилъ знакъ.

Кромѣ того можно предположить, что, m и n цѣлыя числа, потому что, если они дробныя, то, приведя ихъ къ одному знаменателю r , мы положимъ

$$x = t^r, \quad dx = r t^{r-1} dt;$$

данный дифференціалъ, черезъ это внесеніе, обратится въ

$$r t^{mr+r-1} (a + b t^{nr})^p dt;$$

онъ сохранилъ свою первоначальную форму, но только оба показателя перемѣнной дѣйствительно цѣлыя числа.

Теперь, предположимъ, что m и n два цѣлыхъ числа, изъ которыхъ второе положительное; что же касается показателя p , то онъ можетъ быть какимъ угодно раціональнымъ числомъ.

440. О случаяхъ возможности интегрированія. — Когда показатель p есть цѣлое число, то дифференціальный биномъ

$$(1) \quad dV = x^m (a + b x^n)^p dx$$

есть раціональный, и слѣдовательно его интегралъ можетъ быть выраженъ алгебраическими и логарифмическими функциями. Существуетъ еще два другихъ случая возможности интегрированія; это можно доказать непосредственно методомъ внесенія.

Положимъ

$$a + b x^n = t,$$

откуда

$$x = \left(\frac{t-a}{b} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb} \left(\frac{t-a}{b} \right)^{\frac{1}{n}-1} dt;$$

получимъ

$$dV = \frac{1}{nb} t^p \left(\frac{t-a}{b} \right)^{\frac{m+1}{n}-1} dt,$$

и этотъ дифференціалъ сдѣлается раціональнымъ отъ внесенія $t = z^r$, гдѣ r есть знаменатель p , если только

$$(2) \quad \frac{m+1}{n} = \text{цѣлому числу.}$$

Сверхъ того, мы видѣли выше, что дифференціалъ dV не измѣняется, когда перемѣщаемъ буквы a , b , и что въ немъ m и n соотвѣтственно замѣняются черезъ $m+nr$ и $-n$, это же измѣнить $\frac{m+1}{n}$ въ $-\frac{m+1+nr}{n}$; поэтому этотъ дифференціалъ опять можно привести къ раціональному виду, если только

$$(3) \quad \frac{m+1}{n} + p = \text{цѣлому числу.}$$

Когда одно изъ условій (2) и (3) выполнено, тогда интегралъ дифференціала dV выражается черезъ алгебраическія и логарифмическія функціи. Нужно замѣтить, что условія (2) и (3) исключаютъ другъ друга, когда p есть число дробное.

Упрощеніе интеграла дифференціального бинома.

441. Въ обоихъ случаяхъ возможности интегрированія, о которыхъ мы только-что говорили, интегрированіе дифференціального бинома можетъ быть произведено посредствомъ простаго внесенія; но мы придемъ къ тому же результату, если употребимъ способъ интегрированія по частямъ. Кромѣ того, когда имѣется дифференціальный биномъ, не входящій ни въ одинъ изъ тѣхъ случаевъ, о которыхъ мы говорили, то нужно постараться упростить его интегралъ, т. е. по-

стараться привести этотъ интегралъ къ простѣйшимъ видамъ, къ этому же мы придемъ посредствомъ дѣйствія, которое мы сейчасъ изложимъ.

Пусть будетъ, какъ и прежде,

$$x^m (a + bx^n)^p dx$$

данный дифференціалъ, гдѣ m и n цѣлыя числа и n положительное. Этотъ дифференціалъ есть произведеніе двухъ множителей

$$x^{m-n+1}, (a + bx^n)^p x^{n-1} dx,$$

изъ которыхъ второй есть дифференціалъ отъ

$$\frac{(a + bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb};$$

онъ также есть произведеніе двухъ множителей

$$(a + bx^n)^p, x^m dx,$$

изъ которыхъ второй есть дифференціалъ отъ

$$\frac{x^{m+1}}{m+1};$$

поэтому интегрированіе по частямъ дастъ двѣ слѣдующія формулы:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} &\int x^m (a + bx^n)^p dx \\ &= \frac{x^{m-n+1} (a + bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb} - \frac{m-n+1}{(p+1)nb} \int x^{m-n} (a + bx^n)^{p+1} dx. \end{aligned} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{aligned} &\int x^m (a + bx^n)^p dx \\ &= \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^p}{m+1} - \frac{pnb}{m+1} \int x^{m+n} (a + bx^n)^{p-1} dx, \end{aligned} \right.$$

посредствомъ которыхъ данный интегралъ приводится къ другому виду, отличающемуся только тѣмъ, что показатели m и p замѣнены соотвѣтственно черезъ $m-n$ и $p+1$, или черезъ $m+n$ и $p-1$. Мы получимъ упрощеніе, если новые показатели будутъ оба проще первоначальныхъ показателей; напротивъ, преобразование не представитъ выгоды, если, понизивъ одинъ показатель, мы увеличимъ другой. Но можно получить другую формулу, которая будетъ приложима ко всѣмъ случаямъ.

Интегралъ, входящій во вторую часть формулы (1), равенъ

$$\begin{aligned} & \int x^{m-n} (a + bx^n) (a + bx^n)^p dx \\ &= a \int x^{m-n} (a + bx^n)^p dx + b \int x^m (a + bx^n)^p dx; \end{aligned}$$

также, если въ интегралѣ второй части формулы (2) вмѣсто x^{m+n} напишемъ $\frac{x^m (a + bx^n) - ax^m}{b}$, то получимъ

$$\begin{aligned} & \int x^{m+n} (a + bx^n)^{p-1} dx \\ &= \frac{1}{b} \int x^m (a + bx^n)^p dx - \frac{a}{b} \int x^m (a + bx^n)^{p-1} dx. \end{aligned}$$

Если эти значенія подставимъ въ формулы (1) и (2), то получимъ слѣдующія два выраженія даннаго интеграла:

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & \int x^m (a + bx^n)^p dx \\ &= \frac{x^{m-n+1} (a + bx^n)^{p+1}}{(m+1+np)b} - \frac{(m+1-n)a}{(m+1+np)b} \int x^{m-n} (a + bx^n)^p dx, \end{aligned} \right.$$

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & \int x^m (a + bx^n)^p dx \\ &= \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^p}{m+1+np} + \frac{nra}{m+1+np} \int x^m (a + bx^n)^{p-1} dx \end{aligned} \right.$$

Измѣнимъ наконецъ въ формулѣ (3) m въ $m+n$ и въ формулѣ (4) p въ $p+1$; рѣшимъ потомъ каждое изъ уравненій, полученныхъ такимъ образомъ относительно интеграла, находящагося во второй части, и получимъ

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & \int x^m (a + bx^n)^p dx \\ &= \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^{p+1}}{(m+1)a} - \frac{(m+1+n+np)b}{(m+1)a} \int x^{m+n} (a + bx^n)^p dx, \end{aligned} \right.$$

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \int x^m (a + bx^n)^p dx \\ &= -\frac{x^{m+1} (a + bx^n)^{p+1}}{n(p+1)a} + \frac{m+1+n(p+1)}{n(p+1)a} \int x^m (a + bx^n)^{p+1} dx. \end{aligned} \right.$$

Формулы (3), (4), (5), (6) позволяютъ произвести во всѣхъ случаяхъ упрощеніе, которое мы имѣли въ виду. Нужно

замѣтить, что формулы (3) и (4) дѣлаются неопредѣленны, если

$$m + 1 + np = 0 \quad \text{или} \quad \frac{m + 1}{n} + p = 0;$$

но это есть второй случай возможности интегрированія, и данный интегралъ можетъ быть полученъ посредствомъ преобразованія, относящагося къ рациональному дифференціалу какъ это мы видѣли въ § 440. Если предположимъ, что число p дробное, то формула (6) никогда не сдѣлается неопредѣленной, но формула (5) перестаетъ быть опредѣленной, когда $m + 1 = 0$; здѣсь имѣемъ первый случай возможности интегрированія и значеніе даннаго интеграла получится посредствомъ метода внесенія.

442. Посмотримъ сначала, какъ можно употреблять наши формулы въ каждомъ изъ двухъ случаевъ возможности интегрированія.

1) Пусть будетъ

$$\frac{m + 1}{n} = e \quad \text{или} \quad m - ne + 1 = 0,$$

гдѣ e есть цѣлое число.

Если число n больше нуля, а число m положительное, то равнымъ образомъ и e будетъ положительное. Въ этомъ случаѣ данный интегралъ, посредствомъ формулы (3), мы приведемъ къ другимъ интеграламъ того же вида, которые получатся, если замѣнимъ показатель m черезъ

$$m - n, \quad m - 2n, \quad \dots, \quad m - (e - 1)n;$$

значеніе послѣдняго изъ этихъ интеграловъ дается той же формулой (3), которая, если замѣнимъ m черезъ $m - (e - 1)n$, и такъ какъ $m - ne + 1 = 0$, приводится къ

$$\int x^{m-(e-1)n} (a + bx^n)^p dx = \frac{(a + bx^n)^{p+1}}{(m + 1 + np)b} + \text{const.};$$

въ этомъ случаѣ данный интегралъ есть алгебраическій.

Если m отрицательное, то e также отрицательное; написавъ поэтому $-e$ вмѣсто e , будемъ имѣть

$$\frac{m+1}{n} = -e \quad \text{или} \quad m + ne + 1 = 0.$$

Въ этомъ случаѣ данный интегралъ, посредствомъ формулы (5), приведется послѣдовательно къ другимъ интеграламъ того же вида, которые получаются, если замѣнимъ m черезъ

$$m + n, \quad m + 2n, \quad \dots, \quad m + n(e - 1);$$

но послѣдній интегралъ не будетъ болѣе способенъ къ тому же упрощенію, потому что формула (5) дѣлается неопредѣленной, когда замѣняемъ m черезъ $m + ne$, вслѣдствіе предположенія $m + ne + 1 = 0$; нужно въ этомъ случаѣ прибѣгнуть къ способу внесенія § 440. Однако, можно будетъ, если это будетъ кстати, понизить показатель p , употребивъ одну изъ формулъ (4) и (6), какъ и въ томъ случаѣ, который былъ изложенъ въ § 443.

2) Предположимъ

$$\frac{m+1}{n} + p = 1 - e \quad \text{или} \quad (m + ne) + 1 + np = 0,$$

гдѣ e постоянно цѣлое число. Этотъ случай отличается отъ предъидущаго только переменнѣй обозначеній, какъ это мы видѣли въ § 440; впрочемъ, мы непосредственно видимъ, что, если $m + 1 + np$ отрицательное, формула (5) приводитъ данный интегралъ послѣдовательно къ другимъ такого же вида, которые получаются, если замѣнимъ m черезъ

$$m + n, \quad m + 2n, \quad \dots, \quad m + (e - 1)n;$$

послѣдній изъ этихъ интеграловъ дается той-же формулой (5), которая, послѣ измѣненія m въ $m + (e - 1)n$, приводится къ

$$\int x^{m+(e-1)n} (a + bx^n)^p dx = \frac{x^{m+(e-1)n+1} (a + bx^n)^p}{(m+1)a} + \text{const.}$$

Когда $m + np + 1$ положительное, тогда, если обозначимъ его значеніе черезъ ne , формула (3) приводитъ данный интегралъ къ другому виду, который отличается отъ перваго только тѣмъ, что m измѣнено въ $m - (e - 1)n$, но значеніе

этого послѣдняго интеграла должно быть отыскано посредствомъ метода внесенія.

443. Отбросимъ теперь оба случая возможности интегрированія. Формулы (3) и (5) показываютъ, что данный интегралъ можетъ быть приведенъ къ другому, который отличается отъ него только тѣмъ, что показатель m замѣненъ черезъ $m \pm in$, гдѣ i есть цѣлое положительное число, которое можно брать по произволу. Это цѣлое число можно такъ выбрать, чтобы $m \pm in$ заключалось между какими-нибудь двумя послѣдовательными кратными числами n , напри- мѣръ между нулемъ и n ; можно также опредѣлить число i такъ, чтобы $m + in$ заключалось между $-\frac{n}{2}$ и $+\frac{n}{2}$.

Потомъ мы видимъ изъ формулъ (4) и (6), что данный интегралъ можетъ быть приведенъ къ другому, отличающемуся отъ перваго только тѣмъ, что показатель p замѣненъ черезъ $p \pm j$, гдѣ j есть какое-нибудь цѣлое число. Но какое-бы ни было p , можно выбрать такъ цѣлое число j , чтобы $p \pm j$ заключалось между какими-нибудь двумя послѣдовательными цѣлыми числами, напри- мѣръ между нулемъ и 1, и если угодно такъ, чтобы $p \pm j$ заключалось между $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$.

Итакъ всѣ случаи дифференціальныхъ биномовъ, не входящихъ въ интегрируемые случаи, могутъ быть приведены къ такому, гдѣ числа p и $\frac{m}{n}$ заключаются, то и другое по произволу, между нулемъ и 1 или между $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$.

444. Показатель n , входящій въ дифференціальный биномъ, можетъ быть обращенъ въ единицу, но въ этомъ случаѣ показатель m дѣлается дробнымъ. Пусть будетъ

$$x^n = t, \quad \text{откуда} \quad x = t^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt;$$

положимъ, сверхъ того,

$$\frac{m+1}{n} - 1 = q,$$

будемъ имѣть

$$x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n} t^q (a + bt)^p dt.$$

Случаи возможности интегрированія здѣсь суть тѣ, въ которыхъ одно изъ чиселъ p , q , $p+q$ есть цѣлое, интегралъ же дифференціального бинома, не входящій въ одинъ изъ этихъ случаевъ, постоянно можно привести къ виду

$$\int t^q (a + bt)^p dt,$$

гдѣ p и q заключаются между нулемъ и 1 или между двумя какими-нибудь послѣдовательными цѣлыми числами. Можно также получить болѣе простой видъ, если положимъ

$$t = \pm \frac{a}{b} z, \quad dt = \pm \frac{a}{b} dz,$$

потому что черезъ это внесеніе интегралъ обращается въ

$$\int z^q (1 \pm z)^p dz,$$

гдѣ отброшенъ постоянный множитель.

445. П р и м ѣ р ы. — 1) Разсмотримъ сперва интегралъ $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, въ которомъ m есть цѣлое число; этотъ интегралъ принадлежитъ къ разряду тѣхъ, которые мы теперь изучаемъ; здѣсь имѣемъ $a = 1$, $b = -1$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$ и такъ какъ одно изъ чиселъ $\frac{m+1}{2}$, $\frac{m}{2}$ есть цѣлое, то условіе возможности итегрированія выполнено. Формула (3) § 441 въ этомъ случаѣ обращается въ

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1} \sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Предположимъ сначала m положительнымъ и сдѣлаемъ послѣдовательно $m = 2\mu + 1$, $m = 2\mu$, гдѣ μ есть цѣлое. Въ случаѣ m — нечетное, данный интегралъ алгебраическій и

предыдущая формула дастъ его значеніе; если же m четное, то та же формула приведетъ данный интегралъ къ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, котораго значеніе есть

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \text{const.};$$

обозначивъ черезъ C произвольную постоянную, найдемъ

$$\int \frac{x^{2\mu+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu+1} \left[x^{2\mu} + \frac{2\mu}{2\mu-1} x^{2\mu-2} + \frac{2\mu(2\mu-2)}{(2\mu-1)(2\mu-3)} x^{2\mu-4} + \dots \right. \\ \left. + \frac{2\mu(2\mu-2)\dots 2}{(2\mu-1)(2\mu-3)\dots 1} \right] + C$$

и

$$\int \frac{x^{2\mu} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu} \left[x^{2\mu-1} + \frac{2\mu-1}{2\mu-2} x^{2\mu-3} \right. \\ \left. + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)}{(2\mu-2)(2\mu-4)} x^{2\mu-5} + \dots + \frac{(2\mu-1)\dots 3}{(2\mu-2)\dots 2} x \right] \\ + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\dots 1}{(2\mu-2)(2\mu-4)\dots 2} \arcsin x + C.$$

Когда m отрицательное, тогда нужно прибѣгнуть къ формулѣ (5) § 441, или, что приведетъ къ тому же, измѣнить m въ $m+2$ въ формулѣ, написанной выше, и рѣшить ее потомъ относительно интеграла, содержащагося во второй части; такимъ образомъ имѣемъ

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{m+1} \sqrt{1-x^2}}{m+1} + \frac{m+2}{m+1} \int \frac{x^{m+2} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Мы сдѣлаемъ послѣдовательно $m = -2\mu$, $m = -(2\mu+1)$: въ первомъ случаѣ данный интегралъ есть алгебраическій; во второмъ случаѣ онъ приводится къ интегралу дифференціала $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$, который, посредствомъ внесенія, можно сдѣлать раціональнымъ, но который проще приводится къ извѣстной формѣ, если замѣнимъ x черезъ $\frac{1}{t}$; такимъ образомъ имѣемъ

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = -\log(t + \sqrt{t^2-1}) + \text{const.}$$

или

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} = \log \frac{-1 + \sqrt{1-x^2}}{x} + \text{const.}$$

На основаніи этого, означивъ черезъ C произвольную постоянную, найдемъ:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^{2\mu} \sqrt{1-x^2}} &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu-1} \left[\frac{1}{x^{2\mu-1}} + \frac{2\mu-2}{2\mu-3} \frac{1}{x^{2\mu-3}} + \dots + \frac{(2\mu-2)(2\mu-4)\dots 2}{(2\mu-3)(2\mu-5)\dots 3} \frac{1}{x} \right] + C, \\ \int \frac{dx}{x^{2\mu+1} \sqrt{1-x^2}} &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\mu} \left[\frac{1}{x^{2\mu}} + \frac{2\mu-1}{2\mu-2} \frac{1}{x^{2\mu-2}} + \dots + \frac{(2\mu-1)(2\mu-3)\dots 3}{(2\mu-2)(2\mu-4)\dots 2} \frac{1}{x^2} \right] \\ &\quad + \frac{(2\mu-1)(2\mu-2)\dots 3 \cdot 1}{2\mu(2\mu-2)\dots 1} \log \frac{-1 + \sqrt{1-x^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

2) Можно бы было такъ же поступить для опредѣленія интеграла

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

но гораздо легче получить его изъ того, который мы только-что разсмотрѣли; дѣйствительно, онъ равенъ значенію, принимаемому интеграломъ $-\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$, когда x измѣняется въ $\frac{1}{x}$ и m въ $-(m+1)$.

3) Интеграль

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

приводится также къ тому, который мы вычислили; дѣйствительно, если положимъ

$$x = at^2, \quad dx = 2at dt,$$

то будемъ имѣть

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}} = 2a^m \int \frac{t^{2m} dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

этотъ же можно включить въ первый примѣръ. Замѣтивъ, что

$$\arcsin t = \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{1}{2} \arccos \frac{a-2x}{a},$$

въ томъ случаѣ, когда m есть цѣлое положительное число, найдемъ

$$\begin{aligned} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}} = & -\frac{\sqrt{ax-x^2}}{m} \left[x^{m-1} + \frac{2m-1}{2m-2} ax^{m-2} \right. \\ & + \frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m-2)(2m-4)} a^2 x^{m-3} + \dots + \frac{(2m-1)\dots 3}{(2m-2)\dots 2} a^{m-1} \\ & \left. + \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 1}{2m(2m-2)\dots 2} a^m \arccos \frac{a-2x}{a} \right]; \end{aligned}$$

въ случаѣ же, когда m цѣлое и отрицательное, то, подставивъ $-m$ вмѣсто m , получимъ

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^m \sqrt{ax-x^2}} = & -\frac{2\sqrt{ax-x^2}}{(2m-1)a^{m+1}x^m} \left[a^m + \frac{2m-2}{2m-3} a^{m-1}x + \dots \right. \\ & \left. + \frac{(2m-2)\dots 2}{(2m-3)\dots 1} ax^{m-1} \right] + C. \end{aligned}$$

О нѣкоторыхъ дифференціальныхъ биномахъ, которыхъ интеграль приводится къ эллиптическимъ функціямъ.

446. Дифференціальный биномъ, который былъ упрощенъ посредствомъ метода, только-что нами изложеннаго, иногда способенъ къ новому упрощенію; но ничего нельзя сказать вообще въ этомъ отношеніи; мы поэтому ограничимся здѣсь тѣмъ, что дадимъ два примѣра, въ которыхъ интеграль даннаго дифференціала приводится къ эллиптическимъ функціямъ.

Разсмотримъ сначала дифференціаль

$$(1) \quad dV = \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}};$$

можно написать

$$dV = \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^3 + \frac{1}{x^3}}},$$

и естественно испробовать нераціональную подстановку

$$(2) \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = 2t^{-\frac{3}{2}},$$

гдѣ t есть новая переменная, уничтожающаяся для $x = 0$ и для $x = \infty$, отсюда имѣемъ

$$(3) \quad x^3 - \frac{1}{x^3} = -2t^{-\frac{3}{2}} \sqrt{1-t^3};$$

пока переменная x положительная, нужно брать множитель

$t^{-\frac{3}{2}}$ съ знакомъ $+$; но нужно дать радикалу $\sqrt{1-t^3}$ знакъ $+$, если $x < 1$ и знакъ $-$ въ противномъ случаѣ. Дифференцирование уравненія (2) даетъ

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) \frac{dx}{x} = -t^{-\frac{5}{2}} dt;$$

отсюда, на основаніи формулы (3),

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t \sqrt{1-t^3}};$$

поэтому имѣемъ

$$(4) \quad dV = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}};$$

слѣдовательно интегралъ V , посредствомъ метода § 429, можетъ быть приведенъ къ эллиптическимъ функціямъ.

Разсмотримъ еще дифференціальный биномъ

$$(5) \quad dV = \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}.$$

Здѣсь можно съ выгодой употребить подстановку

$$(6) \quad \sqrt[3]{1-x^3} = (1-x)t;$$

дифференцирование даетъ

$$\frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1-x}{1+x} dt = dV;$$

сверхъ того формула (6), возвышенная въ кубъ, даетъ еще

$$t^3 = \frac{\frac{3}{4}(1+x)^2 + \frac{1}{4}(1-x)^2}{(1-x)^2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{1-x}{1+x} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4t^3-1}},$$

и слѣдовательно

$$(7) \quad dV = \sqrt{3} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 1}};$$

интеграль V , помощію метода § 429, опять можетъ быть приведенъ къ эллиптическимъ функціямъ.

Интегрированіе нѣкоторыхъ трансцендентныхъ дифференціаловъ.

447. Когда трансцендентный дифференціаль, интеграль котораго отыскивается, можетъ быть приведенъ черезъ внесеніе къ алгебраическому виду, то надлежитъ произвести это приведеніе. Такимъ образомъ, если f означаетъ алгебраическую функцію, интегралы

$$\begin{aligned} \int f(e^{mx}) e^{mx} dx, & \quad \int f(\log x) \frac{dx}{x}, \\ \int f(\sin x) \cos x dx, & \quad \int f(\cos x) \sin x dx, \quad \int f(\tan x) \frac{dx}{\cos^2 x}, \\ \int f(\arcsin x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & \quad \int f(\arctan x) \frac{dx}{1+x^2}, \dots \end{aligned}$$

приведутся къ алгебраическимъ дифференціаламъ, если положимъ

$$t = e^{mx}, \log x, \sin x, \cos x, \tan x, \arcsin x, \arctan x, \dots$$

448. Пусть будутъ z трансцендентная функція переменнѣй x и X какая-нибудь функція той-же переменнѣй; если n есть цѣлое положительное число и если умѣемъ найти функціи

$$X_1, X_2, \dots, X_{n+1},$$

имѣющія соотвѣтственно производными

$$X, X_1 \frac{dz}{dx}, \dots, X_n \frac{dz}{dx},$$

то можно будетъ также опредѣлить интеграль

$$\int X z^n dx.$$

Интегрированіе по частямъ дѣйствительно даетъ

$$\begin{aligned}
\int X z^n dx &= \int z^n \frac{dX_1}{dx} dx = X_1 z^n - n \int X_1 z^{n-1} \frac{dz}{dx} dx, \\
\int X_1 z^{n-1} \frac{dz}{dx} dx &= \int z^{n-1} \frac{dX_2}{dx} dx \\
&= X_2 z^{n-1} - (n-1) \int X_2 z^{n-2} \frac{dz}{dx} dx, \\
&\dots\dots\dots, \\
\int X_{i-1} z^{n-i+1} \frac{dz}{dx} dx &= \int z^{n-i+1} \frac{dX_i}{dx} dx \\
&= X_i z^{n-i+1} - (n-i+1) \int X_i z^{n-i} \frac{dz}{dx} dx,
\end{aligned}$$

откуда имѣемъ

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \int X z^n dx &= X_1 z^n - n X_2 z^{n-1} + n(n-1) X_3 z^{n-2} - \dots \\ &\pm n(n-1) \dots (n-i+2) X_i z^{n-i+1} \\ &\mp n(n-1) \dots (n-i+1) \int X_i z^{n-i} \frac{dz}{dx} dx. \end{aligned} \right.$$

Если n есть цѣлое положительное число, то сдѣлаемъ $i = n+1$ и мы получимъ

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \int X z^n dx &= X_1 z^n - n X_2 z^{n-1} + n(n-1) X_3 z^{n-2} - \dots \\ &\pm n(n-1) \dots 1 \cdot X_{n+1} + \text{const.} \end{aligned} \right.$$

это же доказываетъ изложенное предложеніе

449. П р и м ѣ р ы. — Разсмотримъ интегралъ

$$\int x^{m-1} \log^n x dx,$$

гдѣ n означаетъ цѣлое и положительное число; здѣсь имѣемъ

$$z = \log x, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}, \quad X = x^{m-1},$$

и мы можемъ сдѣлать

$$X_1 = \frac{x^m}{m}, \quad X_2 = \frac{x^m}{m^2}, \quad X_3 = \frac{x^m}{m^3}, \quad \dots;$$

поэтому будемъ имѣть

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int x^{m-1} \log^n x dx \\ &= \frac{x^m}{m} \left[\log^n x - \frac{n}{m} \log^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{m^2} \log^{n-2} x - \dots \pm \frac{n(n-1) \dots 1}{m^n} \right] + \text{const.} \end{aligned} \right.$$

Если напишемъ e^x вместо x , $e^x dx$ вместо dx , то предыдущая формула дастъ

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int e^{mx} x^n dx \\ &= \frac{e^{mx}}{m} \left[x^n - \frac{n}{m} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2} x^{n-2} - \dots \pm \frac{n(n-1) \dots 1}{m^n} \right] + \text{const.} \end{aligned} \right.$$

Этотъ результатъ отличается только видомъ отъ того, который былъ полученъ въ § 415.

2) Пусть будетъ теперь интегралъ

$$\int (\arcsin x)^n dx,$$

гдѣ n есть цѣлое положительное число; здѣсь имѣемъ

$$z = \arcsin x, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad X = 1,$$

и мы можемъ сдѣлать

$$X_1 = x, \quad X_2 = -\sqrt{1-x^2}, \quad X_3 = -x, \quad X_4 = +\sqrt{1-x^2},$$

послѣ чего тѣ же самыя значенія будутъ повторяться периодически. Поэтому имѣемъ

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int (\arcsin x)^n dx \\ &= x [(\arcsin x)^n - n(n-1)(\arcsin x)^{n-2} + \dots] \\ &+ \sqrt{1-x^2} [n(\arcsin x)^{n-1} - n(n-1)(n-2)(\arcsin x)^{n-3} + \dots] \\ &+ \text{const.} \end{aligned} \right.$$

Если въ этой формулѣ (5) напишемъ x , $\sin x$, $\cos x$ вместо $\arcsin x$, x , $\sqrt{1-x^2}$, то будемъ имѣть

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int x^n \cos x dx = \sin x [x^n - n(n-1)x^{n-2} + \dots] \\ &+ \cos x [n x^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} - \dots] + \text{const.} \end{aligned} \right.$$

450. Возвратимся къ формулѣ (4) предыдущаго параграфа. Дифференціалы обѣихъ частей тождественно равны

между собой, какая ни была бы постоянная m , и тождество совершенно не изменится, если предположимъ, что эта постоянная мнимая. Пусть поэтому $m = a + b \sqrt{-1}$, имѣемъ

$$\begin{aligned} \int x^n e^{(a+b\sqrt{-1})x} dx \\ = \frac{e^{(a+b\sqrt{-1})x}}{a+b\sqrt{-1}} \left[x^n - \frac{nx^{n-1}}{a+b\sqrt{-1}} + \dots \pm \frac{n(n-1)\dots 1}{(a+b\sqrt{-1})^n} \right] + \text{const.} \end{aligned}$$

Замѣнивъ $e^{(a+b\sqrt{-1})x}$ его значеніемъ

$$e^{ax}(\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx),$$

и сравнивъ потомъ въ той и другой частяхъ дѣйствительные члены и члены содержащіе множитель $\sqrt{-1}$, найдемъ значеніе двухъ интеграловъ

$$\int x^n e^{ax} \cos bx dx, \quad \int x^n e^{ax} \sin bx dx,$$

въ томъ случаѣ, когда n есть цѣлое положительное число. Если сдѣлаемъ

$$a + b\sqrt{-1} = \rho (\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha),$$

то также найдемъ

$$\begin{aligned} \int x^n e^{ax} \cos bx dx \\ = e^{ax} \left[\frac{1}{\rho} x^n \cos (bx - \alpha) - \frac{n}{\rho^2} x^{n-1} \cos (bx - 2\alpha) + \dots \right. \\ \left. \pm \frac{n(n-1)\dots 1}{\rho^{n+1}} \cos (bx - \overline{n+1} \alpha) \right] + \text{const.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^n e^{ax} \sin bx dx \\ = e^{ax} \left[\frac{1}{\rho} x^n \sin (bx - \alpha) - \frac{n}{\rho^2} x^{n-1} \sin (bx - 2\alpha) + \dots \right. \\ \left. \pm \frac{n(n-1)\dots 1}{\rho^{n+1}} \sin (bx - \overline{n+1} \alpha) \right] + \text{const.} \end{aligned}$$

Важно замѣтить случай $n=0$; имѣемъ

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{1}{\rho} e^{ax} \cos (bx - \alpha) + \text{const.}, \\ \int e^{ax} \sin bx dx &= \frac{1}{\rho} e^{ax} \sin (bx - \alpha) + \text{const.}, \end{aligned}$$

или

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} + \text{const.},$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} + \text{const.}$$

Мы получимъ прямо эти двѣ формулы, интегрируя по частямъ два дифференціала $e^{ax} \cos bx \, dx$, $e^{ax} \sin bx \, dx$; потому что, поступивъ такимъ образомъ, мы образуемъ два соотношенія между интегралами этихъ дифференціаловъ, изъ которыхъ можно вывести только-что найденныя выраженія.

451. Методъ § 448 и болѣе общій процессъ интегрированія по частямъ часто позволяютъ нѣкоторые интегралы, которыхъ значеніе не выражается алгебраическими, логарифмическими и т. д. функціями, привести къ болѣе простому виду.

Разсмотримъ, на примѣръ, интегралъ

$$\int \frac{e^{-x}}{x^n} \, dx,$$

въ которомъ n означаетъ цѣлое положительное число. Такъ какъ $\frac{dx}{x^n}$ есть дифференціалъ отъ $-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$, то интегрированіе по частямъ дастъ

$$\int \frac{e^{-x}}{x^n} \, dx = -\frac{e^{-x}}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{e^{-x}}{x^{n-1}} \, dx;$$

посредствомъ этой формулы, данный интегралъ приведетъ къ

$$\int \frac{e^{-x}}{x} \, dx.$$

Интегрированіе дифференціаловъ вида $P \, dx$, гдѣ P есть произведеніе синусовъ или косинусовъ линейныхъ функцій отъ x .

452. Дифференціалы этого вида встрѣчаются въ большомъ числѣ вопросовъ, и нетрудно найти ихъ интегралы. Пусть будетъ сначала

$$P = \cos(ax + b) \cos(a'x + b'),$$

можно написать

$$P = \frac{1}{2} \cos [(a + a')x + (b + b')] + \frac{1}{2} \cos [(a - a')x + (b - b')];$$

поэтому, если $a + a'$ и $a - a'$ суть количества отличныя отъ нуля, будемъ имѣть

$$\int P dx = \frac{\sin [(a + a')x + (b + b')]}{2(a + a')} + \frac{\sin [(a - a')x + (b - b')]}{2(a - a')} + \text{const.},$$

а въ случаѣ $a' = a$

$$\int P dx = \frac{\sin (2ax + b + b')}{4a} + \frac{x \cos (b - b')}{2} + \text{const.}$$

Мы поступимъ такъ же и въ томъ случаѣ, когда P есть произведение

$$F = \cos (ax + b) \cos (a'x + b') \cos (a''x + b'') \dots$$

какого угодно числа n множителей. Если сдѣлаемъ

$$\alpha = a \pm a' \pm a'' \pm \dots, \quad \beta = b \pm b' \pm b'' \pm \dots,$$

то произведение P будетъ сумма 2^{n-1} членовъ, опредѣляемыхъ выраженіемъ

$$\frac{1}{2^{n-1}} \cos (\alpha x + \beta);$$

поэтому будемъ имѣть

$$\int P dx = \frac{1}{2^{n-1}} \sum \frac{\sin (\alpha x + \beta)}{\alpha} + \text{const.},$$

гдѣ членъ $\frac{\sin (\alpha x + \beta)}{\alpha}$ долженъ быть замѣненъ черезъ $x \cos \beta$, когда α есть нуль.

Всѣхъ множителей произведенія P мы означили косинусами, потому что каждый такой множитель какъ $\sin(ax + b)$ можетъ быть замѣненъ черезъ $\cos\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right)$.

453. Разсмотримъ, на примѣръ, интегралъ

$$\int \cos^n x dx,$$

гдѣ n есть цѣлое положительное число. Если n четное, то (см. мой *Курсъ Тригонометрии*),

$$2^{n-1} \cos^n x = \cos nx + \frac{n}{1} \cos (n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos (n-4)x + \dots \\ + \frac{1}{2} \frac{n(n-1) \dots \left(\frac{n}{2} + 1\right)}{1 \cdot 2 \dots \frac{n}{2}};$$

если же n нечетное, то

$$2^{n-1} \cos^n x = \cos nx + \frac{n}{1} \cos (n-2)x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos (n-4)x + \dots \\ + \frac{n(n-1) \dots \left(\frac{n-1}{2} + 2\right)}{1 \cdot 2 \dots \frac{n-1}{2}} \cos x.$$

Поэтому для случая n четнаго имѣемъ

$$2^{n-1} \int \cos^n x dx = \frac{\sin nx}{n} + \frac{n}{1} \frac{\sin (n-2)x}{n-2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{\sin (n-4)x}{n-4} + \dots \\ + \frac{n(n-1) \dots \left(\frac{n}{2} + 1\right)}{1 \cdot 2 \dots \frac{n}{2}} \frac{x}{2} + \text{const.},$$

и для n нечетнаго,

$$2^{n-1} \int \cos^n x dx = \frac{\sin nx}{n} + \frac{n}{1} \frac{\sin (n-2)x}{n-2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{\sin (n-4)x}{n-4} + \dots \\ + \frac{n(n-1) \dots \left(\frac{n-1}{2} + 2\right)}{1 \cdot 2 \dots \frac{n-1}{2}} \sin x + \text{const.}$$

Если въ этихъ формулахъ x измѣнимъ въ $\frac{\pi}{2} - x$, то получимъ значеніе $\int \sin^n x dx$; ниже мы найдемъ новые виды тѣхъ же самыхъ интеграловъ.

Интегрированіе дифференціаловъ вида $\sin^m x \cos^n x dx$.

454. Дифференціалъ, о которомъ здѣсь идетъ рѣчь, можетъ быть приведенъ къ дифференціальному биному; дѣй-

ствительно, если положимъ

$$\sin x = t^{\frac{1}{2}}, \quad \cos x = (1 - t)^{\frac{1}{2}}, \quad dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} (1 - t)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

то получимъ

$$\frac{1}{2} t^{\frac{m-1}{2}} (1 - t)^{\frac{n-1}{2}} dt;$$

этотъ дифференціалъ можетъ быть интегрированъ, когда одно изъ чиселъ

$$\frac{m-1}{2}, \quad \frac{n-1}{2}, \quad \frac{m+n}{2}$$

есть цѣлое, а въ противномъ случаѣ, какъ мы видѣли въ § 443, онъ можетъ быть упрощенъ.

Мы придемъ къ тѣмъ же результатамъ, если приложимъ къ дифференціалу $\sin^m \cos^n x \, dx$ правило интегрированія по частямъ, а такъ какъ выраженія этого рода часто встрѣчаются, то будетъ небезполезно изложить это вычисленіе.

Данный дифференціалъ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$\cos^{n-1} x \times \sin^m x \cos x \, dx;$$

второй множитель есть дифференціалъ отъ $\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$; слѣдовательно, интегрированіе по частямъ дастъ

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \sin^m x \cos^n x \, dx \\ &= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx; \end{aligned} \right.$$

замѣнимъ подъ знакомъ \int , въ интегралѣ второй части, множитель $\sin^2 x$ равнымъ его множителемъ $1 - \cos^2 x$, тогда этотъ интегралъ сдѣлается разностію двухъ слѣдующихъ:

$$\int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx - \int \sin^m x \cos^n x \, dx;$$

перенеся второй членъ въ первую часть и умноживъ потомъ

обѣ части на $\frac{m+1}{m+n}$, получимъ

$$(2) \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx.$$

Если измѣнимъ x въ $\frac{\pi}{2} - x$, dx въ $-dx$, если перемѣстимъ буквы m и n , потомъ умножимъ обѣ части на -1 , то опять будемъ имѣть

$$(3) \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx.$$

Наконецъ, если подставимъ вмѣсто n въ уравненіи (2) $n+2$, вмѣсто m въ уравненіи (3) $m+2$ и если рѣшимъ каждое уравненіе относительно интеграла, находящагося во второй части, то будемъ имѣть двѣ новыя формулы

$$(4) \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n+2} x dx,$$

$$(5) \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^n x dx.$$

Формулы (4) и (5) ничего не выражаютъ, первая когда $n = -1$, вторая когда $m = -1$; но въ томъ и другомъ случаѣ условіе интегрируемости выполнено. Формулы (2) и (3) также ничего не выражаютъ, когда $m+n=0$, это же отвѣчаетъ опять случаю возможности интегрированія; но тогда формула (1) снабжаетъ насъ упрощеніемъ; она дѣйствительно для $n = -m$ обращается въ

$$(6) \int \tan^m x dx = \frac{\tan^{m+1} x}{m+1} - \int \tan^{m+2} x dx,$$

или, написавъ $m-2$ вмѣсто m ,

$$(7) \int \tan^m x dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x dx.$$

Оставивъ въ сторонѣ случаи возможности интегрированія, которые постоянно приводятся, когда это необходимо, къ случаю рациональнаго дифференціала, мы видимъ, что формулы (2) и (4) позволяютъ уменьшить или увеличить показатель n на какое угодно четное число; равнымъ обра-

зомъ посредствомъ формулъ (3) и (5) можно уменьшить или увеличить показатель m какимъ угодно четнымъ числомъ; поэтому возможно привести оба показателя къ тому, чтобы они заключались между предѣлами -1 и $+1$ или 0 и 2 .

Въ частномъ случаѣ, когда показатели m и n цѣлыя числа, можно будетъ такъ произвести упрощеніе каждаго показателя, чтобы онъ не былъ равенъ -1 или равенъ другому показателю съ обратнымъ знакомъ; когда этотъ послѣдній случай имѣетъ мѣсто, то можно прибѣгнуть къ формуламъ (6) и (7), посредствомъ которыхъ можно продолжить упрощеніе до тѣхъ поръ, пока оба показателя будутъ нули или будутъ равны $+1$ и -1 . Мы прибавимъ, что формулы (6) и (7) могутъ быть получены непосредственно, въ виду того, что

$$\int \operatorname{tang}^m x \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tang}^{m+1} x}{m+1} + \text{const.}$$

455. Итакъ, мы видимъ, что интеграль

$$\int \sin^m x \cos^n x dx,$$

въ которомъ m и n цѣлыя положительныя или отрицательныя числа, посредствомъ нашихъ формулъ постоянно приводится къ одному изъ слѣдующихъ

$$\int dx, \quad \int \sin x dx, \quad \int \cos x dx, \quad \int \sin x \cos x dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}, \quad \int \operatorname{tang} x dx, \quad \int \cot x dx.$$

Три первые имѣютъ значеніями

$$x + C, \quad -\cos x + C, \quad \sin x + C,$$

гдѣ C есть постоянная; четвертый равенъ

$$\frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{4} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C,$$

гдѣ C есть всегда произвольная постоянная.

Потомъ имѣемъ

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \int \frac{\frac{1}{2} dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x \operatorname{tang} \frac{1}{2} x},$$

и слѣдовательно

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} x + C,$$

это же согласуется съ тѣмъ, что было сказано въ § 44.

Измѣнивъ въ предыдущей формулѣ x въ $x + \frac{\pi}{2}$, потомъ въ $2x$, получимъ

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x \right) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \log \operatorname{tang} x + C.$$

Наконецъ имѣемъ

$$\int \operatorname{tang} x \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = -\log \cos x + C,$$

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \log \sin x + C.$$

456. Если число m есть нуль, то формула (3) § 454 дастъ въ случаѣ m четнаго и положительнаго

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \, dx = & -\frac{\cos x}{m} \left[\sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2} \sin^{m-3} x \right. \\ & + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)} \sin^{m-5} x + \dots + \frac{(m-1)(m-3)\dots 3 \cdot 1}{(m-2)(m-4)\dots 4 \cdot 2} \sin x \\ & \left. + \frac{(m-1)(m-3)\dots 3 \cdot 1}{(m-2)(m-4)\dots 4 \cdot 2} \frac{x}{m} + \operatorname{const.}, \right. \end{aligned}$$

и въ случаѣ m нечетнаго

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \, dx = & -\frac{\cos x}{m} \left[\sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2} \sin^{m-3} x + \dots \right. \\ & \left. + \frac{(m-1)(m-3)\dots 2}{(m-2)(m-4)\dots 1} \right] + \operatorname{const.} \end{aligned}$$

Измѣнивъ x въ $\frac{\pi}{2} + x$, мы будемъ имѣть двѣ другія формулы, которыя дадутъ значеніе

$$\int \cos^m x \, dx,$$

для случая m четнаго и для m нечетнаго. Нужно замѣтить, что эти формулы могутъ быть выведены непосредственно

изъ формулы § 445, если замѣнимъ въ нихъ x черезъ $\sin x$ или черезъ $\cos x$.

457. Интегралъ

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$$

непосредственно приводится къ одному изъ тѣхъ, о которыхъ только-что шла рѣчь, если положимъ

$$a = r \sin \alpha, \quad b = r \cos \alpha;$$

дѣйствительно, въ этомъ случаѣ данный интегралъ обратится въ

$$\frac{1}{r} \int \frac{dx}{\cos (x - \alpha)}.$$

Можно также опредѣлить болѣе общій интегралъ

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c},$$

потому что, сдѣлавъ

$$a = r \sin \alpha, \quad b = r \cos \alpha, \quad \frac{c - r}{c + r} = \pm k^2,$$

будемъ имѣть

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{\pm 2k}{c - r} \int \frac{\frac{k dx}{2 \cos^2 \frac{1}{2} (x - \alpha)}}{1 \pm k^2 \tan^2 \frac{1}{2} (x - \alpha)},$$

или, положивъ $k \tan \frac{1}{2} (x - \alpha) = t$,

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{\pm 2k}{c - r} \int \frac{dt}{1 \pm t^2};$$

интегралъ же второй части этой формулы имѣетъ значеніемъ $\arctan t$ или $\log \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$, смотря по тому, будетъ-ли $\pm k^2$ положительное или отрицательное.

ГЛАВА II.

ТЕОРІЯ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ И ИНТЕГРАЛОВЪ ФУНКЦІЙ НѢСКОЛЬКИХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ.

Основные свойства определенных интеграловъ.

458. Пусть будетъ $f(x)$ функція дѣйствительной переменнѣй x , остающаяся непрерывной, когда x измѣняется между предѣлами x_0 и X , и $F(x)$ одно изъ значеній неопредѣленнаго интеграла $\int f(x) dx$. Разность $F(x) - F(x_0)$ есть также одно изъ значеній того же интеграла, именно то, которое уничтожается для $x = x_0$; это значеніе равно $F(X) - F(x_0)$ для $x = X$, и мы согласились въ этомъ случаѣ обозначать его выраженіемъ $\int_{x_0}^X f(x) dx$, которое мы назвали определеннымъ интеграломъ. Такимъ образомъ имѣемъ

$$\int_{x_0}^X f(x) dx = F(X) - F(x_0);$$

мы знаемъ, что интегралъ, содержащійся въ этой формулѣ, равенъ предѣлу, къ которому стремится сумма значеній, принимаемыхъ дифференціаломъ $f(x)dx$, когда x измѣняется отъ x_0 до X , принимая послѣдовательныя бесконечно-малыя приращенія равныя dx .

Отсюда вытекаетъ нѣсколько основныхъ свойствъ, которыя мы сейчасъ изложимъ.

459. Т Е О Р Е М А I. — *Определенный интегралъ измѣняетъ знакъ, сохраняя то же абсолютное значеніе, когда перемѣстимъ предѣлы интеграла.*

Это вытекаетъ непосредственно изъ формулы § 458, которой вторая часть измѣняетъ только знакъ, когда перемѣстимъ буквы x_0 , X .

Это же свойство также можно доказать, рассматривая интегралы

$$\int_{x_0}^X f(x) dx, \int_X^{x_0} f(x) dx$$

какъ предѣлы суммъ бесконечно малыхъ элементовъ. Соотвѣтствующіе элементы $f(x)dx$ двухъ рассматриваемыхъ суммъ имѣютъ одно и тоже абсолютное значеніе, но они имѣютъ противные знаки, потому что, если x измѣняется отъ x_0 до X въ одномъ случаѣ и отъ X до x_0 въ другомъ, dx положительный для одной изъ двухъ суммъ и отрицательный для другой.

460. Т Е О Р Е М А II. — *Если*

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X$$

такія значенія x , что $f(x)$ остается вполнѣ определенной и непрерывной, когда x измѣняется отъ одного изъ этихъ значеній до слѣдующаго, то

$$\int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^X f(x) dx.$$

Дѣйствительно, эта формула есть ничто иное, какъ тождественное равенство

$$\begin{aligned} F(X) - F(x_0) \\ = [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \dots + [F(X) - F(x_{n-1})]. \end{aligned}$$

Можно также вывести формулу, о которой идетъ рѣчь, рассматривая опредѣленные интегралы, какъ предѣлы суммъ. Если x_0, x_1, \dots, X расположены по ихъ числовымъ величинамъ, то обѣ части нашей формулы равны предѣлу одной и той-же суммы бесконечно-малыхъ элементовъ. То же самое будетъ, когда x_0, x_1, \dots, X не расположены по ихъ

числовымъ величинамъ, потому что бесконечно-малые элементы второй суммы, которые не находятся въ первой, попарно равны и противныхъ знаковъ.

461. Т Е О Р Е М А III. — Пусть $\varphi(x)$ и $f(x)$ две функции, остающіяся непрерывными для значений x , заключенныхъ между предѣлами x_0 и $X > x_0$; если для всѣхъ значений x имѣемъ $f(x) > \varphi(x)$, то также будемъ имѣть

$$\int_{x_0}^X f(x) dx > \int_{x_0}^X \varphi(x) dx.$$

Дѣйствительно, по предположенію, функция $f(x) - \varphi(x)$ положительная для значений x , заключенныхъ между x_0 и X ; слѣдовательно, функция

$$\int_{x_0}^X [f(x) - \varphi(x)] dx,$$

которой она есть производная, есть возрастающая. Но эта функция уничтожается для $x = x_0$, поэтому она положительна для $x = X$, и мы имѣемъ

$$\int_{x_0}^X [f(x) - \varphi(x)] dx > 0 \text{ или } \int_{x_0}^X f(x) dx - \int_{x_0}^X \varphi(x) dx > 0.$$

Мы скорѣе придемъ къ этому результату, если станемъ разсматривать два данные интеграла какъ предѣлы суммъ; дѣйствительно, каждый элементъ $f(x) dx$ первой суммы больше соотвѣтствующаго элемента $\varphi(x) dx$ второй; поэтому вторая меньше первой.

С л ѣ д с т в і е. — Если функция $f(x)$ заключается между двумя другими функциями $\varphi(x)$, $\psi(x)$ для всѣхъ значений x , заключенныхъ между x_0 и X , и если эти функции непрерывны отъ $x = x_0$ до $x = X$, то мы получимъ два предѣла интеграла $\int_{x_0}^X f(x) dx$, если возьмемъ $\int_{x_0}^X \varphi(x) dx$ и $\int_{x_0}^X \psi(x) dx$.

462. П р и м ѣ р ъ. — Пусть будетъ интегралъ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}}$, въ

которомъ предположимъ, что $m > 2$. Очевидно, что этотъ интегралъ будетъ увеличиваться, если будемъ уменьшать m , и онъ будетъ уменьшаться, если станемъ увеличивать m ; поэтому онъ заключается между

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx \text{ и } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

т. е. между

$$\frac{1}{2} = 0,5 \text{ и } \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = 0,523 \dots$$

463. Т Е О Р Е М А IV. — Пусть u и v две функции отъ x ; если функция v сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ, когда x измѣняется отъ x_0 до X , то будемъ имѣть

$$\int_{x_0}^X uv \, dx = U \int_{x_0}^X v \, dx,$$

гдѣ U означаетъ количество, заключенное между наибольшимъ и наименьшимъ изъ значеній, принимаемыхъ u , когда x измѣняется отъ x_0 до X .

Дѣйствительно, пусть A и B наименьшее и наибольшее изъ значеній u ; если v положительное, постоянно будемъ имѣть

$$Av < uv < Bv,$$

и, если v отрицательное,

$$Av > uv < Bv;$$

поэтому интегралъ $\int_{x_0}^X uv \, dx$ заключается между $\int_{x_0}^X Av \, dx$ и $\int_{x_0}^X Bv \, dx$, т. е. между двумя произведеніями, которыя мы получимъ, если умножимъ A и B на интегралъ $\int_{x_0}^X v \, dx$; отсюда дѣйствительно вытекаетъ равенство, которое требовалось доказать.

Случай, когда предѣлы интеграловъ суть безконечности.

464. Разсуждая о свойствахъ опредѣленныхъ интеграловъ $\int_{x_0}^X f(x) dx$, мы предполагали, что функція $f(x)$ непрерывна для значеній x , заключенныхъ между x_0 и X ; эти предѣлы сверхъ того суть какія-нибудь опредѣленные количества. Мы сохранимъ здѣсь тоже самое предположеніе; но предположимъ, что x_0 и X переменныя, и мы сейчасъ разберемъ случай, въ которомъ тотъ или другой изъ этихъ предѣловъ обращается въ безконечность.

Интеграль дифференціала $f(x) dx$, взятый между двумя безконечными предѣлами или между однимъ конечнымъ предѣломъ и другимъ безконечнымъ, можетъ имѣть конечное значеніе; онъ также можетъ быть безконечностію или неопредѣленностію; мы сейчасъ дадимъ примѣры на эти различные случаи.

1) Разсмотримъ сначала дифференціаль $e^{-x} dx$; если возьмемъ интеграль отъ $x = x_0$ до $x = X$, то получимъ

$$\int_{x_0}^X e^{-x} dx = e^{-x_0} - e^{-X},$$

если же X заставимъ стремиться къ $+\infty$, то будемъ имѣть

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-x} dx = e^{-x_0};$$

заставивъ напротивъ x_0 стремиться къ $-\infty$, получимъ

$$\int_{-\infty}^X e^{-x} dx = \infty.$$

2) Пусть будетъ теперь дифференціаль $\frac{dx}{1+x^2}$; интеграль, взятый отъ $x = x_0$ до $x = X$, есть

$$\int_{x_0}^X \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } X - \text{arc tang } x_0,$$

если же X заставимъ стремиться къ $+\infty$, то будемъ имѣть

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang } x_0;$$

заставивъ потомъ x_0 стремиться къ $-\infty$, будемъ имѣть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

3) Пусть будетъ еще дифференціалъ $\cos x \, dx$; имѣемъ

$$\int_0^X \cos x \, dx = \sin X,$$

и очевидно, этотъ интегралъ перестаетъ быть опредѣленнымъ, когда предполагаемъ $X = \infty$.

465. Нельзя указать на правило, которое позволяло-бы опредѣлить общимъ способомъ, остается ли интегралъ $\int_{x_0}^X f(x) \, dx$ конечнымъ и опредѣленнымъ, когда тотъ или другой изъ предѣловъ стремится къ безконечности. Вотъ однако теорема, дающая средство рѣшить вопросъ въ большей части случаевъ.

ТЕОРЕМА. — Пусть $f(x)$ функція, остающаяся конечной для значеній x , заключенныхъ между x_0 и $+\infty$. Если для значеній x , превышающихъ нѣкоторое количество α , абсолютное значеніе произведенія $x^n f(x)$ постоянно меньше даннаго числа K и если показатель n больше 1, то интегралъ $\int_{x_0}^X f(x) \, dx$ будетъ стремиться къ конечному предѣлу, когда заставимъ X стремиться къ $+\infty$.

Напротивъ, если для значеній x , превышающихъ количество α , функція $f(x)$ сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ, и если абсолютное значеніе произведенія $x^n f(x)$ никогда не бываетъ меньше даннаго числа K , причемъ показатель n равенъ или меньше 1, то интегралъ $\int_{x_0}^X f(x) \, dx$ обращается въ безконечность въ одно время съ X .

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\int_{x_0}^{X_i} f(x) \, dx = \int_{x_0}^{\alpha} f(x) \, dx + \int_{\alpha}^X f(x) \, dx;$$

первый изъ интеграловъ второй части имѣетъ опредѣленное значеніе, поэтому достаточно разсмотрѣть только второй.

1) Если абсолютное значеніе произведенія $x^n f(x)$ для значеній x , заключенныхъ между α и $+\infty$, меньше K , то, очевидно, абсолютное значеніе интеграла $\int_{\alpha}^X f(x) dx$ также меньше

$$\int_{\alpha}^X \frac{K}{x^n} dx = \frac{K}{n-1} \left(\frac{1}{\alpha^{n-1}} - \frac{1}{X^{n-1}} \right),$$

количества, которое въ предположеніи $n > 1$, для $X = \infty$, приводится къ $\frac{K}{(n-1)\alpha^{n-1}}$. Поэтому интегралъ $\int_{\alpha}^X f(x) dx$ остается конечнымъ для $X = \infty$, а слѣдовательно и данный.

2) Если абсолютное значеніе произведенія $x^n f(x)$ не меньше даннаго числа K для всѣхъ значеній x , заключенныхъ между α и β и если сверхъ того функція $f(x)$ сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ, то абсолютное значеніе интеграла $\int_{x_0}^X f(x) dx$ больше $\int_{\alpha}^X \frac{K}{x^n} dx$. Этотъ послѣдній интегралъ имѣетъ значеніемъ

$$\frac{K}{1-n} (X^{1-n} - \alpha^{1-n}),$$

когда $n < 1$, и

$$K \log \frac{X}{\alpha},$$

когда $n = 1$; въ томъ и другомъ случаѣ для $X = \infty$ онъ обращается въ безконечность; поэтому то же самое относится и къ данному интегралу.

Замѣчаніе. — Предъидущая теорема прилагается къ тому случаю, когда заставляемъ X стремиться къ $-\infty$, потому что, измѣнивъ x въ $-x$, получимъ

$$\int_{x_0}^X f(x) dx = - \int_{-x_0}^{-X} f(-x) dx,$$

это же даетъ возможность заставить высшій предѣлъ X стремиться къ $+\infty$.

Та же самая теорема прилагается еще и въ томъ случаѣ, когда заставляемъ низшій предѣлъ x_0 стремиться къ $\pm\infty$, потому что оба предѣла могутъ быть перемѣщены.

466. П р и м ѣ р ѣ . — Рассмотримъ интегралъ $\int_{x_0}^X e^{-x^2} dx$. Пусть будетъ n положительное, какъ угодно большое число, K какое-нибудь данное положительное количество. Абсолютное значеніе произведенія $x^n e^{-x^2}$ стремится къ нулю, когда x стремится къ $\pm\infty$; поэтому x можно дать такое значеніе α , чтобы абсолютное значеніе произведенія $x^n e^{-x^2}$ отъ $x = +\alpha$ до $x = +\infty$ или отъ $x = -\alpha$ до $x = -\infty$ было меньше K . Отсюда слѣдуетъ, что данный интегралъ сохраняетъ конечное значеніе $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$, когда заставляемъ стремиться X къ $+\infty$ и x_0 къ $-\infty$.

Вообще, если $f(x)$ есть функція, остающаяся конечной для всѣхъ значеній x , заключенныхъ между $-\infty$ и $+\infty$, то интегралъ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} dx$ будетъ имѣть конечное значеніе.

Случай, когда функція, находящаяся подъ знакомъ \int , для предѣловъ интеграла обращается въ безконечность.

467. Предположимъ, что функція $f(x)$ остается конечной для значеній x , заключенныхъ между x_0 и X , но что она обращается въ безконечность для $x = X$. Въ этомъ случаѣ, если означимъ черезъ ε количество одного знака съ $X - x_0$, то интегралъ $\int_{x_0}^X f(x) dx$ есть предѣлъ, къ которому стремится

$$\int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x) dx,$$

когда ε стремится къ нулю. Можетъ случиться, что предѣ-

иду́щій интеграль возрастаетъ сверхъ всякаго предѣла, тогда данный есть безконечность.

Равнымъ образомъ, если функція $f(x)$ обращается въ безконечность для $x = x_0$ и если означимъ черезъ ε количество одного знака съ $X - x_0$, то интеграль $\int_{x_0}^X f(x) dx$ будетъ предѣль, къ которому стремится интеграль $\int_{x_0 + \varepsilon}^X f(x) dx$, когда ε стремится къ нулю.

Мы сейчасъ докажемъ теорему аналогичную той, которая была доказана въ § 465 и посредствомъ которой можно узнать въ нѣкоторыхъ случаяхъ, сохраняетъ ли интеграль конечное значеніе, когда функція, умножающая dx , подъ знакомъ \int обращается въ безконечность для предѣловъ интеграла.

468. Т Е О Р Е М А. — Пусть $f(x)$ функція, остающаяся конечной для значеній x , заключенныхъ между x_0 и X , но обращающаяся въ безконечность для $x = X$. Если мы можемъ взять такое количество α между x_0 и X , чтобы для значеній x , заключенныхъ между α и X , абсолютное значеніе произведенія $(X - x)^n f(x)$ или $(x - X)^n f(x)$ было меньше опредѣленнаго количества K , причемъ число n было бы меньше 1, то интеграль $\int_{x_0}^X f(x) dx$ будетъ имѣть конечное значеніе.

Напротивъ, если можемъ взять такое количество α между x_0 и X , чтобы для значеній x , заключенныхъ между α и X , произведеніе $(X - x)^n f(x)$ или $(x - X)^n f(x)$ сохраняло одинъ и тотъ-же знакъ и было постоянно больше опредѣленнаго количества K , причемъ число n было бы равно 1 или больше 1, то интеграль $\int_{x_0}^X f(x) dx$ будетъ безконечность.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$\int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{x_0}^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^X f(x) dx;$$

первый изъ интеграловъ второй части имѣеть конечное значеніе, поэтому достаточно разсмотрѣть второй интеграль.

1) Предположимъ, что абсолютное значеніе произведенія $[\pm(X-x)]^n f(x)$ отъ $x = \alpha$ до $x = X$ меньше опредѣленнаго количества K и что число n сверхъ того меньше 1; очевидно, абсолютное значеніе интеграла $\int_{\alpha}^X f(x) dx$ будетъ меньше абсолютнаго значенія $\int_{\alpha}^X \frac{K dx}{[\pm(X-x)]^n}$. Но неопредѣленный интеграль отъ $\frac{K dx}{[\pm(X-x)]^n}$ имѣеть значеніемъ $\frac{\mp K [\pm(X-\alpha)]^{1-n}}{1-n} + \text{const.}$, поэтому, такъ какъ $n < 1$, имѣемъ

$$\int_{\alpha}^X \frac{K dx}{(X-x)^n} = \frac{\mp K [\pm(X-\alpha)]^{1-n}}{1-n},$$

откуда слѣдуетъ, что данный интеграль имѣеть конечное значеніе.

2) Предположимъ, что произведеніе $[\pm(X-x)]^n f(x)$ отъ $x = \alpha$ до $x = X$ сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ и что его абсолютное значеніе больше опредѣленнаго количества K , число же n сверхъ того равно или больше 1. Абсолютное значеніе интеграла $\int_{\alpha}^x f(x) dx$ будетъ больше абсолютнаго значенія интеграла $\int_{\alpha}^x \frac{K dx}{[\pm(X-x)]^n}$; когда $n > 1$, имѣемъ

$$\int_{\alpha}^x \frac{K dx}{[\pm(X-x)]^n} = \frac{(\pm 1)^n K}{1-n} \left[\frac{1}{(X-x)^{n-1}} - \frac{1}{(X-\alpha)^{n-1}} \right]$$

и, когда $n = 1$,

$$\int_{\alpha}^x \frac{K dx}{X-x} = K \log \frac{X-\alpha}{X-x};$$

вторая часть каждой изъ предъидущихъ формулъ для $x = X$ обращается въ безконечность, а поэтому интеграль $\int_{\alpha}^X f(x) dx$ есть безконечность, а также и данный.

Такъ какъ можно нарушить порядокъ предѣловъ инте-

грала, то предъидущая теорема прилагается и къ тому случаю, когда $f(x)$ обращается въ безконечность для $x = x_0$.

469. П р и м ѣ р ы. — 1) Рассмотримъ интеграль

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Здѣсь имѣемъ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $(1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$; такъ какъ x положительное, то это произведение меньше 1; отсюда заключаемъ, что интеграль имѣетъ конечное значеніе. Мы напередъ знали, что это такъ ибо данный интеграль есть значеніе $\arcsin x$ для $x = 1$, и слѣдовательно этотъ интеграль равенъ $\frac{\pi}{2}$.

2) Рассмотримъ интеграль

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

гдѣ k^2 обозначаетъ положительное количество, меньшее 1. Здѣсь имѣемъ

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}};$$

вторая часть этой формулы меньше $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ для всѣхъ значеній x , заключенныхъ между 0 и 1; поэтому данный интеграль имѣетъ конечное значеніе.

3) Рассмотримъ интеграль

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2},$$

къ которому приводится предъидущій, когда $k^2 = 1$. Здѣсь имѣемъ $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, и

$$(1-x) f(x) = \frac{1}{1+x};$$

вторая часть этой формулы больше $\frac{1}{2}$ для всѣхъ значеній x ,

заклученныхъ между 0 и 1; поэтому данный интеграль есть безконечность. Впрочемъ, этотъ интеграль есть значеніе, принимаемое для $x = 1$ функціей

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x} = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

и мы видимъ въ этомъ случаѣ, что значеніе ея дѣйствительно есть безконечность.

4) Разсмотримъ еще интеграль

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x^n} dx,$$

гдѣ n означаетъ число, заключающееся между 0 и 1. Имѣемъ $f(x) = \frac{\log x}{x^n}$, и эта функція для $x = 0$ есть безконечность. Означивъ черезъ ε число, заключающееся между 0 и $1-n$, будемъ имѣть

$$x^{n+\varepsilon} f(x) = x^\varepsilon \log x;$$

но когда x стремится къ нулю, произведеніе $x^\varepsilon \log x$ также стремится къ нулю, поэтому можно взять такое количество α , чтобы произведеніе $x^{n+\varepsilon} f(x)$ отъ $x=0$ до $x=\alpha$ было бы меньше какого угодно даннаго количества k ; сверхъ того $n+\varepsilon$ меньше 1; поэтому данный интеграль имѣетъ конечное значеніе.

Случай, когда функція, содержащаяся подъ знакомъ \int , обращается въ безконечность между предѣлами интегрированія.

470. Когда функція $f(x)$ дѣлается безконечностію для значенія x_1 переменнй x , заключеннаго между x_0 и $X > x_0$, тогда нужно разсматривать интеграль $\int_{x_0}^X f(x) dx$ какъ предѣль, къ которому стремится сумма

$$\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_1+\eta}^X f(x) dx,$$

когда ε и η стремятся къ предѣлу нуль. Такой интеграль

можетъ имѣть конечное и опредѣленное значеніе; онъ можетъ также быть безконечностію или неопредѣленностію.

Разсмотримъ, напримѣръ, интеграль

$$\int_{-\alpha}^{+a} \frac{dx}{x^n},$$

гдѣ a и α означаютъ положительныя числа и гдѣ n есть показатель, заключающійся между 0 и 1, вида $\frac{2\mu+1}{2\nu+1}$, гдѣ μ и ν цѣлыя числа; будемъ имѣть

$$\int_{-\alpha}^{+a} \frac{dx}{x^n} = \lim \left(\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^n} + \int_{+\eta}^{+a} \frac{dx}{x^n} \right);$$

но

$$\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^n} = \frac{\varepsilon^{1-n} - \alpha^{1-n}}{1-n}, \quad \int_{+\eta}^{+a} \frac{dx}{x^n} = \frac{a^{1-n} - \eta^{1-n}}{1-n},$$

поэтому

$$\int_{-\alpha}^{+a} \frac{dx}{x^n} = \lim \left(\frac{a^{1-n} - \alpha^{1-n} + \varepsilon^{1-n} - \eta^{1-n}}{1-n} \right),$$

ε^{1-n} и η^{1-n} въ предѣлѣ уничтожаются; данный интеграль поэтому имѣетъ конечное и опредѣленное значеніе, именно:

$$\int_{-\alpha}^{+a} \frac{dx}{x^n} = \frac{a^{1-n} - \alpha^{1-n}}{1-n}.$$

Если число n имѣетъ видъ $\frac{2\mu}{2\nu+1}$, гдѣ μ и ν суть цѣлыя числа, и если n больше 1, то будемъ имѣть

$$\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} - \frac{1}{\alpha^{n-1}} \right),$$

$$\int_{+\eta}^{+a} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{\eta^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}} \right);$$

сумма этихъ двухъ интеграловъ, т. е.

$$\frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} + \frac{1}{\eta^{n-1}} \right) - \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{\alpha^{n-1}} + \frac{1}{a^{n-1}} \right),$$

возрастаетъ сверхъ всякаго предѣла, когда положительныя

безконечно-малыя ε , η стремятся къ нулю; поэтому въ этомъ случаѣ данный интегралъ есть безконечность.

Разсмотримъ еще случай $n=1$; данный интегралъ есть

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{dx}{x} = \lim \left[\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\eta}^{+\alpha} \frac{dx}{x} \right].$$

Сдѣлавъ же $x = -t$, $dx = -dt$, будемъ имѣть

$$\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \int_{\alpha}^{\varepsilon} \frac{dt}{t} = \log \frac{\varepsilon}{\alpha};$$

сверхъ того

$$\int_{+\eta}^{+\alpha} \frac{dx}{x} = \log \frac{\alpha}{\eta};$$

поэтому

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{dx}{x} = \log \frac{\alpha\varepsilon}{\alpha\eta} = \log \frac{\alpha}{\alpha} + \log \frac{\varepsilon}{\eta}.$$

Предѣлъ отношенія безконечно-малыхъ ε , η есть неопредѣленность; поэтому интегралъ $\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{dx}{x}$ есть также неопредѣленность.

471. Возвратимся снова къ общему выраженію

$$(1) \quad \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_1+\eta}^X f(x) dx;$$

если предположимъ $\eta = \varepsilon$, то получимъ

$$(2) \quad \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_1+\varepsilon}^X f(x) dx.$$

Предѣлъ, къ которому стремится эта сумма, когда заставляемъ ε стремиться къ нулю, Коши назвалъ *главнымъ значеніемъ* опредѣленнаго интеграла $\int_{x_0}^X f(x) dx$. Такимъ образомъ *главное значеніе* интеграла $\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{dx}{x}$, который мы только что разсмотрѣли, есть $\log \frac{\alpha}{\alpha}$.

Если интеграль $\int_{x_0}^X f(x) dx$ имѣетъ конечное и опредѣ-
ленное значеніе, то очевидно, что это значеніе будетъ пре-
дѣль, къ которому стремится сумма

$$(3) \quad \int_{x_0}^{x_1 - \mu\epsilon} f(x) dx + \int_{x_1 + \nu\epsilon}^X f(x) dx,$$

когда ϵ стремится къ нулю, какія бы ни были положительныя
числа μ и ν ; поэтому разность суммъ (2) и (3), именно:

$$(4) \quad \int_{x_1 - \epsilon}^{x_1 - \mu\epsilon} f(x) dx - \int_{x_1 + \epsilon}^{x_1 + \nu\epsilon} f(x) dx$$

должна стремиться къ нулю вмѣстѣ съ ϵ , какія ни были бы
и ν . Если же можемъ доказать, что это не такъ, то мы
заклучимъ, что данный интеграль не имѣетъ конечнаго и
опредѣленнаго значенія. Интегралы

$$\int_{x_1 - \epsilon}^{x_1 - \mu\epsilon} f(x) dx, \quad \int_{x_1 + \epsilon}^{x_1 + \nu\epsilon} f(x) dx,$$

гдѣ ϵ означаетъ бесконечно-малую, были названы Коши
особенными опредѣленными интегралами. Разсматривая эти
интегралы, можемъ придти къ результату, полученному въ
§ 466.

Вообще, если функція $f(x)$ обращается въ бесконечность
для значеній x_1, x_2, \dots, x_i , заключающихся между x_0 и X ,
то $\int_{x_0}^X f(x) dx$ мы должны разсматривать какъ предѣль, къ
которому стремится сумма

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1 - \epsilon_1} f(x) dx + \int_{x_1 + \eta_1}^{x_2 - \epsilon_2} f(x) dx + \dots \\ & + \int_{x_{i-1} + \eta_{i-1}}^{x_i - \epsilon_i} f(x) dx + \int_{x_i + \eta_i}^X f(x) dx, \end{aligned}$$

когда количества ϵ и η стремятся къ нулю. Этотъ случай
впрочемъ "приводится къ предъидущему, если раздѣлимъ
промежутокъ отъ x_0 до X на нѣсколько другихъ.

Новое доказательство формулы Тейлора.

472. Разсмотрѣніе опредѣленныхъ интеграловъ снабжаетъ очень простымъ и очень изящнымъ доказательствомъ формулы Тейлора.

Пусть будутъ x и h два данныя количества, t переменная и $f(x+h-t)$ функція, которую мы предположимъ для значеній t , заключенныхъ между 0 и h , непрерывной вмѣстѣ съ n ея первыми производными. Если означимъ черезъ $f'(x+h-t)$, $f''(x+h-t)$, \dots послѣдовательныя производныя функціи $f(x+h-t)$, взятая относительно переменной $x+h-t$, то интегрированіе по частямъ дастъ

$$\int_0^t f'(x+h-t) dt = t f'(x+h-t) + \int_0^t f''(x+h-t) t dt,$$

$$\int_0^t f''(x+h-t) t dt = \frac{t^2}{2} f''(x+h-t) + \int_0^t f'''(x+h-t) \frac{t^2}{2} dt,$$

$$\int_0^t f'''(x+h-t) \frac{t^2}{2} dt = \frac{t^3}{2 \cdot 3} f'''(x+h-t) + \int_0^t f^{IV}(x+h-t) \frac{t^3}{2 \cdot 3} dt,$$

.....

$$\int_0^t f^{(n-1)}(x+h-t) \frac{t^{n-2}}{2 \cdot 3 \dots (n-2)} dt$$

$$= \frac{t^{n-1}}{2 \cdot 3 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x+h-t) + \int_0^t f^{(n)}(x+h-t) \frac{t^{n-1}}{2 \cdot 3 \dots (n-1)} dt.$$

Сложимъ всё эти равенства, потомъ сдѣлаемъ $t = h$ и замѣтимъ, что

$$\int_0^h f'(x+h-t) dt = f(x+h) - f(x),$$

получимъ

$$(1) f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x) + R_n,$$

гдѣ

$$(2) R_n = \int_0^h f^{(n)}(x+h-t) \frac{t^{n-1}}{2 \cdot 3 \dots (n-1)} dt.$$

Формула (1) приводитъ къ ряду Тейлора, когда условія, относящіяся къ непрерывности, выполнены и когда остатокъ R_n стремится къ нулю по мѣрѣ того, какъ n возрастаетъ. Формула (2) даетъ выраженіе R_n , которое часто бываетъ полезно, и изъ него мы можемъ вывести то, которое было выведено въ § 106. Дѣйствительно, изъ формулы (2) имѣемъ (§ 463)

$$R_n = U \int_0^h \frac{t^{n-1}}{2 \cdot 3 \dots (n-1)} dt = \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} U,$$

гдѣ U есть количество, заключающееся между самымъ большимъ и самымъ меньшимъ изъ значеній, принимаемыхъ $f^n(x+h-t)$, когда t измѣняется отъ 0 до h . Производная, о которой идетъ рѣчь, непрерывна, поэтому она приметъ значеніе U для значенія $(1-\theta)h$ количества t , заключающагося между 0 и h ; слѣдовательно имѣемъ

$$R_n = \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^n(n + \theta h).$$

Интегрированіе помощью рядовъ.

473. Т Е О Р Е М А I. — Пусть будетъ $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ рядъ, котораго члены суть непрерывныя функціи перемѣнной x . Предположимъ рядъ сходящимся для всѣхъ значеній x , заключенныхъ между x_0 и X , назовемъ черезъ $f(x)$ сумму ряда и черезъ r_n значеніе остатка, который получимъ, когда остановимъ рядъ на n членъ; предположимъ сверхъ того, что мы можемъ найти такое число, чтобы для всѣхъ значеній n , превышающихъ это число, остатокъ r_n былъ меньше какого-нибудь числа ε , даннаго напередъ; тогда рядъ

$$\int_{x_0}^x u_0 dx + \int_{x_0}^x u_1 dx + \int_{x_0}^x u_2 dx + \dots$$

будетъ также сходящимся для всѣхъ значеній x , заключающихся между x_0 и X ; кромѣ того онъ будетъ имѣть суммой интегралъ $\int_{x_0}^x f(x) dx$.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ x заключается между x_0 и X , то положимъ

$$(1) \quad f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + r_n;$$

будемъ имѣть

$$(2) \quad \int_{x_0}^x f(x) dx = \int_{x_0}^x u_0 dx + \int_{x_0}^x u_1 dx + \dots + \int_{x_0}^x u_{n-1} dx + \int_{x_0}^x r_n dx;$$

но (§ 463)

$$\int_{x_0}^x r_n dx = \rho_n \int_{x_0}^x dx = \rho_n (x - x_0),$$

гдѣ ρ_n есть количество, заключающееся между самымъ меньшимъ и самымъ большимъ изъ значеній, принимаемыхъ r_n , когда x измѣняется отъ x_0 до X ; сверхъ того r_n по предположенію уничтожается для $n = \infty$; поэтому тоже относится и къ ρ_n , и мы слѣдовательно имѣемъ

$$\lim \int_{x_0}^x r_n dx = 0 \quad \text{для } n = \infty;$$

поэтому

$$(3) \quad \int_{x_0}^x f(x) dx = \int_{x_0}^x u_0 dx + \int_{x_0}^x u_1 dx + \int_{x_0}^x u_2 dx + \dots,$$

что и доказываетъ изложенное предположеніе.

474. Т Е О Р Е М А II. — Пусть будетъ $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ рядъ, котораго члены суть функции переменнѣй x непрерывныя отъ $x = x_0$ до $x = X$, и который приближается къ определенному предѣлу $f(x)$. Если рядъ

$$\frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \dots$$

имѣетъ выполненными условія теоремы I, то онъ имѣетъ суммой $f'(x)$.

Дѣйствительно, такъ какъ рядъ $\frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \dots$ предполагается сходящимся, то означимъ черезъ $F(x)$ сумму, къ которой онъ стремится; будемъ имѣть

$$F(x) = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \dots,$$

откуда, на основаніи предыдущей теоремы.

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = \int_{x_0}^x \frac{du_0}{dx} dx + \int_{x_0}^x \frac{du_1}{dx} dx + \dots$$

или означивъ черезъ $u_n^{(0)}$ значеніе u_n для $x = x_0$, будемъ имѣть

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = (u_0 - u_0^{(0)}) + (u_1 - u_1^{(0)}) + \dots$$

Но рядъ $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ стремится къ предѣлу $f(x)$; по-
этому имѣемъ

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = f(x) + \text{const.},$$

а взявъ дифференціалъ,

$$F(x) = f'(x),$$

что и доказываетъ изложенную теорему.

475. Теорема I даетъ средство выразить помощью рядовъ интегралы дифференціаловъ.

Предположимъ сначала, что для значеній x , заключенныхъ между 0 и X , функція $f(x)$ разлагается въ сходящійся рядъ по формулѣ Маклорена; будемъ имѣть

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \dots$$

Если обѣ части этой формулы умножимъ на dx и если потомъ возьмемъ интегралъ между предѣлами 0 и x , то на основаніи предыдущей теоремы будемъ имѣть

$$\int_0^x f(x) dx = \frac{x}{1} f(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f'(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f''(0) + \dots,$$

это же есть ничто иное, какъ формула Маклорена, приложенная къ функціи $\int_0^x f(x) dx$.

Вообще, если функція $f(x)$ опредѣляется только помощью

разложениа ея въ рядъ, такъ что

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots,$$

то не только будемъ имѣть (§ 473)

$$\int_0^x f(x) dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots,$$

но сверхъ того $\int_0^x f(x) dx$ будетъ въ одно время съ $f(x)$ непрерывная функція отъ x . Это вытекаетъ изъ слѣдующаго предложенія:

Если рядъ, расположенный по цѣлымъ и восходящимъ степенямъ дѣйствительной или мнимой перемѣнной z , сходящійся для всѣхъ значеній z , которыхъ модуль не превышаетъ R , то онъ имѣетъ суммой функцію отъ z , которая непрерывна для тѣхъ же значеній z .

Въ самомъ дѣлѣ, означимъ черезъ $f(z)$ сумму сходящагося ряда

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots,$$

черезъ $\varphi_n(z)$ сумму n первыхъ членовъ и черезъ $\psi_n(z)$ остатокъ. Можно взять такое значеніе n , чтобы для этого значенія и для большихъ значеній модуль $\psi_n(z)$ оставался меньше даннаго количества k . Для этого достаточно n взять такъ, чтобы

$$\alpha_n R'^n + \alpha_{n+1} R'^{n+1} + \dots < k,$$

гдѣ α_n есть модуль a_n и R' какое-нибудь значеніе меньше R ; это условіе можетъ быть выполнено, потому что, такъ какъ данный рядъ сходящійся, когда $\text{mod. } z = R$, модули его членовъ образуютъ сходящійся рядъ, когда $\text{mod. } z < R$.

Для всякаго модуля $\rho < R'$ тѣмъ болѣе будемъ имѣть

$$\alpha_n \rho^n + \alpha_{n+1} \rho^{n+1} + \dots < k,$$

а такъ какъ модуль $\psi_n(z)$ меньше этой суммы, то онъ будетъ меньше k .

Теперь пусть ε и $z+h$ два значенія перемѣнной, имѣю-

ція модули, заключающіеся между нулемъ и R' . Имѣемъ

$$f(z+h) - f(z) = [\varphi_n(z+h) - \varphi_n(z)] + [\psi_n(z+h) - \psi_n(z)];$$

такъ какъ полиномъ $\varphi_n(z)$ есть непрерывная функція отъ z , то можно предположить модуль h достаточно малымъ для того, чтобы модуль $\varphi_n(z+h) - \varphi_n(z)$ былъ меньше k . Сверхъ того модули $\psi_n(z+h)$, $\psi_n(z)$ сами собой меньше k ; слѣдовательно модуль

$$f(z+h) - f(z)$$

будетъ меньше $3k$; поэтому этотъ модуль есть бесконечно-малая въ одно время съ модулемъ h ; другими словами, функція $f(z)$ непрерывна.

Эта теорема, которой доказательство мы заимствовали у Бріо и Буке, будетъ дальше намъ служить для доказательства, согласно этимъ геометрамъ, одного важнаго свойства.

476. П р и м ѣ р ы. — 1) Отъ дѣленія имѣемъ

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots,$$

рядъ второй части сходящійся для значеній x , заключенныхъ между -1 и $+1$; если умножимъ данныя равенства на dx и возьмемъ интегралъ отъ $x = 0$, то будемъ имѣть

$$\arctang x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

для всѣхъ значеній x , заключенныхъ между -1 и $+1$. Эта формула существуетъ также для $x = \pm 1$ (§ 121), потому что рядъ второй части остается сходящимся; такимъ образомъ имѣемъ

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

2) По формулѣ бинома, для всѣхъ значеній x , заключенныхъ между -1 и $+1$, имѣемъ

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots;$$

умноживъ обѣ части на dx и взявъ потомъ интегралъ отъ

$x=0$, получимъ

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

формулу, существующую для значеній x , заключенныхъ между -1 и $+1$, а также для $x = \pm 1$. Сдѣлавъ $x = 1$, будемъ имѣть

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{7} + \dots$$

477. Часто случается, что функція $f(x)$ разлагается различными способами въ сходящійся рядъ; въ этомъ случаѣ нужно выбрать такое разложеніе, которое представляетъ въ данномъ вопросѣ большія выгоды. Разсмотримъ, на примѣръ, эллиптическій интегралъ перваго рода

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}},$$

гдѣ радикалъ взять съ знакомъ $+$ и гдѣ k означаетъ количество меньшее единицы. По формулѣ бинোма имѣемъ

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 x^2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 x^6 + \dots;$$

умноживъ обѣ части на $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и взявъ потомъ интегралъ отъ $x=0$, получимъ

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}} &= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} k^2 \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \int_0^x \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dots \end{aligned}$$

Также для эллиптического интеграла втораго рода имѣемъ

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}} &= \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} k^2 \int_0^x \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \int_0^x \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dots \end{aligned}$$

Каждый изъ интеграловъ, входящихъ въ предыдущія формулы, можетъ быть опредѣленъ помощью метода § 445. Ряды, находящіеся въ этихъ формулахъ, очень сходящи, когда k маленькая дробь; но когда k мало отличается отъ единицы, то необходимо употребить другія разложенія.

Дифференцирование интеграловъ.

478. Опредѣленный интегралъ

$$u = \int_{x_0}^X f(x) dx,$$

въ которомъ предѣлы x_0 и X рассматриваются какъ переменныя, есть функція этихъ предѣловъ. Очевидно, можно написать

$$u = \int_{x_0}^X f(X) dX, \text{ или } u = - \int_X^{x_0} f(x_0) dx_0,$$

потому что означеніе, посредствомъ котораго представляемъ переменную подъ знакомъ \int , безразлично какое ни было-бы. Въ этомъ случаѣ мы видимъ, что частные дифференціалы отъ u относительно X и x_0 соотвѣтственно суть

$$f(X) dX, \quad - f(x_0) dx_0.$$

Если поэтому u рассматриваемъ какъ функцію только переменныхъ X и x_0 , то будемъ имѣть

$$(1) \quad du = f(X) dX - f(x_0) dx_0,$$

эта формула прилагается къ случаю, гдѣ X и x_0 независимыя переменныя, и къ тому, гдѣ X и x_0 функціи одной или нѣсколькихъ другихъ переменныхъ.

Если функція $f(x)$ содержитъ количества α, β, \dots , рассматриваемыя какъ переменныя, то нужно будетъ прибавить ко второй части формулы (1) частные дифференціалы, относящіеся къ этимъ переменнымъ, и мы будемъ имѣть

$$(2) \quad du = f(X) dX - f(x_0) dx_0 + \frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial u}{\partial \beta} d\beta + \dots;$$

намъ остается показать, какъ получается каждая изъ частныхъ производныхъ $\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \dots$, которыя должны быть взяты такъ, какъ бы x_0 и X независѣли отъ переменныхъ α, β, \dots .

Дифференцирование подъ знакомъ \int .

479. Разсмотримъ интегралъ :

$$u = \int_{x_0}^X f(x) dx,$$

и предположимъ, что функція $f(x)$ содержитъ количество α , рассматриваемое какъ переменная. Мы намѣреваемся отыскать производную $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, поэтому на основаніи предъидущаго нужно предположить предѣлы x_0 и X независящими отъ α .

Чтобы сдѣлать очевидной переменную α , означимъ черезъ $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$ функцію $f(x)$ и ея производную $\frac{\partial f(x)}{\partial \alpha}$. Дадимъ α приращеніе $\Delta \alpha$ и означимъ черезъ Δu соотвѣтствующее приращеніе u ; будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \Delta u &= \int_{x_0}^X F(\alpha + \Delta \alpha) dx - \int_{x_0}^X F(\alpha) dx \\ &= \int_{x_0}^X [F(\alpha + \Delta \alpha) - F(\alpha)] dx. \end{aligned}$$

Если функція $f(x)$ или $F(\alpha)$ остается непрерывной между предѣлами интегрированія, то (§ 14)

$$F(\alpha + \Delta \alpha) - F(\alpha) = \Delta \alpha F'(\alpha + \theta \Delta \alpha),$$

гдѣ θ есть количество, заключающееся между 0 и 1; слѣдовательно въ этомъ предположеніи имѣемъ

$$\frac{\Delta u}{\Delta \alpha} = \int_{x_0}^X F'(\alpha + \theta \Delta \alpha) dx,$$

переходя же къ предѣлу, для $\Delta \alpha = 0$ имѣемъ

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^X F'(\alpha) dx$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^X \frac{\partial f(x)}{\partial \alpha} dx.$$

Если поэтому функція $f(x)$ остается конечной между предѣлами интегрированія, то мы получимъ дифференціалъ $\frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha$, если произведемъ дифференцирование относительно α подъ знакомъ \int . Но нужно замѣтить, что это правило можетъ быть не вѣрно, если, противно нашему предположенію, функція $f(x)$ обращается въ безконечность между предѣлами x_0 и X .

480. Можетъ случиться, что намъ нужно взять дифференціалъ неопредѣленного интеграла относительно перемѣнной, отличной отъ той, къ которой относится интегрирование; этотъ случай приводится непосредственно къ предъидущему. Пусть будетъ, въ самомъ дѣлѣ, неопредѣленный интегралъ $\int f(x) dx$; можно написать

$$\int f(x) dx = \int_{x_0}^x f(x) dx + C;$$

пусть α одна изъ перемѣнныхъ, отъ которой зависитъ $f(x)$, будемъ имѣть

$$\frac{\partial \int f(x) dx}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^x \frac{\partial f(x)}{\partial \alpha} dx + \frac{\partial C}{\partial \alpha};$$

но такъ какъ C есть произвольная постоянная, относительно x , то тоже относится и къ $\frac{\partial C}{\partial \alpha}$; поэтому имѣемъ

$$\frac{\partial \int f(x) dx}{\partial \alpha} = \int \frac{\partial f(x)}{\partial \alpha} dx.$$

Интегрирование подъ знакомъ \int .

481. Разсмотримъ опредѣленный интегралъ

$$u = \int_{x_0}^X f(x, \alpha) dx,$$

въ которомъ $f(x, \alpha)$ означаетъ функцію переменныхъ x и α и въ которомъ предѣлы x_0 и X не зависятъ отъ α . Количество v зависитъ отъ x_0 , отъ X и отъ α ; но мы его станемъ разсматривать только какъ функцію отъ α . Положимъ сначала

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha) d\alpha = F(x, \alpha),$$

гдѣ нижній предѣлъ α_0 есть какое-нибудь определенное количество, потомъ

$$v = \int_{x_0}^X F(x, \alpha) dx.$$

На основаніи того, что мы видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, если функція $F(x, \alpha)$ остается непрерывной между предѣлами интегрированія, будемъ имѣть

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^X \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx = \int_{x_0}^X f(x, \alpha) dx$$

или

$$u = \frac{\partial v}{\partial \alpha},$$

а такъ какъ v уничтожается для $\alpha = \alpha_0$, то будетъ имѣть

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} u d\alpha = v,$$

т. е.

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \left[\int_{x_0}^X f(x, \alpha) dx \right] d\alpha = \int_{x_0}^X \left[\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha) d\alpha \right] dx.$$

Эта формула выражаетъ слѣдующее предложеніе:

Чтобы взять интегралъ между предѣлами α_0 , а произведенія интеграла $\int_{x_0}^X f(x, \alpha) dx$ на $d\alpha$, достаточно умножить его подъ знакомъ \int на $d\alpha$ и интегрировать произведеніе между предѣлами α_0 , α .

Но, мы должны повторить, это требуетъ, чтобы функція $\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha) d\alpha$ оставалась непрерывной между предѣлами x_0, X переменнѣй x .

То же предложеніе можно выразить еще такъ:

Если требуется интегрировать дифференціалъ

$$f(x, \alpha) dx d\alpha$$

между соответствующими предѣлами x_0, X и α_0, α , то интегрированіе можно произвести въ какомъ угодно порядкѣ, если только предѣлы каждой переменнѣй α и x не зависятъ отъ другой переменнѣй.

Дальше мы увидимъ геометрическое объясненіе только-что полученнаго нами результата.

Объ интегрированіи дифференціаловъ, зависящихъ отъ нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ.

482. Интегрированіе дифференціаловъ, зависящихъ отъ нѣсколькихъ переменныхъ, легко приводится, какъ мы сейчасъ покажемъ, посредствомъ теоремы § 479, къ интегрированію дифференціаловъ одной только переменнѣй.

Всякая функція нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ x, y, z, \dots, u, v имѣетъ дифференціалъ вида

$$1) \quad X dx + Y dy + Z dz + \dots + U du + V dv,$$

гдѣ X, Y, \dots, U, V функціи переменныхъ x, y, z, \dots, u, v . Но обратное не имѣетъ мѣста, и чтобы предъидущее уравненіе было дифференціаломъ функціи переменныхъ x, y, z, \dots, u, v или, какъ говорятъ также, было *точнымъ дифференціаломъ*, необходимо, чтобы были выполнены нѣкоторыя условія. Дѣйствительно, если выраженіе (1) есть дифференціалъ функціи Ω , то будемъ имѣть

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = Z \quad \dots, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u} = U, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = V;$$

разсмотримъ два какія-нибудь изъ этихъ уравненій, напри-мѣръ:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = Y;$$

взявъ дифференціалъ перваго относительно y и втораго — относительно x , будемъ имѣть

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

и слѣдовательно

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Отсюда заключаемъ, что если выраженіе (1) есть точный дифференціалъ, то необходимо имѣемъ

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \dots, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \dots, \quad \frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u}, \end{array} \right.$$

Число условій (2) равно числу сочетаній переменныхъ x, y, z, \dots по два; когда имѣемъ только двѣ независимыя переменныя, x и y , тогда выраженіе (1) есть

$$X dx + Y dy,$$

и условія (2) приводятся только къ одному

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

483. Мы сейчас докажемъ, что, обратно, когда условія (2) выполнены, то существуетъ такая функція Ω независимыхъ переменныхъ x, y, z, \dots, u, v , что

$$(3) \quad d\Omega = X dx + Y dy + Z dz + \dots + U du + V dv.$$

Общее выраженіе всѣхъ функцій Ω , допускающихъ X частной производной, относительно x есть

$$(4) \quad \Omega = \int_{x_0}^x X dx + \Omega_1,$$

гдѣ Ω_1 означаетъ какую-нибудь функцію переменныхъ y, z, \dots, u, v , не содержащую x .

Нужно такъ опредѣлить Ω_1 , чтобы

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = Z, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u} = U, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial v} = V.$$

По теоремѣ § 479 имѣемъ

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial X}{\partial y} dx + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y},$$

подставивъ же вмѣсто $\frac{\partial X}{\partial y}$ тождественно равную функцію $\frac{\partial Y}{\partial y}$, получимъ

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} = Y - Y_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y},$$

гдѣ Y_1 означаетъ функцію Y , въ которой x замѣнено черезъ x_0 . Такимъ образомъ, чтобы $\frac{\partial \Omega}{\partial y}$ обратилъ въ Y , нужно и достаточно, чтобы $\frac{\partial \Omega_1}{\partial y} = Y_1$. Функція Ω , опредѣляемая формулой (4), удовлетворитъ уравненію (3), если функція Ω_1 , зависящая только отъ переменныхъ y, z, \dots, u, v , удовлетворяетъ уравненію

$$5) \quad d\Omega_1 = Y_1 dy + Z_1 dz + \dots + U_1 du + V_1 dv,$$

гдѣ $Y_1, Z_1, \dots, U_1, V_1$ суть значенія, принимаемыя Y, Z, \dots, U, V для $x = x_0$.

Поступивъ съ формулой (5) такъ же, какъ мы поступили съ формулой (1), найдемъ

$$\Omega_1 = \int_{y_0}^y Y_1 dy + \Omega_2,$$

и

$$d\Omega_2 = Z_2 dz + \dots + U_2 du + V_2 dv,$$

гдѣ Z_2, \dots, U_2, V_2 суть значенія, принимаемыя Z, \dots, U, V для $x = x_0$ и $y = y_0$.

Очевидно, что, продолжая такимъ образомъ далѣе,

получимъ слѣдующее выраженіе искомой функціи Ω :

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega &= \int_{x_0}^x X dx + \int_{y_0}^y Y_1 dy + \int_{z_0}^z Z_2 dz + \dots \\ &+ \int_{u_0}^u U_{n-2} du + \int_{v_0}^v V_{n-1} dv + C, \end{aligned} \right.$$

гдѣ n есть число переменныхъ и гдѣ каждый индексъ i , которымъ снабжены буквы Y, Z, \dots, U, V , указываетъ на то, что нужно i первыхъ изъ переменныхъ x, y, z, \dots, u, v замѣнить ихъ значеніями $x_0, y_0, z_0, \dots, u_0$. Буква C есть какое-нибудь количество, не зависящее отъ переменныхъ x, y, z, \dots, u, v .

Разсмотримъ, на примѣръ, случай двухъ переменныхъ x и y и пусть

$$(6) \quad \varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy$$

данный дифференціалъ. Интегралъ, взятый такъ, чтобы онъ уничтожался для $x = x_0, y = y_0$, будетъ имѣть значеніемъ

$$(7) \quad \int_{x_0}^x \varphi(x, y) dx + \int_{y_0}^y \psi(x_0, y) dy.$$

484. Розысканіе интеграла дифференціала, содержащаго n независимыхъ переменныхъ, приводится, какъ мы видимъ, къ n интегрированіямъ, относящимся соответственно къ n переменнымъ; очевидно, что эти интегрированія могутъ быть произведены въ какомъ угодно порядкѣ и это замѣчаніе не неважно. Такимъ образомъ интегралъ дифференціала (6) дается выраженіемъ (7), но онъ также можетъ быть данъ выраженіемъ

$$(8) \quad \int_{y_0}^y \psi(x, y) dy + \int_{x_0}^x \varphi(x, y_0) dx,$$

которое уничтожается какъ и первое для $x = x_0, y = y_0$. Сравнивъ между собой эти два выраженія, получимъ

$$\int_{x_0}^x \varphi(x, y) dx - \int_{x_0}^x \varphi(x, y_0) dx = \int_{y_0}^y \psi(x, y) dy - \int_{y_0}^y \psi(x_0, y) dy,$$

или

$$(9) \quad \int_{x_0}^x [\varphi(x, y) - \varphi(x, y_0)] dx = \int_{y_0}^y [\psi(x, y) - \psi(x_0, y)] dy,$$

формулу, имѣющую мѣсто для двухъ функцій $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, подчиненныхъ только одному условію

$$(10) \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}.$$

Интегрированіе дифференціаловъ въ случаѣ мнимыхъ переменныхъ.

485. Чтобы пополнить теорію интегрированія дифференціаловъ, намъ остается разобрать случай мнимыхъ переменныхъ. Пусть будетъ $z = x + y \sqrt{-1}$ мнимая переменная и

$$f(z) = \varphi(x, y) + \sqrt{-1} \psi(x, y)$$

данная функція этой переменной, гдѣ $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ означаютъ дѣйствительныя функціи дѣйствительныхъ переменныхъ x, y . Если функція $f(z)$ имѣетъ опредѣленную производную, то (§ 377)

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x},$$

это же показываетъ, что выраженія

$$\varphi(x, y) dx - \psi(x, y) dy \quad \text{и} \quad \psi(x, y) dx + \varphi(x, y) dy$$

суть точные дифференціалы. Если возьмемъ сумму этихъ выраженій послѣ умноженія втораго на $\sqrt{-1}$, то найдемъ, что

$$[\varphi(x, y) + \sqrt{-1} \psi(x, y)] (dx + dy \sqrt{-1}) = f(z) dz,$$

откуда слѣдуетъ, что $f(z) dz$ есть дифференціалъ функціи переменныхъ x и y . Поэтому имѣемъ такое предложеніе:

ТЕОРЕМА. — Дифференціалъ $f(z) dz$ допускаетъ интегралъ, когда z есть мнимое, точно такъ-же какъ и въ томъ случаѣ, когда z есть дѣйствительное.

Условія, для того чтобы выраженіе

$$X dx + Y dy + Z dz + \dots + U du + V dv$$

было точнымъ дифференціаломъ въ томъ случаѣ, когда x, y, z, \dots означаютъ мнимыя переменныя, очевидно тѣ же самыя, что и въ случаѣ дѣйствительныхъ переменныхъ, и правило, изложенное нами въ § 483, прилагается ко всѣмъ случаямъ.

486. П р и м ѣ р ъ I. Предположимъ, что отыскивается интеграль дифференціала

$$d\Omega = \frac{x}{(x-y)^2} dx - \frac{x^2}{y(x-y)^2} dy.$$

Здѣсь имѣемъ

$$X = \frac{x}{(x-y)^2} = \frac{1}{x-y} + \frac{y}{(x-y)^2},$$

$$Y = -\frac{x^2}{y(x-y)^2} = -\frac{1}{y} - \frac{x}{(x-y)^2} + \frac{1}{x-y},$$

$$\int_{x_0}^x X dx = \log(x-y) - \frac{y}{x-y} - \log(x_0-y) + \frac{y}{x_0-y},$$

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^y Y dy &= -\log y + \frac{x_0}{(x_0-y)^2} + \log(x_0-y) \\ &+ \log y_0 - \frac{x_0}{(x_0-y_0)^2} - \log(x_0-y_0), \end{aligned}$$

откуда

$$\Omega = \log \frac{x-y}{y} - \frac{y}{x-y} - \log \frac{x_0-y_0}{y_0} + \frac{y_0}{x_0-y_0} + C,$$

или просто

$$\Omega = \log \frac{x-y}{y} - \frac{y}{x-y} + C,$$

гдѣ C есть какая-нибудь постоянная.

487. П р и м ѣ р ъ II. — Предположимъ теперь, что требуется отыскать интеграль дифференціала

$$d\Omega = (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz.$$

Здѣсь имѣемъ

$$X = y + z, \quad Y_1 = z + x_0, \quad Z_2 = x_0 + y_0,$$

$$\int_{x_0}^x X dx = (y + z)x - (y + z)x_0,$$

$$\int_{y_0}^y Y_1 dy = (z + x_0)y - (z + x_0)y_0,$$

$$\int_{z_0}^z Z_2 dz = (x_0 + y_0)z - (x_0 + y_0)z_0;$$

откуда

$$\Omega = yz + zx + xy - y_0z_0 - z_0x_0 - x_0y_0 + C,$$

или проще

$$\Omega = yz + zx + xy + C,$$

гдѣ C есть произвольная постоянная.

Опредѣленіе значеній нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ.

488. Существуетъ громадное число опредѣленныхъ интеграловъ, часто встрѣчающихся въ приложеніяхъ Анализа и которыхъ значенія могутъ быть опредѣлены безъ употребленія рядовъ. Мы сейчасъ покажемъ различныя дѣйствія, которыя можно употребить въ розысканіяхъ этого рода.

Замѣтимъ сначала, что опредѣленный интеграль

$$\int_{x_0}^X f(x) dx$$

получится всегда непосредственно, когда умѣемъ выразить неопредѣленный интеграль дифференціала $f(x)dx$ посредствомъ *известныхъ* функцій, потому что, означивъ этотъ интеграль черезъ $F(x) + \text{const.}$, имѣемъ

$$\int_{x_0}^X f(x) dx = F(X) - F(x_0).$$

Нужно дать нѣсколько примѣровъ этого перваго дѣйствія.

1) Имѣемъ

$$\int^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{const.},$$

$$\int e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a} + \text{const.},$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + \text{const.},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + \text{const.},$$

положивъ $a > 0$, получаемъ

$$1) \quad \begin{cases} \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}, & \int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}, & \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2) Имѣемъ (§ 450)

$$\int e^{-ax} \cos bx dx = -e^{-ax} \frac{a \cos bx - b \sin bx}{a^2 + b^2} + \text{const.},$$

$$\int e^{-ax} \sin bx dx = -e^{-ax} \frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} + \text{const.},$$

предположивъ $a > 0$, получаемъ

$$(2) \quad \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx = -\frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$(3) \quad \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

3) Въ § 456 мы дали значеніе интеграла $\int \sin^m x dx$ для случая, когда m есть цѣлое положительное число, четное или нечетное. Если возьмемъ этотъ интегралъ между предѣлами 0 и $\frac{\pi}{2}$, то будемъ имѣть слѣдующія формулы:

$$(4) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2},$$

$$(5) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}.$$

Нужно замѣтить, что эти интегралы соотвѣтственно обращаются въ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx,$$

когда измѣнимъ x въ $\frac{\pi}{2} - x$, а также въ

$$\int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{x^{2n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

когда измѣнимъ $\sin x$ въ x , dx въ $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4) Мы нашли (§ 454)

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx.$$

Предположимъ m и n цѣлыми положительными числами и $n > 1$; взявъ интегралы между предѣлами нуль и $\frac{\pi}{2}$, будемъ имѣть

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{n-1}{m+n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-2} x dx.$$

Замѣнимъ послѣдовательно n черезъ $2n$ и $2n+1$, гдѣ буква n постоянно означаетъ цѣлое число; на основаніи предъидущей формулы имѣемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{(m+2)(m+4)\dots(m+2n)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{(m+3)(m+5)\dots(m+2n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos x dx;$$

интегралъ дифференціала $\sin^m x \cos x dx$ есть

$$\frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + \text{const.};$$

поэтому имѣемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos x dx = \frac{1}{m+1},$$

и слѣдовательно, второй изъ предъидущихъ интеграловъ имѣетъ значеніемъ

$$(6) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{(m+1)(m+3)\dots(m+2n+1)}.$$

Что же касается другаго интеграла, то, если напомнимъ $2m$ вмѣсто m , на основаніи формулы (4) будетъ имѣть

$$(7) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx = \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1) \times 1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m+2n)} \frac{\pi}{2};$$

нужно замѣтить, что интегралъ формулы (6) обращается въ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \cos^m x dx,$$

когда измѣнимъ x въ $\frac{\pi}{2} - x$.

489. Интегралъ $\int_0^\infty \frac{x^{p-1} dx}{1+x}$, въ которомъ p есть положительное число, меньшее 1, имѣетъ конечное значеніе; этотъ интегралъ, изслѣдованный Эйлеромъ, играетъ большую роль въ теоріи опредѣленныхъ интеграловъ; онъ можетъ быть полученъ, какъ мы сейчасъ увидимъ, посредствомъ простаго разсмотрѣнія раціональныхъ дифференціаловъ.

Означимъ черезъ m и n два такія цѣлыя положительныя числа, чтобы $m < n$, и разложимъ на простыя дроби раціональную дробь

$$\frac{n z^{2m}}{1 + z^{2n}}.$$

Если положимъ

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n},$$

то корни уравненія $1 + z^{2n} = 0$ будутъ представлены формулой $e^{\pm \varphi_k \sqrt{-1}}$, гдѣ мы должны дать k значенія $0, 1, 2, \dots, (n-1)$, и сумма T_k двухъ простыхъ дробей, отвѣчающихъ сопряженнымъ корнямъ $e^{+\varphi_k \sqrt{-1}}$, $e^{-\varphi_k \sqrt{-1}}$, будетъ

$$\begin{aligned} T_k &= -\frac{1}{2} \left[\frac{e^{(2m+1)\varphi_k \sqrt{-1}}}{z - e^{\varphi_k \sqrt{-1}}} + \frac{e^{-(2m+1)\varphi_k \sqrt{-1}}}{z - e^{-\varphi_k \sqrt{-1}}} \right] \\ &= \frac{-(z - \cos \varphi_k) \cos (2m+1)\varphi_k + \sin \varphi_k \sin (2m+1)\varphi_k}{(z - \cos \varphi_k)^2 + \sin^2 \varphi_k}. \end{aligned}$$

Если возьмемъ интегралъ дифференціала $T_k dz$ между предѣлами $z = -Z$ и $z = +Z$, то получимъ

$$\begin{aligned} \int_{-Z}^{+Z} T_k dz &= -\frac{1}{2} \cos (2m+1)\varphi_k \log \frac{(Z - \cos \varphi_k)^2 + \sin^2 \varphi_k}{(Z + \cos \varphi_k)^2 + \sin^2 \varphi_k} \\ &\quad + \sin (2m+1)\varphi_k \left[\arctan \frac{Z - \cos \varphi_k}{\sin \varphi_k} + \arctan \frac{Z + \cos \varphi_k}{\sin \varphi_k} \right]; \end{aligned}$$

если заставим Z стремиться къ безконечности, то логариемъ въ предыдущей формулѣ въ предѣлѣ уничтожится, и обѣ дуги круга приведутся каждая къ $\frac{\pi}{2}$, потому что $\varphi_k < \pi$. Поэтому имѣемъ

$$\lim \int_{-\infty}^{+\infty} T_k dz = \pi \sin (2m + 1) \varphi_k,$$

а если сдѣлаемъ

$$\alpha = \frac{2m + 1}{2n} \pi,$$

то будемъ имѣть

$$(2m + 1) \varphi_k = (2k + 1) \alpha, \quad \lim \int_{-\infty}^{+\infty} T_k dz = \pi \sin (2k + 1) \alpha.$$

Теперь имѣемъ

$$\frac{n z^{2m}}{1 + z^{2n}} = T_0 + T_1 + T_2 + \dots + T_{n-1};$$

поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n z^{2m}}{1 + z^{2n}} dz = \pi [\sin \alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin (2n - 1) \alpha].$$

Если сумму между скобками, содержащуюся въ этой формулѣ, умножимъ на $2 \sin \alpha$, то получимъ произведеніе, равное

$$(1 - \cos 2\alpha) + (\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) + \dots + [\cos (2n - 2) \alpha - \cos 2n \alpha],$$

т. е. равное

$$1 - \cos 2n \alpha = 2,$$

такъ какъ $2n \alpha = (2m + 1) \pi$. Такимъ образомъ, подставивъ вмѣсто α его значеніе, получимъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n z^{2m}}{1 + z^{2n}} dz = \frac{\pi}{\sin \left(\frac{2m + 1}{2n} \pi \right)}.$$

Интегралъ, значеніе котораго мы только-что нашли, есть сумма двухъ слѣдующихъ:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{n z^{2m} dz}{1 + z^{2n}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{n z^{2m} dz}{1 + z^{2n}},$$

которые равны между собой, потому что ихъ элементы порознь равны между собой. Поэтому въ нашей формулѣ интегрированіе можно начать отъ нуля, если только имѣемъ двойной интегралъ. Такимъ образомъ имѣемъ

$$\int_0^{\infty} \frac{2n z^{2m} dz}{1 + z^{2n}} = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}.$$

Перемѣнная z остается теперь положительной, поэтому мы сдѣлаемъ внесеніе

$$z = x^{\frac{1}{2n}}, \quad 2n dz = x^{\frac{1}{2n} - 1} dx,$$

и положимъ

$$\frac{2m+1}{2n} = p;$$

предъидущая формула обратится въ

$$(8) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

это же есть результатъ, который мы желали получить.

Формула (8) была доказана въ томъ предположеніи, что число p , заключенное между нулемъ и 1, имѣетъ видъ $\frac{2m+1}{2n}$, гдѣ m и n цѣлыя числа. Но обѣ части этой формулы, очевидно, непрерывныя функціи отъ p , а слѣдовательно онѣ имѣютъ мѣсто для всѣхъ значеній p , заключенныхъ между нулемъ и 1, потому что можно образовать неопредѣленный рядъ раціональныхъ дробей, имѣющихъ видъ $\frac{2m+1}{2n}$ и стремящихся къ предѣлу, равному p .

490. Точно такимъ же способомъ можно опредѣлить интегралъ

$$u = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx,$$

гдѣ p означаетъ число, заключенное между нулемъ и 1. Если измѣнимъ x въ $\frac{1}{x}$, dx въ $-\frac{dx}{x^2}$, то предѣлы интеграла обратятся въ ∞ и 1; но эти предѣлы можно перемѣстить, измѣнивъ знакъ интеграла, это же дастъ

$$u = \int_1^{\infty} \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx;$$

поэтому, сложивъ эту формулу съ предыдущей, будемъ имѣть

$$2u = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx,$$

или

$$u = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx.$$

Предположимъ, что p есть рациональное число вида

$$p = \frac{2m+1}{2n},$$

гдѣ m и n цѣлыя числа. Если употребимъ подстановку

$$x = z^{2n}, \quad dx = 2n z^{2n-1} dz,$$

то получимъ

$$u = \int^{\infty} n \frac{z^{2np-1} - z^{2n(1-p)-1}}{1-z^{2n}} dz;$$

количество, умножающее dz подъ знакомъ \int , есть рациональная функція, которой оба члена четной степени, потому что $2np$, по предположенію, есть цѣлое нечетное число. Отсюда слѣдуетъ, что интеграль можно начать отъ $-\infty$, если только возьмемъ половину результата; такимъ образомъ будемъ имѣть

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2} \frac{z^{2np-1} - z^{2n(1-p)-1}}{1-z^{2n}} dz.$$

Значенія z , дѣлающія безконечною рациональную дробь, умножающую dz , суть

$$e^{\pm \frac{k\pi}{n} \sqrt{-1}} = \cos \frac{k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{k\pi}{n},$$

гдѣ число k имѣетъ значенія $1, 2, 3, \dots, (n-1)$. Если назовемъ черезъ T_k сумму двухъ рациональныхъ дробей, отвѣчающихъ сопряженнымъ корнямъ, даваемымъ предыдущимъ уравненіемъ, то найдемъ

$$T_k = \sin k\rho\pi \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{\left(z - \cos \frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2 \frac{k\pi}{n}},$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_k dz = \sin k\rho\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{n} dz}{\left(z - \cos \frac{k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2 \frac{k\pi}{n}};$$

если положимъ $z - \cos \frac{k\pi}{n} = t \sin \frac{k\pi}{n}$, то интеграль второй части этой формулы обратится въ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$, и слѣдовательно, онъ равенъ $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ или π . Поэтому имѣемъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_k dz = \pi \sin k\rho\pi = \frac{\pi}{2} \frac{\cos (2k-1)\rho\pi - \cos (2k+1)\rho\pi}{\sin \rho\pi}.$$

Дадимъ теперь k значенія $1, 2, \dots, (n-1)$; сложимъ результаты и замѣтимъ, что

$$\cos (2n-1)\rho\pi = -\cos \rho\pi,$$

такъ какъ $2n\rho$ есть цѣлое нечетное число; будетъ имѣть

$$u = \pi \cot \rho\pi,$$

или

$$9) \quad \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx = \pi \cot p\pi,$$

формулу, существующую для всѣхъ значеній p , заключенныхъ между 0 и 1.

Нѣкоторыя слѣдствія изъ предъидущихъ формулъ.

491. Только-что полученный нами результатъ приводитъ къ формулѣ, выражающей разложеніе тангенсовъ въ рядъ изъ простыхъ дробей.

Дѣйствительно, если функцію $\frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}$ помощью алгебраическаго дѣленія разложимъ въ рядъ, то будемъ имѣть

$$\frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} = \sum_{m=0}^{m=\infty} (x^{m+p-1} - x^{m-p});$$

умножимъ обѣ части на dx и возьмемъ потомъ интеграль отъ 0 до 1, получимъ

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\frac{1}{m+p} - \frac{1}{m+1-p} \right);$$

поэтому, на основаніи формулы (9) предъидущаго параграфа имѣемъ

$$\pi \cot p\pi = \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1+p} \right) - \left(\frac{1}{1-2p} - \frac{1}{1+2p} \right) - \dots,$$

а положивъ послѣдовательно $p\pi = x$ и $= \frac{\pi}{2} - x$,

$$\cot x = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{\pi-x} - \frac{1}{\pi+x} \right) - \left(\frac{1}{2\pi-x} - \frac{1}{2\pi+x} \right) - \dots,$$

$$\operatorname{tang} x = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2}+x} \right) + \left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2}-x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+x} \right) + \dots$$

гдѣ p заключается между 0 и 1, нашъ анализъ предполагаетъ, что въ предъидущихъ формулахъ x заключается между 0 и π или между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$; но такъ какъ обѣ части каждой формулы очевидно допускаютъ періодъ π , то эти формулы имѣютъ мѣсто для какого угодно x .

Такъ какъ

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} x,$$

то предыдущія формулы даютъ

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} \right) - \left(\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x} \right) + \dots,$$

измѣнивъ же x въ $\frac{\pi}{x} - x$,

$$\sec x = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} \right) - \left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + x} \right) + \dots$$

Нужно замѣтить, что эти послѣднія формулы вытекаютъ также изъ формулы (8) § 489, потому что эта послѣдняя легко можетъ быть приведена къ виду

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

492. ФОРМУЛА ВАЛЛИСА. — Въ § 488 мы вывели значеніе опредѣленнаго интеграла

$$u_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$$

для того случая, когда m есть цѣлое положительное, четное или нечетное число. Очевидно, что этотъ интегралъ уменьшается, когда m увеличивается, потому что элементы $\sin^m x dx$ тѣмъ болѣе, чѣмъ m менѣе; поэтому, означивъ черезъ n цѣлое положительное число, имѣемъ

$$u_{2n+1} < u_{2n} < u_{2n-1},$$

т. е. (§ 488)

$$\frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{3 \cdot 5 \dots (2n+1)} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \frac{\pi}{2} < \frac{2 \cdot 4 \dots (2n-2)}{3 \cdot 5 \dots (2n-1)},$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &> \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}, \\ \frac{\pi}{2} &< \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}. \end{aligned}$$

Отношеніе вторыхъ частей предыдущихъ неравенствъ равно $\frac{2n}{2n+1}$ и оно имѣетъ предѣломъ единицу, когда n стре-

мится къ безконечности, поэтому имѣемъ

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n-2}{2n-3} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \quad (\text{для } n = \infty).$$

Это и есть формула Валисса; далѣе мы будемъ имѣть случай сдѣлать ея приложеніе.

Приложеніе дифференцированія и интегрированія подъ знакомъ \int къ отысканію нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ.

493. Когда опредѣленный интегралъ, котораго значеніе извѣстно, зависитъ отъ одного или нѣсколькихъ параметровъ, то посредствомъ дифференцированія или интегрированія относительно параметровъ можно вывести новые интегралы. Мы сейчасъ дадимъ нѣсколько примѣровъ.

1) Имѣемъ (§ 488), положивъ $\alpha > 0$,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha} = \frac{\pi}{2} \alpha^{-\frac{1}{2}},$$

взявъ же n разъ дифференціалъ относительно α , получимъ

$$\int_0^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot dx}{(x^2 + \alpha)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \alpha^{n+\frac{1}{2}}} \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{\pi}{2 \alpha^{n+\frac{1}{2}}}.$$

2) Имѣемъ (§ 488), предположивъ α положительной,

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha},$$

взявъ же $n - 1$ разъ дифференціалъ относительно α , получимъ

$$(2) \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x^{n-1} dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{\alpha^n}.$$

Если въ этой формулѣ предположимъ $\alpha = 1$, то будемъ имѣть

$$(3) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1).$$

494. Возьмемъ снова формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha},$$

которую мы только-что рассматривали; умножимъ ее на $d\alpha$ и возьмемъ потомъ интегралъ отъ $\alpha = b$ до $\alpha = a$; такъ какъ

$$\int_b^a e^{-\alpha x} d\alpha = \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x},$$

то получимъ

$$(4) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx = \log \frac{a}{b},$$

и, сдѣлавъ $b = 1$,

$$(5) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x} dx = \log a.$$

Мы нашли (§ 488), предположивъ $\alpha > 0$, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Умноживъ обѣ эти формулы на da и взявъ потомъ интегралъ отъ $a = f$ до $a = g$, получимъ

$$(6) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-fx} - e^{-gx}}{x} \cos bx dx = \frac{1}{2} \log \frac{g^2 + b^2}{f^2 + b^2},$$

$$(7) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-fx} - e^{-gx}}{x} \sin bx dx = \arctan \frac{g}{b} - \arctan \frac{f}{b},$$

гдѣ f и g какія угодно положительныя количества.

Предположимъ въ формулѣ (7) b положительнымъ; тогда, если сдѣлаемъ $f = 0$, $g = \infty$, вторая часть этой формулы обратится въ $\frac{\pi}{2}$, и мы будемъ имѣть

$$(8) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \frac{\pi}{2};$$

очевидно, что если b отрицательное, значение интеграла будет $-\frac{\pi}{2}$.

495. Предыдущая формула имѣетъ большое значеніе въ томъ отношеніи, что даетъ геометрамъ средство облегчить трудныя изысканія. Если въ ней замѣнимъ b черезъ $a+b$, потомъ черезъ $a-b$ и предположимъ a и b положительными и $a > b$, то получимъ

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin (a+b)x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin (a-b)x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Сложивъ обѣ эти формулы и потомъ вычтя вторую изъ первой, найдемъ

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin bx \cos ax}{x} dx = 0.$$

Но эти два интеграла выводятся одинъ изъ другаго посредствомъ перемѣщенія буквъ a и b ; поэтому имѣемъ

$$(9) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = 1 \quad \text{или} \quad = 0,$$

смотря по тому, будетъ ли $a > b$ или $a < b$; количества a и b сверхъ того предполагаются положительными. Если $b = a$, то первая часть формулы (9) обращается, на основаніи формулы (8), въ $\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2ax}{x} dx$, т. е. въ $\frac{1}{2}$.

Такимъ образомъ мы имѣемъ примѣръ функціи двухъ переменныхъ a и b , существенно прерывной, значеніе этой функціи постоянно равно 1 или нулю, когда a и b положительныя; мы сейчасъ покажемъ приложеніе формулы (9), которое относится къ опредѣленію новаго опредѣленнаго интеграла

496. Возьмемъ снова формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2};$$

умноживъ ее на $\frac{\cos b}{b} db$, получимъ

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx \cos b db}{b} e^{-ax} dx = \frac{\cos b db}{a^2 + b^2};$$

интегрируемъ теперь относительно b отъ $b = 0$ до $b = +\infty$; въ первой части можно будетъ произвести интегрированіе подъ знакомъ \int , а такъ какъ множитель $e^{-ax} dx$ въ интегралѣ относительно b есть постоянная, то будемъ имѣть

$$\int_0^{\infty} \left(e^{-ax} \int_0^{\infty} \frac{\sin bx \cos b db}{b} \right) dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos b db}{a^2 + b^2}.$$

Интегралъ относительно x въ первой части можетъ быть разложенъ на два: одинъ получится, если возьмемъ интегралъ отъ $x = 0$ до $x = 1$, другой, если возьмемъ интегралъ отъ $x = 1$ до $x = \infty$. Но, когда $x < 1$, множитель

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx \cos b db}{b},$$

на основаніи формулы (9) (§ 495), есть нуль, и тотъ же множитель равенъ $\frac{\pi}{2}$, когда $x > 1$. Поэтому предъидущая формула приводится къ

$$\frac{\pi}{2} \int_1^{\infty} e^{-ax} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos b db}{a^2 + b^2},$$

а такъ какъ $\int_1^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a} e^{-a}$, то

$$\int_0^{\infty} \frac{a \cos b db}{a^2 + b^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

Постоянная a существенно положительная; если же сдѣлаемъ $b = ax$, $db = a dx$, то получимъ

$$(10) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos ax dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a},$$

это же есть та формула, которую мы предположили вывести.

497. Мы рассмотримъ еще опредѣленный интегралъ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$, который составляетъ часть класса тѣхъ, теорію

которыхъ мы разовьемъ въ слѣдующей главѣ и значеніе котораго можетъ быть легко получено, если надлежащимъ образомъ приложимъ интегрированіе подъ знакомъ \int . Положивъ

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

очевидно будемъ имѣть

$$A = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Если сдѣлаемъ

$$x = \alpha t, \quad dx = \alpha dt,$$

гдѣ α постоянная, то получимъ

$$A = 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 t^2} \alpha dt$$

и, умножая на $2 e^{-\alpha^2} d\alpha$,

$$2 A e^{-\alpha^2} d\alpha = 4 \int_0^{\infty} [e^{-\alpha^2 (1+t^2)} \alpha d\alpha] dt.$$

Интегрируемъ теперь обѣ части этой формулы относительно α , отъ $\alpha = 0$ до $\alpha = \infty$; въ первой части будемъ имѣть

$$2 A \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \quad \text{или} \quad A^2;$$

что касается второй части, то интегрированіе относительно α можетъ быть произведено подъ знакомъ \int , а такъ какъ неопредѣленный интегралъ дифференціала $2 e^{-\alpha^2 (1+t^2)} \alpha d\alpha$ есть $-\frac{e^{-\alpha^2 (1+t^2)}}{1+t^2} + \text{const.}$, то результатъ интегрированія будетъ $2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \frac{\pi}{2} = \pi$. Такимъ образомъ имѣемъ

$$A^2 = \pi,$$

и слѣдовательно

$$(11) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

498. Исходя изъ этого послѣдняго интеграла, можно получить другіе, которые надлежитъ изложить. Напримѣръ, если a означаетъ положительное количество и если замѣнимъ x черезъ $x\sqrt{a}$, dx черезъ $dx\sqrt{a}$, то получимъ

$$(12) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

Взявъ дифференціалъ этого послѣдняго уравненія n разъ къ ряду относительно a , будемъ имѣть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx = \sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} a^{-(n+\frac{1}{2})}$$

и, сдѣлавъ $a = 1$,

$$(13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx = \sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n}.$$

Если означимъ черезъ a дѣйствительное, положительное или отрицательное количество и если въ формулѣ (11) x измѣнимъ въ $x \pm a$, то предѣлы интегрированія останутся тѣ же самыя, и мы будемъ имѣть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 \mp 2ax} dx = \sqrt{\pi} e^{a^2};$$

если двойной знакъ въ первой части замѣнимъ сначала черезъ $+$, потомъ черезъ $-$ и возьмемъ потомъ полу-сумму результатовъ, то будемъ имѣть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{e^{2ax} + e^{-2ax}}{2} dx = \sqrt{\pi} e^{a^2},$$

или, измѣнивъ x въ mx и a въ $\frac{n}{m}$,

$$(14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2 x^2} \frac{e^{2nx} + e^{-2nx}}{2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m} e^{\frac{n^2}{m^2}},$$

формулу, существенно предполагающую m положительнымъ.

О переходѣ отъ дѣйствительныхъ количествъ къ мнимымъ.

499. Когда двѣ функціи равны между собой для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній переменнѣй и когда онѣ обѣ разлагаются въ сходящіеся ряды, расположенные по цѣлымъ восходящимъ степенямъ этой переменнѣй, то коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ равны между собой въ обоихъ разложеніяхъ; если же ряды остаются сходящимися, когда предполагаемъ переменную мнимой, то равенство обѣихъ функцій будетъ необходимо существовать. Это разсмотрѣніе позволяетъ получить значенія нѣкотораго числа новыхъ функцій.

Возьмемъ снова, на примѣръ, формулу (14) § 498. Очевидно, что обѣ части этой формулы разлагаются въ сходящіеся ряды, расположенные по цѣлымъ степенямъ, и что эта сходимость не будетъ нарушена, если n замѣнимъ черезъ $n\sqrt{-1}$; поэтому будемъ имѣть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2 x^2} \cos 2nx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m} e^{-\frac{n^2}{m^2}};$$

можно заставить интегралъ начинаться отъ нуля, если только раздѣлимъ вторую часть на 2, и мы такимъ образомъ имѣемъ

$$\int_0^{\infty} e^{-m^2 x^2} \cos 2nx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2m} e^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

Чтобы дать новый примѣръ, возьмемъ формулу (12) § 498, гдѣ a есть положительное количество; замѣнивъ въ ней \sqrt{a} черезъ $m(1+\alpha)$, получимъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1+\alpha)^2 m^2 x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+\alpha)};$$

обѣ части этой формулы разложимы въ сходящіеся ряды, расположенные по цѣлымъ степенямъ α для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній α , заключенныхъ между -1 и $+1$; сверхъ того эти ряды остаются очевидно сходящимися, когда α означаетъ мнимое количество, модуль котораго меньше 1; по-

этому предыдущая формула будет существовать въ томъ же предположеніи. Пусть $\alpha = \rho \sqrt{-1}$, гдѣ ρ дѣйствительное количество, меньшее 1; будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-\rho^2+2\rho\sqrt{-1})m^2x^2} dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+\rho\sqrt{-1})} \\ &= \frac{(1-\rho\sqrt{-1})\sqrt{\pi}}{m(1+\rho^2)}; \end{aligned}$$

сравняемъ между собой дѣйствительныя части и мнимыя, получимъ

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-\rho^2)m^2x^2} \cos(2\rho m^2x^2) dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+\rho^2)}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-\rho^2)m^2x^2} \sin(2\rho m^2x^2) dx &= \frac{\rho\sqrt{\pi}}{m(1+\rho^2)}, \end{aligned}$$

или, положивъ $(1-\rho^2)m^2 = \mu$, $2\rho m^2 = \nu$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu x^2} \cos(\nu x^2) dx &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + \nu^2}}{\mu^2 + \nu^2}}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu x^2} \sin(\nu x^2) dx &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + \nu^2}}{\mu^2 + \nu^2}}; \end{aligned}$$

эти формулы полагаютъ $\mu > 0$.

Формула Коши.

500. Пусть $z = \rho e^{\omega\sqrt{-1}}$ мнимая переменная и $f(z)$ функція этой переменной, остающаяся непрерывной и имѣющая определенную производную для всѣхъ значеній z , которыхъ модуль не превышаетъ даннаго количества R . Имѣемъ

$$dz = e^{\omega\sqrt{-1}} d\rho + \sqrt{-1} \rho e^{\omega\sqrt{-1}} d\omega,$$

и слѣдовательно

$$f(z) dz = \varphi(\rho, \omega) d\rho + \psi(\rho, \omega) d\omega,$$

сдѣлавъ для краткости

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \omega) &= e^{\omega\sqrt{-1}} f(\rho e^{\omega\sqrt{-1}}), \\ \psi(\rho, \omega) &= \sqrt{-1} \rho e^{\omega\sqrt{-1}} f(\rho e^{\omega\sqrt{-1}}). \end{aligned}$$

Мы видѣли (§ 485), что это выраженіе $f(z) dz$ есть точный дифференціалъ функціи двухъ независимыхъ переменныхъ ρ и ω ; поэтому, означивъ черезъ ρ_0 и ω_0 какія-нибудь начальныя значенія ρ и ω , имѣемъ

$$\int_{\rho_0}^{\rho} [\varphi(\rho, \omega) - \varphi(\rho, \omega_0)] d\rho = \int_{\omega_0}^{\omega} [\psi(\rho, \omega) - \psi(\rho_0, \omega)] d\omega.$$

Мы возьмемъ $\rho_0 = 0$ и напомнимъ α вмѣсто ω_0 ; сверхъ того, такъ какъ функція $f(z)$ остается непрерывной для значеній z , которыхъ модуль не превышаетъ R , интегралы предыдущей формулы будутъ имѣть конечныя значенія, если сдѣлаемъ $\rho = R$, $\omega = \alpha + 2\pi$. Но наше предположеніе, относящееся къ непрерывности $f(z)$, содержитъ условіе, чтобы эта функція имѣла одно и то же значеніе для $\omega = \alpha$ и $\omega = \alpha + 2\pi$, гдѣ ρ остается то же самое. Отсюда слѣдуетъ, что первая часть нашего равенства есть нуль; сверхъ того функція $\psi(\rho, \omega)$ есть нуль для $\rho = 0$, такъ какъ $f(z)$ не можетъ быть безконечностію, поэтому просто будемъ имѣть

$$\int_{\alpha}^{\alpha + 2\pi} \psi(R, \omega) d\omega = 0,$$

или

$$\int_{\alpha}^{\alpha + 2\pi} R e^{\omega \sqrt{-1}} f(R e^{\omega \sqrt{-1}}) d\omega = 0,$$

или еще

$$(1) \quad \int_{\alpha}^{\alpha + 2\pi} Z f(Z) d\omega = 0,$$

гдѣ Z имѣетъ значеніе

$$Z = R e^{\omega \sqrt{-1}}.$$

Формула (1) отличается только видомъ отъ той, которую мы вывели въ § 382, и анализъ, который мы здѣсь ввели, имѣетъ то же основаніе, что и тотъ, который мы употребляли въ поименованномъ параграфѣ. Если означимъ еще здѣсь черезъ $F(z)$ функцію, остающуюся непрерывной и имѣющую опредѣленную производную для значеній z , кото-

рыхъ модуль не превышаетъ R , черезъ x дѣйствительную или мнимую постоянную, которой модуль заключается между 0 и R , то въ формулѣ (1) (§ 382) будемъ въ состояніи положить

$$f(z) = \frac{F(z) - F(x)}{z - x},$$

и эта формула обратится въ

$$\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z-x} [F(Z) - F(x)] d\omega = 0$$

или

$$(2) \quad F(x) \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z-x} d\omega = \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z-x} F(Z) d\omega;$$

но

$$\frac{Z}{Z-x} = 1 + \frac{x}{Z} + \frac{x^2}{Z^2} + \dots + \frac{x^{\mu-1}}{Z^{\mu-1}} + \frac{x^{\mu}}{Z^{\mu}} \frac{Z}{Z-x};$$

сверхъ того, если m не есть нуль,

$$\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{x^m}{Z^m} d\omega = \frac{x^m}{R^m} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{-m\omega\sqrt{-1}} d\omega = 0;$$

поэтому

$$\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z-x} d\omega = \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} d\omega + \frac{x^{\mu}}{R^{\mu}} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z-x} e^{-\mu\omega\sqrt{-1}} d\omega;$$

модуль $\frac{x^{\mu}}{R^{\mu}}$ уничтожается для $\mu = \infty$, и мы слѣдовательно имѣемъ

$$\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z-x} d\omega = 2\pi;$$

формула (2) поэтому обращается въ

$$(3) \quad F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{Z}{Z-x} F(Z) d\omega.$$

Эта формула Коши не отличается отъ формулы (12) § 382, изъ которой мы вывели разложеніе функции $F(x)$ въ рядъ. Дифференцируемъ ее μ разъ относительно x или, если угодно, относительно модуля x ; дифференцированіе во второй части

можетъ быть произведено подъ знакомъ \int , и мы будемъ имѣть

$$(4) \quad F^{(\mu)}(x) = 1 \cdot 2 \dots \mu \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{ZF(Z)}{(Z-x)^{\mu+1}} d\omega.$$

Для $x=0$, формулы (3) и (4), написавъ $Re^{\omega\sqrt{-1}}$ вмѣсто Z , даютъ

$$(5) \quad F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} F(Re^{\omega\sqrt{-1}}) d\omega,$$

$$(6) \quad F^{(\mu)}(0) = 1 \cdot 2 \dots \mu R^{-\mu} \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{-\mu\omega\sqrt{-1}} F(Re^{\omega\sqrt{-1}}) d\omega.$$

Наконецъ, если обозначимъ черезъ x постоянную и если формулы (5) и (6) приложимъ къ функціи $F(z) = F(x+z)$, то, написавъ r вмѣсто R , будемъ имѣть

$$(7) \quad F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} F(x + re^{\omega\sqrt{-1}}) d\omega,$$

$$(8) \quad F^{(\mu)}(x) = 1 \cdot 2 \dots \mu r^{-\mu} \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{-\mu\omega\sqrt{-1}} F(x + re^{\omega\sqrt{-1}}) d\omega.$$

Формулы (7) и (8) существуютъ для всѣхъ тѣхъ значеній r , для которыхъ функція $F(x + re^{\omega\sqrt{-1}})$ остается непрерывной.

501. Предъидущія формулы позволяютъ опредѣлить громадное число опредѣленныхъ интеграловъ; мы сейчасъ дадимъ примѣры.

1) Пусть будетъ

$$F(z) = \frac{1}{1-z};$$

эта функція остается непрерывной для всѣхъ значеній z , которыхъ модуль меньше 1. Формула (5), если сдѣлаемъ $\alpha=0$ и предположимъ $R<1$, поэтому дастъ

$$\begin{aligned} 2\pi &= \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{1 - Re^{\omega\sqrt{-1}}} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(1 - R \cos \omega) + \sqrt{-1} R \sin \omega}{1 - 2R \cos \omega + R^2} d\omega, \end{aligned}$$

откуда, сравнивъ дѣйствительные и мнимые члены, получимъ

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - R \cos \omega}{1 - 2R \cos \omega + R^2} d\omega = 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \omega}{1 - 2R \cos \omega + R^2} d\omega = 0.$$

Нужно замѣтить, что эта послѣдняя формула очевидна; дѣйствительно, элементы интеграла, отвѣчающіе значеніямъ ω , сумма которыхъ равна 2π , равны между собой и противныхъ знаковъ. Что касается первой формулы, то она перестаетъ быть точной, когда $R > 1$, и въ этомъ случаѣ ея значеніе есть нуль; дѣйствительно, имѣемъ

$$\frac{1 - R \cos \omega}{1 - 2R \cos \omega + R^2} + \frac{1 - \frac{1}{R} \cos \omega}{1 - \frac{2}{R} \cos \omega + \frac{1}{R^2}} = 1.$$

Если это тождество умножимъ на $d\omega$ и если потомъ возьмемъ интеграль отъ 0 до 2π , то первый изъ интеграловъ, въ предположеніи $R < 1$, первой части будетъ равенъ 2π , второй поэтому есть нуль, и мы имѣемъ

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - \frac{1}{R} \cos \omega}{1 - \frac{2}{R} \cos \omega + \frac{1}{R^2}} d\omega = 0;$$

въ случаѣ $R = 1$, интеграль, очевидно, равенъ π .

2) Пусть будетъ

$$F(z) = e^z;$$

функція $F(z)$ остается непрерывной для какого угодно z , и если сдѣлаемъ $\alpha = 0$, $R = m$, то формула (5) дастъ

$$\int_0^{2\pi} e^{m \cos \omega + m \sin \omega \sqrt{-1}} d\omega = 2\pi;$$

откуда

$$\int_0^{2\pi} e^{m \cos \omega} \cos(m \sin \omega) d\omega = 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{m \cos \omega} \sin(m \sin \omega) d\omega = 0;$$

элементы первого интеграла принимаютъ одни и тѣ же зна-

ченія, когда даемъ ω два дополнительныя значенія до 2π ; слѣдовательно, если остановимъ интеграль на $\omega = \pi$, то будемъ имѣть половину полнаго значенія; другими словами, имѣемъ

$$\int_0^\pi e^{m \cos \omega} \cos (m \sin \omega) d\omega = \pi,$$

формулу, которую Пуассонъ получилъ съ другой точки зрѣнія въ XIX номерѣ *Журнала Политехнической Школы*.

3) Положимъ еще

$$F(z) = \log(1+z) = \log(1+\rho e^{\omega} \sqrt{-1}),$$

гдѣ ω заключается между $-\pi$ и $+\pi$. Если сдѣлаемъ

$$1+z = re^{\psi} \sqrt{-1},$$

то будемъ имѣть

$$1+\rho \cos \omega = r \cos \psi, \quad \rho \sin \omega = r \sin \psi,$$

откуда

$$r = \sqrt{1+2\rho \cos \omega + \rho^2}, \quad \psi = \arctan \frac{\rho \sin \omega}{1+\rho \cos \omega}.$$

Функция $F(z)$ непрерывна (§ 375) только въ томъ случаѣ, когда ρ меньше 1; тогда $\cos \psi$ постоянно положительный и уголъ ψ , заключающійся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, вполне опредѣляется своимъ тангенсомъ. Если поэтому предположимъ $R < 1$, то формула (5) дастъ

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (\log r + \psi \sqrt{-1}) d\omega = 0,$$

т. е.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \log(1+2R \cos \omega + R^2) d\omega = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left(\arctan \frac{R \sin \omega}{1+R \cos \omega} \right) d\omega = 0.$$

Употребленіе опредѣленныхъ интеграловъ для выраженія коэффициентовъ рядовъ, расположенныхъ по синусамъ или косинусамъ кратныхъ переменныхъ.

502. Опредѣленные интегралы

$$(1) \quad \int_0^\pi \cos i x \cos j x dx, \quad \int_0^\pi \sin i x \sin j x dx$$

оба обращаются въ нуль, когда i и j означаютъ цѣлыя неравныя числа. Дѣйствительно, если возьмемъ ихъ сумму и ихъ разность, то найдемъ

$$(2) \quad \int_0^\pi \cos (i - j) x dx, \quad \int_0^\pi \cos (i + j) x dx;$$

очевидно, что эти интегралы равны нулю, потому что $\cos (i - j) x dx$, $\cos (i + j) x dx$ суть дифференціалы функцій

$$\frac{\sin (i - j) x}{i - j}, \quad \frac{\sin (i + j) x}{i + j},$$

которые уничтожаются для $x = 0$ и для $x = \pi$.

Но если имѣемъ $j = i$, то второй только изъ интеграловъ (2) уничтожается, а первый приводится къ $\int_0^\pi dx$ или къ π ; поэтому оба интеграла

$$(3) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos i x \cos j x dx, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin i x \sin j x dx$$

равны единицѣ или нулю, смотря по тому, будутъ ли цѣлыя числа i и j равны между собой или неравны. Это заключеніе предполагаетъ однако, чтобы не были $i = j = 0$; въ этомъ случаѣ первый интегралъ (3) равенъ 2, а второй есть нуль.

503. Теперь пусть будутъ $f(x)$ и $F(x)$ двѣ функціи отъ x , и предположимъ, что мы знаемъ, что эти функціи разлагаются въ сходящіеся ряды слѣдующимъ образомъ:

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_i \cos i x + \dots,$$

$$(5) \quad F(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots + B_i \sin i x + \dots;$$

намъ остается опредѣлить коэффициенты, это же нетрудно сдѣлать слѣдующимъ способомъ.

Умножимъ формулу (4) на $\frac{2}{\pi} \cos i x dx$ и возьмемъ потомъ интегралъ отъ 0 до π ; на основаніи предъидущаго, всѣ члены второй части проистекшей формулы будутъ нули, за исключеніемъ члена

$$A_i \times \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos i x \cos i x dx,$$

который равенъ A_i ; поэтому имѣемъ

$$(6) \quad A_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos i x dx;$$

эта формула существуетъ для $i = 0$, потому что мы озаботились первый членъ второй части формулы (4) означить черезъ $\frac{1}{2} A_0$, а не черезъ A_0 .

Умножимъ также формулу (5) на $\frac{2}{\pi} \sin i x dx$, и возьмемъ потомъ интегралъ отъ 0 до π ; члены второй части проистекшей формулы будутъ нули, за исключеніемъ

$$B_i \times \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin i x \sin i x dx,$$

котораго значеніе равно B_i ; поэтому имѣемъ

$$(7) \quad B_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \sin i x dx.$$

504. Изъ функцій $f(x)$, $F(x)$, которыя мы только-что рассмотрѣли, одна—*четная*, другая—*нечетная*; поэтому онѣ составляютъ частный случай періодическихъ функцій. Означимъ вообще черезъ $F(x)$ функцію, разлагающуюся въ сходящійся рядъ, расположенный по косинусамъ и синусамъ кратныхъ x ; разложеніе будетъ имѣть видъ

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_i \cos i x + \dots \\ &\quad + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \dots + B_i \sin i x + \dots, \end{aligned} \right.$$

коэффициенты этого ряда опредѣлить нетрудно. Дѣйстви-

тельно, мы знаемъ, что интегралы

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos i x \cos j x dx, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin i x \sin j x dx$$

равны или единицѣ, или нулю, смотря по тому, будутъ ли цѣлыя числа i и j равны или неравны; въ случаѣ $i = j = 0$, первый интегралъ есть 2, а второй есть нуль; мы также видимъ, что интегралъ

$$\int_0^{2\pi} \sin i x \cos j x dx$$

постоянно равенъ нулю. Теперь, если умножимъ формулу (8) на $\frac{1}{\pi} \cos i x dx$, потомъ на $\frac{1}{\pi} \sin i x dx$ и если послѣ этого возьмемъ интегралъ отъ $x = 0$ до $x = 2\pi$, то будемъ имѣть

$$(9) \quad A_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos i x dx,$$

$$(10) \quad B_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin i x dx;$$

формула (9) не дѣлается невѣрной для $i = 0$, въ этомъ случаѣ она даетъ двойное значеніе A_0 , члена независимаго отъ x въ разложеніи $F(x)$.

Часто бываетъ выгодно вводить мнимые показатели въ разложеніе ряда, который мы только-что разсмотрѣли. Такимъ образомъ формула (8) можетъ быть представлена въ видѣ

$$F(x) = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} A_j e^{jx\sqrt{-1}};$$

тогда, если умножимъ ее на $\frac{1}{2\pi} e^{-ix\sqrt{-1}} dx$ и возьмемъ потомъ интегралъ отъ 0 до 2π , то будемъ имѣть

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) e^{-ix\sqrt{-1}} dx = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} A_j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(j-i)x\sqrt{-1}} dx;$$

интегралъ $\int_0^{2\pi} e^{(j-i)x\sqrt{-1}} dx$ равенъ 2π , если $j = i$, но онъ

равенъ нулю для всѣхъ другихъ значеній j ; слѣдовательно, имѣемъ

$$A_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) e^{-ix\sqrt{-1}} dx,$$

формулу, гдѣ индексъ i можетъ имѣть всѣ цѣлыя значенія, заключенныя между $-\infty$ и $+\infty$.

Замѣчанія на измѣненіе переменныхъ въ опредѣленныхъ интегралахъ.

505. Пусть будетъ опредѣленный интегралъ $\int_0^x f(x) dx$. Если желаемъ подставить вмѣсто x другую переменную t , такую, чтобы

$$x = \varphi(t),$$

и если сдѣлаемъ

$$F(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t),$$

то будемъ имѣть (§ 416)

$$\int_{x_0}^x f(x) dx = \int_{t_0}^t F(t) dt,$$

гдѣ t_0 есть значеніе t , отвѣчающее $x = x_0$. Потомъ, если сдѣлаемъ $x = X$ и если назовемъ черезъ T значеніе t , отвѣчающее $x = X$, то будемъ имѣть

$$(1) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{t_0}^T F(t) dt.$$

Употребленіе этой формулы требуетъ нѣкоторой осмотрительности, чтобы не получить неточныхъ результатовъ. Когда функція $\varphi(t)$ не единственная, тогда можетъ случиться, что, для полученія непрерывнаго ряда значеній x , отъ x_0 до X , необходимо употребить послѣдовательно различныя опредѣленія функціи $\varphi(t)$. Въ этомъ случаѣ нужно умѣть сдѣлать измѣненія переменной послѣдовательными.

506. **Примѣръ.** — Очень простой примѣръ выяснитъ то, что было сказано. Рассмотримъ интегралъ

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}}$$

гдѣ X есть количество положительное. Мы видѣли въ § 446, что этотъ интегралъ можетъ быть приведенъ къ эллиптическому виду посредствомъ подстановленія

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 2t^{-\frac{3}{2}},$$

которое даетъ

$$x^3 = t^{-\frac{3}{2}}(1 \pm \sqrt{1-t^3}), \quad x^3 - \frac{1}{x^3} = \pm 2t^{-\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^3},$$

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \pm \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}}.$$

Если желаемъ, чтобы x и t обратились одновременно въ нуль, то возьмемъ для малыхъ значеній t

$$x^3 = t^{-\frac{3}{2}}(1 - \sqrt{1-t^3}).$$

Перемѣнная t возрастаетъ отъ 0 до 1, x возрастаетъ въ то же время отъ 0 до 1. Чтобы перемѣнная x приняла значенія, превышающія единицу, нужно взять потомъ

$$x^3 = t^{-\frac{3}{2}}(1 + \sqrt{1-t^3}).$$

Если заставимъ t измѣняться отъ 1 до 0, то x будетъ возрастать отъ 1 до ∞ .

Пусть будетъ T значеніе t , отвѣчающее $x = X$. Если $X < 1$, то также имѣемъ

$$(1) \quad \int_0^X \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}}.$$

Но если $X > 1$, то

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_1^T \frac{dt}{-\sqrt{t-t^4}};$$

можно нарушить порядокъ предѣловъ послѣдняго интеграла

второй части, нужно только измѣнить знакъ этого интеграла; въ этомъ случаѣ онъ обратится въ

$$\int_T^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} - \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}},$$

это же для случая $X > 1$ дастъ

$$(2) \quad \int_0^X \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^T \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}},$$

мы видимъ, что эта формула (2) очень отлична отъ формулы (1), относящейся къ случаю $X < 1$. Формулы (1) и (2) даютъ одинаковый результатъ для $X = 1$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^4}}.$$

507. Посредствомъ подстановленія опредѣленный интегралъ всегда можно привести къ другому, въ которомъ предѣлы интегрированія суть количества, выбранныя произвольно.

Напримѣръ, если данный интегралъ есть $\int_{x_0}^X f(x) dx$, гдѣ x и X — конечныя количества, и если положимъ

$$\frac{x - x_0}{X - x_0} = \frac{t - t_0}{T - t_0}, \quad \text{откуда} \quad \frac{dx}{X - x_0} = \frac{dt}{T - t_0},$$

гдѣ t есть новая переменная, t_0 и T какія нибудь конечныя количества, то очевидно будемъ имѣть $t = t_0$ для $x = x_0$ и $t = T$ для $x = X$; слѣдовательно, подстановленіе даетъ результатъ вида

$$\int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{t_0}^T F(t) dt.$$

Если употребимъ подстановленіе

$$\frac{x - x_0}{X - x_0} = \frac{t - t_0}{t - t_0 + 1},$$

то будемъ имѣть $t = t_0$ для $x = x_0$ и $t = +\infty$ для $x = X$; слѣдовательно, наше подстановленіе дастъ

$$\int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{t_0}^{\infty} F(t) dt,$$

а если возьмемъ $t_0 = 0$, то будемъ имѣть

$$\int_{x_0}^X f(x) dx = \int_0^{\infty} F(t) dt.$$

Очевидно, обратное подстановленіе приведетъ интегралъ $\int_0^{\infty} F(t) dt$ къ виду $\int_{x_0}^X f(x) dx$.

508. Мы видѣли, что опредѣленный интегралъ можетъ быть написанъ наподобіе неопредѣленныхъ интеграловъ, если только будемъ произвольно брать значеніе, отъ котораго начинается интегрированіе. Мы можемъ прибавить, на основаніи предъидущаго, что неопредѣленный интегралъ можетъ быть замѣщенъ, безконечнымъ числомъ способовъ, опредѣленнымъ интеграломъ, котораго предѣлы могутъ быть взяты произвольно. Дѣйствительно, пусть будетъ неопредѣленный интегралъ $\int f(x) dx$; имѣемъ

$$\int f(x) dx = \int_{x_0}^x f(x) dx + C,$$

гдѣ C есть произвольная постоянная. Напишемъ, подъ знакомъ \int во второй части, α вмѣсто x , получимъ

$$\int f(x) dx = \int_{x_0}^x f(\alpha) d\alpha + C.$$

$\int_{x_0}^x f(\alpha) d\alpha$ есть опредѣленный интегралъ дифференціала $f(\alpha) d\alpha$, взятый между предѣлами x_0 и x ; поэтому къ нему можно приложить преобразованія, о которыхъ было говорено въ предъидущемъ параграфѣ.

Разсмотримъ, на примѣръ, неопредѣленный интегралъ

$$\int x^{n-1} e^{-x} dx,$$

въ которомъ показатель n предполагаемъ положительнымъ. Этотъ интегралъ равенъ

$$\int_0^x x^{n-1} e^{-x} dx + C \text{ или } \int_0^x \alpha^{n-1} e^{-\alpha} d\alpha + C,$$

гдѣ C произвольная постоянная. Если положимъ

$$\alpha = tx, \quad d\alpha = x dt,$$

то получимъ

$$\int_0^1 x^n t^{n-1} e^{-tx} dt + C,$$

или, вынеся x^n за знакъ \int ,

$$x^n \int_0^1 t^{n-1} e^{-tx} dt + C.$$

Разсмотримъ еще эллиптическій интегралъ перваго рода

$$\int_0^x \frac{dx}{V(1-x^2)(1-k^2x^2)} = \int_0^x \frac{d\alpha}{V(1-\alpha^2)(1-k^2\alpha^2)};$$

сдѣлавъ, какъ и въ предъидущемъ примѣрѣ,

$$\alpha = tx, \quad d\alpha = x dt,$$

получимъ

$$\int_0^1 \frac{x dt}{V(1-x^2t^2)(1-k^2x^2t^2)}.$$

О кратныхъ значеніяхъ, которыя могутъ имѣть интегралы, взятые между двумя опредѣленными предѣлами.

509. Въ § 466 мы доказали, что

$$\int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^X f(x) dx,$$

какія бы ни были количества x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , съ тѣмъ, однако, что функція $f(x)$ остается непрерывной, когда x измѣняется между предѣлами каждаго интегрированія. Эта формула выражаетъ, что интегралъ

$$\int_{x_0}^X f(x) dx$$

имѣть одно и то же значеніе, какой бы ни былъ способъ, посредствомъ котораго заставляемъ измѣняться переменную x , чтобы она отъ начальнаго значенія x_0 достигла конечнаго X .

Это требуетъ только, чтобы функція $f(x)$ снова принимала то же значеніе, когда x снова беретъ то же значеніе, и, сверхъ того, чтобы эта переменная x измѣнялась, непрерывно переходя отъ x_0 до X . Когда эти условія не выполнены и когда x переходитъ отъ x_0 до X различными способами, тогда интеграль можетъ имѣть очень различныя значенія.

Отсюда, на примѣръ, кратныя значенія выраженій

$$\arcsin X, \quad \arctang X, \quad \operatorname{arc} \sec X,$$

суть ничто иное какъ значенія интеграловъ

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^X \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_0^X \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

эти интегралы зависятъ не только отъ значенія X , но также и отъ способа, посредствомъ котораго измѣняется x , переходя отъ предѣла 0 до предѣла X . Надлежитъ дать для этого нѣкоторыя поясненія.

510. Разсмотримъ сначала интеграль

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

высшій предѣль котораго есть какое-нибудь количество, заключающееся между -1 и $+1$. Заставимъ сначала x измѣняться отъ 0 до X въ одномъ и томъ же смыслѣ; радикаль $\sqrt{1-x^2}$ можетъ быть взятъ сначала съ знакомъ $+$ или съ знакомъ $-$, по произволу; но такъ какъ этотъ радикаль не уничтожается въ промежуткѣ отъ 0 до X , то нужно для непрерывности брать его постоянно съ однимъ и тѣмъ же знакомъ. Выберемъ знакъ $+$ и предположимъ, для ясности, что X положительный; означимъ черезъ α значеніе нашего интеграла, опредѣленнаго такимъ образомъ, и положимъ

$$\left[\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] = \alpha,$$

гдѣ скобки, которыя мы употребляемъ, служатъ для указанія на то, что x измѣняется постоянно въ одномъ и томъ же смыслѣ, переходя отъ предѣла 0 къ предѣлу X . Пусть K значеніе, которое принимаетъ α , когда $X = +1$; будемъ имѣть

$$\left[\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] = K.$$

Такъ какъ переменная x возрастаетъ отъ 0 до своего высшаго предѣла $+1$, то заставимъ ее убывать отъ $+1$ до 0 и возьмемъ между этими предѣлами интегралъ дифференціала $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

именно: $\int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Если радикалу $\sqrt{1-x^2}$ дадимъ знакъ $+$, то интегралъ, о которомъ мы говоримъ, будетъ имѣть значеніе $-K$, потому что его элементы будутъ равны соответствующимъ элементамъ съ обратными знаками предыдущаго интеграла. Но такъ какъ радикалъ $\sqrt{1-x^2}$ уничтожается, то естественно измѣнить его знакъ, и тогда будемъ имѣть

$$\left[\int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] = K;$$

переменная x снова обращается въ нуль; предположимъ, что она непрерывно измѣняется до тѣхъ поръ, пока не достигаетъ своего низшаго предѣла -1 : радикалъ $\sqrt{1-x^2}$ долженъ сохранять знакъ $-$, потому что онъ не уничтожается, и мы опять будемъ имѣть

$$\left[\int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] = K,$$

потому что элементы этого интеграла и элементы предыдущаго порознь равны между собой и имѣютъ одинаковые знаки.

Но для $x = -1$ радикалъ $\sqrt{1-x^2}$ снова уничтожается, и мы ему должны дать знакъ $+$, когда x возрастаетъ отъ -1 до 0; поэтому будемъ имѣть

$$\left[\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] = K,$$

если же снова заставим x возрастать отъ 0 до X , то опять нападёмъ на значеніе α .

Отсюда слѣдуетъ, что если для перехода отъ 0 до X заставимъ x возрастать отъ 0 до $+1$, если потомъ заставимъ убывать эту переменную отъ $+1$ до -1 и если заставимъ наконецъ возрастать отъ -1 до X , то интеграль

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

будетъ имѣть значеніе $4K + \alpha$.

Если вмѣсто того, чтобы поступать такъ, какъ мы только-что дѣлали, заставимъ x сначала убывать отъ 0 до -1 , потомъ возрастать отъ -1 до $+1$, далѣе убывать отъ $+1$ до 0 и наконецъ возрастать отъ 0 до X , то будемъ имѣть, какъ это нетрудно видѣть,

$$\begin{aligned} \left[\int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] &= \left[\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] = \left[\int_0^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] \\ &= \left[\int_{+1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right] = -K, \end{aligned}$$

и тогда значеніе нашего интеграла будетъ $-4K + \alpha$. Въ этомъ случаѣ, какъ и въ предъидущемъ, когда x достигаетъ предѣла интегрированія X , радикаль $\sqrt{1-x^2}$ имѣетъ значеніе $+\sqrt{1-X^2}$.

На основаніи этого мы видимъ, что разсмотрѣнный интеграль будетъ имѣть значеніе

$$4nK + \alpha,$$

гдѣ n означаетъ цѣлое положительное или отрицательное такое число, что x , измѣняясь отъ 0 до X , переходитъ черезъ свои предѣлы $+1$ и -1 число разъ, равное абсолютному значенію n .

Предположимъ, что послѣ того, какъ получили число $\pm n$ разъ предѣлы $+1$ и -1 , x снова получилъ значеніе нуль; въ этотъ моментъ заставимъ его возрастать отъ 0 до $+1$, и интеграль дифференціала $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, относительно этого промежутка будетъ равенъ $+K$; заставимъ потомъ x убывать отъ $+1$ до 0, и мы опять будемъ имѣть соотвѣтствующій интеграль, равный $+K$, такъ какъ dx и $\sqrt{1-x^2}$ въ этомъ случаѣ отрицательные; заставимъ наконецъ x возрастать отъ 0 до X , и такъ какъ радикаль $\sqrt{1-x^2}$ не уничтожается, то мы должны сохранить при немъ знакъ $-$; слѣдовательно, относительно этого новаго промежутка интеграль будетъ $-\alpha$.

Поэтому, если для перехода отъ 0 до X переменная x однимъ разомъ болѣе достигаетъ одного изъ предѣловъ $+1, -1$, чѣмъ другаго, то значеніе интеграла

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

будетъ

$$(4n+2)K - \alpha,$$

и когда x достигнетъ предѣла интегрированія, тогда значеніе радикала $\sqrt{1-x^2}$ будетъ $-\sqrt{1-X^2}$.

Мы предполагали X положительнымъ; но очевидно, имѣемъ

$$\int_0^{-X} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

если только послѣдовательныя значенія x , измѣняющагося отъ 0 до $-X$, будутъ соотвѣтственно равны значеніямъ съ противными знаками x , измѣняющагося отъ 0 до $+X$.

Изъ этого анализа слѣдуетъ, что, если положимъ

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

x и $\sqrt{1-x^2}$ будутъ вполнѣ опредѣленныя функціи переменной u и что эти функціи будутъ имѣть періодъ $4K$, ко-

торый есть ни что иное, какъ окружность 2π . Мы нашли, слѣдовательно, только хорошо извѣстные результаты; но все-таки было важно показать, какъ эти результаты могутъ быть выведены изъ разсмотрѣнія интеграловъ.

511. Интеграль $\int_0^x \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$ черезъ измѣненія x въ $\frac{1}{x}$ приводится къ тому, который мы только-что разсмотрѣли, поэтому имъ не стоитъ заниматься; но мы должны разсмотрѣть интеграль

$$\int_0^x \frac{dx}{1 + x^2},$$

дифференціалъ котораго раціональный.

Положимъ

$$\left[\int_0^X \frac{dx}{1 + x^2} \right] = \alpha,$$

гдѣ скобки указываютъ, какъ и прежде, на то, что x измѣняется отъ 0 до X постоянно въ одномъ и томъ же смыслѣ; пусть будетъ также

$$\left[\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} \right] = K.$$

Чтобы перейти отъ $x = 0$ къ $x = X$, можно заставить x возрастать отъ $0 + \infty$, переменить знакъ этой переменнѣй, заставить снова ее возрастать отъ $-\infty$ до 0 и наконецъ заставить ее измѣняться въ одномъ смыслѣ отъ 0 до X ; или можно заставить x убывать отъ 0 до $-\infty$, потомъ отъ $+\infty$ до 0, и заставить эту переменную измѣняться въ одномъ смыслѣ отъ 0 до X .

Если заставимъ сначала x возрастать отъ 0 до $+\infty$, потомъ отъ $-\infty$ до 0, то, такъ какъ очевидно

$$\left[\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1 + x^2} \right] = K,$$

значеніе интеграла

$$\int_0^X \frac{dx}{1+x^2}$$

будетъ $2K + \alpha$. Если, напротивъ, заставимъ x убывать отъ 0 до $-\infty$, потомъ отъ $+\infty$ до 0, то будемъ имѣть

$$\left[\int_0^{-\infty} \frac{dx}{1+x^2} \right] = \left[\int_{+\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} \right] = -K,$$

и слѣдовательно, значеніе нашего интеграла будетъ $-2K + \alpha$.

Отсюда слѣдуетъ, что этотъ интегралъ будетъ имѣть значеніе

$$2nK + \alpha,$$

если только x измѣняется отъ 0 до X , переходя черезъ обѣ безконечности число разъ, равное абсолютному значенію цѣлаго числа n . Наконецъ, мы видимъ, что, положивъ

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

x будетъ вполне опредѣленная функція отъ u и что эта функція будетъ имѣть періодъ $2K = \pi$.

О двоякомъ періодѣ эллиптическихъ функцій.

512. Предъидущія разсмотрѣнія позволяютъ легко изложить основное свойство эллиптическихъ функцій.

Мы назвали *эллиптической функціей* перваго рода (§ 435) интегралъ

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2x^2}},$$

гдѣ $k^2 < 1$; дифференціалъ $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2x^2}}$ остается дѣйствительнымъ, пока переменная x заключается между -1 и $+1$. Интегрируемъ этотъ дифференціалъ между предѣлами 0 и 1, предположивъ, что x возрастаетъ постоянно отъ одного изъ предѣловъ до другаго, и возьмемъ радикалы положительными; означимъ черезъ K такимъ образомъ получен-

ный интегралъ, который Лежандръ назвалъ *полнымъ интеграломъ*; будемъ имѣть

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Когда x заключается между 1 и $\frac{1}{k}$ или между -1 и $-\frac{1}{k}$ тогда дифференціалъ $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2x^2}}$ мнимый и онъ равенъ произведенію

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1} \sqrt{1-k^2x^2}}$$

на $\sqrt{-1}$. Интегрируемъ этотъ послѣдній дифференціалъ, заставивъ x возрастать отъ 1 до $\frac{1}{k}$ и взявъ радикалы положительными; если назовемъ черезъ K' такимъ образомъ полученный интегралъ, то будемъ имѣть

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1} \sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Нетрудно привести его къ предѣламъ 0 и 1; дѣйстви-тельно, положимъ

$$k'^2 = 1 - k^2 \quad \text{или} \quad k^2 + k'^2 = 1,$$

и употребимъ подстановленіе

$$x = \frac{1}{k} \sqrt{1-k'^2t^2}, \quad dx = -\frac{k'^2 t dt}{k \sqrt{1-k'^2t^2}}.$$

Предѣлы интегрированія, относящіяся къ t , будутъ 1 и 0; если перемѣстимъ ихъ между собой, измѣнивъ при этомъ знакъ дифференціала, потомъ, если вмѣсто t напомнимъ букву x , то получимъ

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k'^2x^2}}.$$

Модули k , k' названы Лежандромъ *дополнительными моду-*

лями; равнымъ образомъ оба эллиптическіе интеграла

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2x^2}}, \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k'^2x^2}},$$

модули которыхъ k и k' , названы имъ *дополнительными функциями*, а отсюда слѣдуетъ, что K и K' *полные дополнительные эллиптическіе интегралы*.

513. Теперь сдѣлаемъ, согласно означеніямъ § 438,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2x^2}} = u,$$

и

$$x = \sin am u, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos am u, \quad \sqrt{1-k^2x^2} = \Delta am u.$$

Пусть будетъ X значеніе x , заключенное между -1 и $+1$, и α соотвѣтствующее значеніе u , когда интегрируемъ, заставивъ x измѣняться въ одномъ смыслѣ отъ 0 до X и взявъ положительными радикалы $\sqrt{1-x^2}$ и $\sqrt{1-k^2x^2}$; будемъ имѣть

$$(1) \quad X = \sin am \alpha, \quad \sqrt{1-X^2} = \cos am \alpha, \quad \sqrt{1-k^2X^2} = \Delta am \alpha.$$

Предположимъ $X > 0$ и возьмемъ интеграль дифференціала $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2x^2}}$, заставивъ x возрастать отъ 0 да 1, потомъ убывать отъ 1 до нуля и наконецъ снова убывать отъ 0 до $-X$. Интеграль, относящійся къ первому промежутку, равенъ K ; во второмъ промежуткѣ радикаль $\sqrt{1-x^2}$ дѣлается отрицательнымъ, обратившись сперва въ нуль, и соотвѣтствующій интеграль опять равенъ K ; наконецъ, въ послѣднемъ промежуткѣ радикаль $\sqrt{1-x^2}$ остается отрицательнымъ и соотвѣтствующій интеграль

$$\int_0^{-X} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2x^2}}$$

очевидно равенъ α . Теперь, замѣчая, что $\sqrt{1-k^2x^2}$ остается

положительнымъ, мы видимъ, что

$$(2) \quad \begin{cases} -X = \sin \operatorname{am} (2K + \alpha), \\ -\sqrt{1 - X^2} = \cos \operatorname{am} (2K + \alpha), \\ \sqrt{1 - k^2 X^2} = \Delta \operatorname{am} (2K + \alpha); \end{cases}$$

очевидно, мы получимъ тѣ-же самыя формулы, если предположимъ $X < 0$. Уподобляя ихъ предыдущимъ и написавъ u вмѣсто α , получимъ

$$(3) \quad \begin{cases} \sin \operatorname{am} (2K + u) = -\sin \operatorname{am} u, \\ \cos \operatorname{am} (2K + u) = -\cos \operatorname{am} u, \\ \Delta \operatorname{am} (2K + u) = \Delta \operatorname{am} u. \end{cases}$$

Такимъ образомъ $\sin \operatorname{am} u$ и $\cos \operatorname{am} u$ измѣняются только тогда знакъ, когда прибавляемъ къ переменнѣй постоянной $2K$; отсюда слѣдуетъ, что эти функціи не измѣнятся, если повторимъ это сложеніе два раза; поэтому имѣемъ

$$(4) \quad \begin{cases} \sin \operatorname{am} (4K + u) = \sin \operatorname{am} u, \\ \cos \operatorname{am} (4K + u) = \cos \operatorname{am} u, \end{cases}$$

это же выражаетъ, что функціи $\sin \operatorname{am} u$ и $\cos \operatorname{am} u$ имѣютъ періодъ $4K$; послѣднее изъ уравненій (3) выражаетъ, что $\Delta \operatorname{am} u$ имѣетъ періодъ $2K$.

514. Если значеніе X постоянно положительное и меньшее 1, то предположимъ, что для того, чтобы перейти отъ 0 къ X , мы заставили переменную x возрастать отъ 0 до $\frac{1}{k}$ и потомъ заставили убывать отъ $\frac{1}{k}$ до X , причемъ радикалы $\sqrt{1 - x^2}$ и $\sqrt{1 - k^2 x^2}$ взяты съ знакомъ $+$. Отъ 0 до 1 интеграль дифференціала

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}}$$

равенъ K ; отъ 1 до $\frac{1}{k}$ этотъ дифференціалъ мнимый и имѣетъ значеніе

$$\sqrt{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} \sqrt{1 - k^2 x^2}};$$

радикаль $\sqrt{1 - k^2 x^2}$ долженъ быть постоянно взятъ съ знакомъ $+$, но знакъ $\sqrt{x^2 - 1}$ неопредѣленный; мы свободны его взятъ со знакомъ $+$, такъ какъ $\sqrt{-1}$ имѣетъ двойной знакъ. Отъ 1 до $\frac{1}{k}$ интеграль предыдущаго дифференціала поэтому будетъ $K' \sqrt{-1}$ (§ 512); если x убываетъ потомъ отъ $\frac{1}{k}$ до 1, то радикаль $\sqrt{1 - k^2 x^2}$, который уничтожается, долженъ быть взятъ съ знакомъ $-$, и интеграль, относящійся къ рассматриваемому промежутку, опять будетъ $K' \sqrt{-1}$. Остается заставить x убывать отъ 1 до X ; тогда дифференціаль снова дѣлается дѣйствительнымъ, радикаль $\sqrt{1 - k^2 x^2}$ остается отрицательнымъ, но ничто не опредѣляетъ знака $\sqrt{1 - x^2}$, который только-что перешелъ отъ мнимаго значенія къ дѣйствительному. Передъ этимъ радикаломъ я поставлю двойной знакъ \pm , и тогда интеграль, относящійся къ послѣднему, нами рассматриваемому промежутку, будетъ

$$\int_1^X \frac{dx}{(\pm \sqrt{1 - x^2}) (-\sqrt{1 - k^2 x^2})},$$

такъ какъ $X < 1$, dx отрицательный и предыдущій интеграль очевидно имѣетъ значеніемъ $\pm (K - \alpha)$. Такимъ образомъ, когда x переходитъ отъ 0 до X , идя по тому пути, который мы допустили, тогда получимъ интеграль, значеніе котораго есть

$$K + 2K' \sqrt{-1} \pm (K - \alpha),$$

и мы имѣемъ

$$(5) \quad \begin{cases} X = \sin \operatorname{am} [K + 2K' \sqrt{-1} \pm (K - \alpha)], \\ \pm \sqrt{1 - X^2} = \cos \operatorname{am} [K + 2K' \sqrt{-1} \pm (K - \alpha)], \\ -\sqrt{1 - k^2 X^2} = \Delta \operatorname{am} [K + 2K' \sqrt{-1} \pm (K - \alpha)], \end{cases}$$

гдѣ двойной знакъ \pm долженъ быть замѣщенъ или черезъ $+$ или черезъ $-$; какой бы ни былъ допущенъ знакъ, мы при-

демъ, какъ это мы сейчасъ увидимъ, къ одному результату. Сравненіе формулъ (5) съ формулами (1) дастъ, если замѣнимъ знакъ \pm черезъ -1 и вмѣсто α напишемъ u ,

$$(6) \quad \begin{cases} \sin \operatorname{am} (2K' \sqrt{-1} + u) = \sin \operatorname{am} u, \\ \cos \operatorname{am} (2K' \sqrt{-1} + u) = -\cos \operatorname{am} u, \\ \Delta \operatorname{am} (2K' \sqrt{-1} + u) = -\Delta \operatorname{am} u. \end{cases}$$

Замѣнивъ во второй изъ этихъ формулъ u черезъ $u + 2K$ и черезъ $u + 2K' \sqrt{-1}$ въ третьей, на основаніи этой формулы и втораго уравненія (3), будемъ имѣть

$$(7) \quad \begin{cases} \cos \operatorname{am} (2K + 2K' \sqrt{-1} + u) = \cos \operatorname{am} u, \\ \Delta \operatorname{am} (4K' \sqrt{-1} + u) = \Delta \operatorname{am} u. \end{cases}$$

Первая формула (6) показываетъ, что $\sin \operatorname{am} u$ допускаетъ періодъ $2K' \sqrt{-1}$; уравненія (7) выражаютъ, что функции $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$ имѣютъ: первая періодъ $2K + 2K' \sqrt{-1}$, вторая $4K' \sqrt{-1}$.

Если въ формулахъ (5) замѣнимъ знакъ \pm черезъ $+$, то сравненіе ихъ съ формулами (1) дастъ

$$(8) \quad \begin{cases} \sin \operatorname{am} (2K + 2K' \sqrt{-1} - u) = \sin \operatorname{am} u, \\ \cos \operatorname{am} (2K + 2K' \sqrt{-1} - u) = \cos \operatorname{am} u, \\ \Delta \operatorname{am} (2K + 2K' \sqrt{-1} - u) = -\Delta \operatorname{am} u. \end{cases}$$

Очевидно, что если x измѣняется тѣмъ же способомъ отъ 0 до $+X$ и отъ 0 до $-X$, интеграль дифференціала

$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2x^2}}$ будетъ имѣть въ обоихъ случаяхъ равныя значенія и противные знаки, между тѣмъ какъ значеніе $\sqrt{1-X^2}$ или значеніе $\sqrt{1-k^2X^2}$ будетъ одно и то же.

Отсюда слѣдуетъ, что $\sin \operatorname{am} u$ есть нечетная функція отъ u , т. е. функція, измѣняющая знакъ вмѣстѣ съ u , сохраняя при этомъ одно и то же абсолютное значеніе, между тѣмъ какъ $\cos \operatorname{am} u$ и $\Delta \operatorname{am} u$ суть четныя функціи. Теперь измѣнимъ въ формулахъ (8) u въ $-u$; уничтожимъ потомъ половину періода $2K$, измѣнивъ знаки вторыхъ

частей, мы снова придемъ къ уравненіямъ (6), которыя, такимъ образомъ, имѣютъ мѣсто, когда *и* положительное и когда *и* отрицательное. Мы пришли-бы къ тѣмъ же результатамъ, если бы ввели предположеніе $X < 0$.

Изъ этого анализа мы видимъ, что функціи $\sin am$, $\cos am$, Δam имѣютъ единственное свойство быть двояко періодическими; первая функція допускаетъ періоды $4K$ и $2K'\sqrt{-1}$, вторая, періоды $4K$ и $2K + 2K'\sqrt{-1}$; наконецъ третья имѣетъ два періода $2K$ и $4K'\sqrt{-1}$. Для доказательства этого предложенія мы рассматривали только дѣйствительныя значенія первой функціи $\sin am$, но мы не могли бы далѣе развивать эти разсмотрѣнія безъ того, чтобы не выдти изъ опредѣленныхъ нами границъ.

ГЛАВА III.

ТЕОРІЯ ЭЙЛЕРОВЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

Объ Эйлеровыхъ интегралахъ перваго и втораго рода.

515. Лежандръ означилъ подъ именемъ *Эйлеровыхъ интеграловъ* два опредѣленные интеграла

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx,$$

которые были изучены въ первый разъ Эйлеромъ и которые сдѣлались потомъ предметомъ изысканій большаго числа геометровъ. Теорія этихъ интеграловъ имѣетъ большую важность, и мы намѣреваемся развитъ ее въ этой главѣ, которая будетъ служить дополненіемъ предыдущей.

Первый интегралъ зависитъ отъ двухъ параметровъ p и q ; мы означимъ его чрезъ $B(p, q)$; второй интегралъ зависитъ только отъ одного параметра p , и мы его означимъ, согласно Лежандру, символомъ $\Gamma(p)$. Слѣдовательно, будемъ имѣть

$$(1) \quad B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx,$$

$$(2) \quad \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx,$$

гдѣ e означаетъ, какъ обыкновенно, основаніе неперовскихъ логариѳмовъ.

Функции $B(p, q)$ называются Эйлеровыми интегралами первого рода, а функции $\Gamma(p)$ — интегралами второго рода. Чтобы эти функции оставались конечными, нужно и достаточно, чтобы параметры p и q были положительные или, по крайней мѣрѣ, чтобы ихъ действительныя части были положительныя, если они мнимыя. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ вмѣсто x^p нужно написать $e = {}^p \log x$; такъ же нужно поступить и съ другими.

Интеграламъ B можно дать другой видъ, который не бесполезно показать. Если положимъ въ формулѣ (1)

$$x = \frac{y}{1+y}, \quad 1-x = \frac{1}{1+y}, \quad dx = \frac{dy}{(1+y)^2},$$

то интегралъ относительно y долженъ быть взятъ между предѣлами 0 и ∞ ; поэтому, написавъ x вмѣсто y , будемъ имѣть

$$(3) \quad B(p, q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx,$$

или еще

$$B(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{(1+x)^{p+q}} + \int_1^\infty \frac{x^{p-1} dx}{(1+x)^{p+q}};$$

если во второмъ интегралѣ x замѣнимъ черезъ $\frac{1}{x}$, dx черезъ $-\frac{dx}{x^2}$, то предѣлы, которые были 1 и ∞ , обратятся въ 1 и 0; эти послѣдніе предѣлы можно перемѣстить, для этого нужно только измѣнить знакъ интеграла; имѣемъ

$$B(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{(1+x)^{p+q}} + \int_0^1 \frac{x^{q-1} dx}{(1+x)^{p+q}},$$

или

$$(4) \quad B(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}} dx.$$

Эта формула показываетъ, что функция $B(p, q)$ симметрична относительно двухъ количествъ p и q , отъ которыхъ она зависитъ; отсюда слѣдуетъ, что

$$B(p, q) = B(q, p);$$

впрочемъ, это свойство можетъ быть также выведено изъ формулы (1), потому что, если въ ней измѣнимъ x въ $1 - x$, непосредственно преобразуемъ $B(p, q)$ въ $B(q, p)$.

Приведеніе интеграловъ перваго рода къ интеграламъ втораго рода.

516. Мы сейчасъ покажемъ, что функціи $B(p, q)$ могутъ выражаться посредствомъ функцій Γ , такъ что намъ придется заниматься только этими послѣдними.

Если означимъ черезъ m положительную постоянную и если въ формулѣ (2) § 215 положимъ $x = mx'$, то получимъ

$$(1) \quad \Gamma(p) = m^p \int_0^\infty e^{-mx'} x'^{p-1} dx',$$

откуда будемъ имѣть

$$\frac{1}{m^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-mx'} x'^{p-1} dx',$$

формулу, часто употребляемую въ анализѣ и которая намъ сейчасъ послужитъ для рѣшенія вопроса, который мы имѣемъ въ виду. Дѣйствительно, на основаніи этой формулы имѣемъ

$$\frac{1}{(1+x)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty e^{-(1+x)x'} x'^{p+q-1} dx';$$

поэтому формула (3) § 515 можетъ быть написана такъ:

$$B(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty x^{p-1} dx \int_0^\infty e^{-(1+x)x'} x'^{p+q-1} dx'.$$

Можно нарушить порядокъ интегрированія и можно написать

$$B(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty e^{-x'} x'^{q-1} dx' x'^p \int_0^\infty e^{-x'x} x^{p-1} dx;$$

Но на основаніи формулы (1) $x'^p \int_0^\infty e^{-x'x} x^{p-1} dx$ равенъ $\Gamma(p)$;

поэтому

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty e^{-x'} x'^{q-1} dx',$$

или

$$(2) \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

это же есть искомый результат. Мы перейдемъ теперь къ разбору главныхъ свойствъ функций второго рода.

Первое свойство функций Γ .

517. Интегрируя по частямъ дифференціалъ $x^{p-1} \times e^{-x} dx$, имѣемъ

$$\int x^{p-1} e^{-x} dx = -x^{p-1} e^{-x} + (p-1) \int e^{-x} x^{p-2} dx.$$

Если $p > 1$, то проинтегрированная часть уничтожается для обоихъ предѣловъ 0 и ∞ , поэтому имѣемъ

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx = (p-1) \int_0^\infty e^{-x} x^{p-2} dx,$$

т. е.

$$(1) \quad \Gamma(p) = (p-1) \Gamma(p-1);$$

это уравненіе выражаетъ первое свойство функций Γ ; непосредственно вычисляемъ, означивъ черезъ m цѣлое число, меньшее p ,

$$(2) \quad \Gamma(p) = (p-1)(p-2) \dots (p-m) \Gamma(p-m),$$

откуда слѣдуетъ, что, если функция Γ извѣстна для всѣхъ значеній аргумента p , заключающихся между 0 и 1, или вообще, заключающихся между двумя послѣдовательными цѣлыми числами, то та же функция будетъ также извѣстна для всѣхъ другихъ дѣйствительныхъ значеній аргумента.

Если p цѣлое число и если сдѣлаемъ въ уравненіи (2) $m = p - 1$, то получимъ

$$\Gamma(p) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1) \Gamma(1);$$

но такъ какъ интегралъ $\int e^{-x} dx$ равенъ $-e^{-x} + \text{const.}$, то

$$(3) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \Gamma(1) = 1;$$

поэтому

$$(4) \quad \Gamma(p) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1),$$

такимъ образомъ, если p цѣлое число, большее 1, то $\Gamma(p)$ приводится къ произведенію $p-1$ первыхъ цѣлыхъ чиселъ; этотъ же результатъ уже былъ изложенъ въ § 593.

Второе свойство функцій Γ .

518. Свойство, которое мы сейчасъ изложимъ, позволяетъ привести къ $\frac{1}{2}$ промежутокъ единицы, въ которомъ, по первому свойству, достаточно произвести вычисленіе функцій Γ ; оно даетъ, наприимѣръ, значенія этой функцій, отвѣчающія значеніямъ аргумента, заключеннымъ между $\frac{1}{2}$ и 1, когда извѣстны значенія, относящіяся къ предѣламъ 0 и $\frac{1}{2}$.

Если въ формулѣ (2) § 516 сдѣлаемъ $q = 1 - p$, гдѣ p заключается между 0 и 1, то, по причинѣ $\Gamma(1) = 1$, получимъ

$$\Gamma(p) \Gamma(1-p) = B(p, 1-p),$$

и, на основаніи формулы (3) § 515,

$$\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x}.$$

Но мы знаемъ, что интеграль, содержащійся въ этой формулѣ, имѣетъ значеніемъ $\frac{\pi}{\sin p\pi}$; поэтому имѣемъ

$$(1) \quad \Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Эта и есть формула, выражающая второе свойство функцій Γ . Если въ ней предположимъ $p = \frac{1}{2}$, то она дастъ

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi,$$

откуда

$$(2) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Эта формула не отличается от той, которую мы вывели въ § 497. Дѣйствительно, если сдѣлаемъ въ формулѣ (2) § 515 $p = \frac{1}{2}$ и если напишемъ x^2 вмѣсто x , то будемъ имѣть

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Третье свойство функцій Г.

519. Если предположимъ въ формулѣ (1) § 515 $q = p$, то получимъ

$$(1) \quad B(p, p) = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{p-1} dx.$$

Мы видимъ, что коэффициентъ dx подъ знакомъ \int принимаетъ равныя значенія, когда x получаетъ значенія $\frac{1}{2} + h$ и $\frac{1}{2} - h$, равно удаленныя отъ $\frac{1}{2}$; отсюда слѣдуетъ, что въ предыдущей формулѣ, для высшаго предѣла, можно будетъ взять $\frac{1}{2}$ вмѣсто 1, если только удвоимъ результатъ. Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$B(p, p) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{p-1} dx.$$

Если сдѣлаемъ теперь $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2} \sqrt{y}$, $dx = -\frac{1}{4} \frac{dy}{\sqrt{y}}$, то предѣлы интеграла относительно y будутъ 1 и 0; перемѣстивъ эти предѣлы и измѣнивъ знакъ результата, будемъ имѣть

$$B(p, p) = \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}} (1-y)^{p-1} dy,$$

т. е.

$$(2) \quad (p, p) = \frac{1}{2^{2p-1}} B\left(\frac{1}{2}, p\right),$$

если же, употребивъ формулу (2) § 516, замѣнимъ Γ ихъ значеніями въ Γ , потомъ припомнимъ, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, то получимъ

$$(3) \quad \Gamma(p) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2p-1}} \Gamma(2p).$$

Это уравненіе (3) выражаетъ третье свойство функцій Γ ; оно содержится въ другомъ болѣе общемъ свойствѣ, которое мы изложимъ далѣе.

Выраженіе функціи $\log \Gamma(x)$ посредствомъ опредѣленнаго интеграла.

520. Если продифференцируемъ формулу

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha} \alpha^{x-1} d\alpha,$$

и если означимъ черезъ $\Gamma'(x)$ производную $\Gamma(x)$, то получимъ

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha} \alpha^{x-1} \log \alpha d\alpha,$$

гдѣ знакъ \log означаетъ неперовскій логарифмъ. Формула (1) § 516, въ которой сдѣлаемъ $p=1$, даетъ

$$\frac{1}{\alpha} = \int_0^\infty e^{-\alpha z} dz;$$

если умножимъ эту формулу на $d\alpha$ и если возьмемъ интегралъ между предѣлами 1 и α , то, какъ мы сказали въ § 494, будемъ имѣть

$$\log \alpha = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-\alpha z}}{z} dz.$$

Замѣнивъ $\log \alpha$ въ предыдущемъ выраженіи $\Gamma'(x)$ этимъ значеніемъ, получимъ

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha} \alpha^{x-1} d\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-\alpha z}}{z} dz;$$

можно нарушить порядокъ интегрированія и написать

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[e^{-z} \int_0^\infty e^{-\alpha} \alpha^{x-1} d\alpha - \int_0^\infty e^{-(1+z)\alpha} \alpha^{x-1} d\alpha \right],$$

Первый изъ интеграловъ, находящихся въ скобкахъ, есть $\Gamma(x)$; второй имѣетъ значеніемъ (§ 516) $\frac{\Gamma(x)}{(1+z)^x}$. Поэтому имѣемъ

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x) \int_0^\infty \left[e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^x} \right] \frac{dz}{z},$$

или, раздѣливъ на $\Gamma(x)$

$$(1) \quad \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty [e^{-z} - (1+z)^{-x}] \frac{dz}{z};$$

если умножимъ обѣ части этой формулы на dx и возьмемъ потомъ интегралъ между предѣлами 1 и x , то, такъ какъ $\log \Gamma(1) = \log 1 = 0$, получимъ

$$(2) \quad \log \Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1) e^{-z} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-x}}{\log(1+z)} \right] \frac{dz}{z}.$$

Можно упростить это выраженіе $\log \Gamma(x)$, поступивъ слѣдующимъ образомъ: сдѣлавъ $x = 2$, такъ какъ $\log \Gamma(2) = \log 1 = 0$, получимъ

$$(3) \quad 0 = \int_0^\infty \left[e^{-z} - \frac{z(1+z)^{-2}}{\log(1+z)} \right] \frac{dz}{z},$$

если же умножимъ уравненіе (3) на $x - 1$, потомъ вычтемъ его изъ уравненія (2), то получимъ

$$(4) \quad \log \Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)(1+z)^{-2} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-x}}{z} \right] \frac{dz}{\log(1+z)};$$

наконецъ, если положимъ $\log(1+z) = \alpha$, $z = e^\alpha - 1$, то интегралъ относительно α долженъ быть взятъ между тѣми же предѣлами 0 и ∞ , и мы будемъ имѣть окончательно

$$(5) \quad \log \Gamma(x) = \int_0^\infty \left[(x-1)e^{-\alpha} - \frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}} \right] \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Разложение въ рядъ функции $\log \Gamma(x)$.

521. Взявъ дифференціалъ формулы (5) предыдущаго параграфа, получимъ

$$(1) \quad \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}} \right) d\alpha.$$

и, взявъ снова дифференціалъ,

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} = \int_0^\infty \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}} d\alpha.$$

Замѣнимъ множитель $\frac{1}{1 - e^{-\alpha}}$ его значеніемъ

$$1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + e^{-3\alpha} + \dots,$$

будемъ имѣть

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha d\alpha + \int_0^\infty e^{-\alpha(x+1)} \alpha d\alpha + \int_0^\infty e^{-\alpha(x+2)} \alpha d\alpha + \dots,$$

или, вычисливъ каждый членъ посредствомъ формулы (1) § 516, получимъ

$$(2) \quad \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \dots,$$

формулу, которой вторая часть есть рядъ, остающійся сходящимся для какого угодно x .

Если возьмемъ интегралъ между предѣлами 1 и x всѣхъ членовъ формулы (2), умноженныхъ на dx , то будемъ имѣть

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = -C + \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x+1}\right) \\ \quad + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x+2}\right) + \dots, \end{cases}$$

и рядъ, входящій во вторую часть этой формулы, будетъ сходящимся точно такъ же, какъ тотъ, изъ котораго онъ былъ выведенъ посредствомъ интегрированія. Что касается количества $-C$, то оно очевидно равно значенію, принимаемому производной $\frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$ для $x=1$, и мы, на основаніи уравненія (1), имѣемъ

$$(4) \quad C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha} d\alpha;$$

это количество C известно под именем *Эйлеровой постоянной*; мы сейчас увидимъ, какъ можно вычислить значеніе этой постоянной.

Если возьмемъ интегралъ формулы (3), умноженной на dx , между предѣлами 1 и x , то, такъ какъ $\log \Gamma(1) = 0$, получимъ

$$\begin{cases} \log \Gamma(x) = -C(x-1) + \left(\frac{x-1}{1} - \log \frac{x}{1}\right) \\ + \left(\frac{x-1}{2} - \log \frac{x+1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{x-1}{m} - \log \frac{x+m-1}{m}\right) + \dots, \end{cases}$$

формулу, которой вторая часть есть сходящійся рядъ, точно такъ же какъ тотъ, который входитъ въ формулу (3). Нетрудно освободиться отъ постоянной C ; если, въ самомъ дѣлѣ, положимъ въ формулѣ (5) $x = 2$, то получимъ

$$(6) \quad 0 = -C + \left(\frac{1}{1} - \log \frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \log \frac{3}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{m} - \log \frac{m+1}{m}\right) + \dots$$

если же изъ уравненія (5) вычтемъ уравненіе (6), умноженное на $x-1$, то будемъ имѣть

$$(7) \quad \begin{cases} \log \Gamma(x) = \left[(x-1) \log \frac{2}{1} - \log \frac{x}{1} \right] \\ + \left[(x-1) \log \frac{3}{2} - \log \frac{x+1}{2} \right] + \dots \\ + \left[(x-1) \log \frac{m+1}{m} - \log \frac{x+m-1}{m} \right] + \dots, \end{cases}$$

или, для краткости,

$$(8) \quad \log \Gamma(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[(x-1) \log \left(1 + \frac{1}{m}\right) - \log \left(1 + \frac{x-1}{m}\right) \right].$$

Означимъ черезъ $\log(1 + \varepsilon_m)$ сумму членовъ, слѣдующихъ за m членомъ въ рядѣ (7) или (8); такъ какъ этотъ рядъ сходящійся, то количество ε_m уничтожается для $m = \infty$, и мы будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \log \Gamma(x) = & \left[(x-1) \log \frac{2}{1} - \log \frac{x}{1} \right] + \dots \\ & + \left[(x-1) \log \frac{m+1}{m} - \log \frac{x+m-1}{m} \right] + \log(1 + \varepsilon_m) \end{aligned}$$

или, переходя отъ логарифмовъ къ числамъ,

$$\Gamma(x) = \frac{(1 \cdot 2 \dots m) m^{x-1}}{x(x+1) \dots (x+m-1)} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{x-1} (1 + \varepsilon_m);$$

множитель $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{x-1}$ для $m = \infty$ обращается въ 1, его можно предположить заключающимся въ $1 + \varepsilon_m$ и написать

$$(9) \quad \Gamma(x) = \frac{(1 \cdot 2 \dots m) m^{x-1}}{x(x+1) \dots (x+m-1)} (1 + \varepsilon_m),$$

т. е. что

$$(10) \quad \Gamma(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1 \cdot 2 \dots m) m^{x-1}}{x(x+1) \dots (x+m-1)}, \quad \text{для } m = \infty.$$

Замѣтимъ еще, что формула (6) для Эйлеровой постоянной дастъ

$$(11) \quad C = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \log m\right), \quad \text{для } m = \infty.$$

Разложение функции $\log \Gamma(1+x)$ въ сходящійся рядъ, расположенный по возрастающимъ степенямъ x для значеній x , заключающихся между -1 и $+1$.

522 Если въ формулѣ (2) § 521 x измѣнимъ въ $x+1$, то будемъ имѣть

$$\frac{d^2 \log \Gamma(1+x)}{dx^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \dots,$$

взявъ дифференціалъ $n-2$ раза, получимъ

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{d^n \log \Gamma(1+x)}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{n} \left[\frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} + \dots \right];$$

положимъ вообще

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots,$$

для $x=0$ будемъ имѣть

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{d^n \log \Gamma(1+x)}{dx^n} + (-1)^n \frac{S_n}{n},$$

если $n > 1$; сверхъ того, для $x=0$ имѣемъ

$$\frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx} = -C, \quad \log \Gamma(1+x) = 0,$$

поэтому для значений x , заключенныхъ между -1 и $+1$, формула Маклорена дастъ

$$(1) \quad \log \Gamma(1+x) = -Cx + S_2 \frac{x^2}{2} - S_3 \frac{x^3}{3} + S_4 \frac{x^4}{4} + \dots$$

Эта формула неудобна для вычислений, потому что суммы S не такъ быстро убываютъ; но можно получить болѣе сходящіеся ряды; если, послѣднему уравненію придадимъ слѣдующее:

$$0 = -\log(1+x) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

то получимъ

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \log \Gamma(1+x) &= -\log(1+x) + (1-C)x \\ &+ \frac{1}{2}(S_2-1)x^2 - \frac{1}{3}(S_3-1)x^3 + \dots; \end{aligned} \right.$$

члены этого ряда достаточно быстро убываютъ, но можно еще увеличить его сходимость. Измѣнивъ въ предыдущей формулѣ x въ $-x$, получимъ

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \log \Gamma(1-x) &= -\log(1-x) - (1-C)x \\ &+ \frac{1}{2}(S_2-1)x^2 + \frac{1}{3}(S_3-1)x^3 + \dots \end{aligned} \right.$$

Но

$$\Gamma(1+x) = x \Gamma(x), \quad \Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

перемноживъ же эти равенства, получимъ

$$\Gamma(1+x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x},$$

откуда

$$\log \Gamma(1+x) + \log \Gamma(1-x) = \log \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$

Сложивъ это уравненіе съ уравненіемъ (2), вычтя потомъ уравненіе (3) и раздѣливъ результатъ на 2, получимъ

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \log \Gamma(1+x) &= \frac{1}{2} \log \frac{\pi x}{\sin \pi x} - \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + (1-C)x \\ &- (S_3-1) \frac{x^3}{3} - (S_5-1) \frac{x^5}{5} - (S_7-1) \frac{x^7}{7} - \dots \end{aligned} \right.$$

На основаніи вышедодокзанныхъ свойствъ, функція Γ будетъ извѣстна для всѣхъ положительныхъ значеній аргумента, если она извѣстна для значеній, заключенныхъ между 0 и $\frac{1}{2}$, или между $\frac{1}{2}$ и 1, или между 1 и $1 + \frac{1}{2}$, и т. д.; уравненіе (4) позволяетъ вычислить очень быстро $\log \Gamma(1+x)$ для значеній x , заключенныхъ между 0 и $\frac{1}{2}$. Въ своемъ „*Traité des fonctions elliptiques*“ Лежандръ далъ съ шестнадцатію десятичными знаками значенія S_n отъ $n=2$ до $n=35$.

Если въ формулѣ (4) сдѣлаемъ $x=1$ и $x=\frac{1}{2}$, что даетъ $\Gamma(x+1)=1$ и $\Gamma(x+1)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, то будемъ имѣть два уравненія, которыя могутъ служить для вычисленія постоянной C ; замѣтивъ, что $\log \frac{\pi x}{\sin \pi x} + \log(1-x)=0$, для $x=1$ найдемъ

$$1-C = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{3} (S_3 - 1) + \frac{1}{5} (S_5 - 1) + \frac{1}{7} (S_7 - 1) + \dots,$$

$$1-C = \log \frac{3}{2} + \frac{1}{3.4} (S_3 - 1) + \frac{1}{5.16} (S_5 - 1) + \frac{1}{7.64} (S_7 - 1) + \dots;$$

достаточно четырнадцати суммъ S для полученія C съ пятнадцатію десятичными знаками; такимъ образомъ найдемъ

$$(5) \quad C = 0,57721\,56649\,015328;$$

мы покажемъ далѣе болѣе скорый способъ вычисленія этой постоянной, не требующій предварительнаго вычисленія суммъ S .

Вычисленіе функціи $\frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$ въ случаѣ, когда x есть соизмѣримое число.

523. Функція $\frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$ можетъ быть выражена въ конечномъ видѣ, конечнымъ числомъ членовъ во всѣхъ случаяхъ, когда x есть число соизмѣримое. Если, въ самомъ дѣлѣ, сложимъ два уравненія (1) и (4) § 521, то получимъ

$$\frac{d \log \Gamma(x)}{dx} + C = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}} d\alpha,$$

или, положивъ $e^{-z} = z$,

$$(1) \quad \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} + C = \int_0^1 \frac{1 - z^{x-1}}{1 - z} dz;$$

если имѣемъ $x = \frac{m}{n}$, гдѣ m и n цѣлыя числа, и если сдѣлаемъ $z = \alpha^n$, то будемъ имѣть

$$\frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = -C + n \int_0^1 \frac{\alpha^{n-1} - \alpha^{m-1}}{1 - \alpha^n} d\alpha \quad \left(\text{для } x = \frac{m}{n} \right);$$

дифференціалъ подъ знакомъ \int здѣсь есть раціональная дробь, и слѣдовательно его интегралъ можетъ быть выраженъ посредствомъ количествъ алгебраическихъ логарифмическихъ, или круговыхъ. Напримѣръ, будемъ имѣть

$$\frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = -C - 2 \int_0^1 \frac{d\alpha}{1 + \alpha} = -C + \log 4 \quad \left(\text{для } x = \frac{1}{2} \right).$$

Если количество x приводится къ цѣлому числу, то формула (1) даетъ

$$\frac{d \log \Gamma(x)}{dx} + C = \int_0^1 (1 + z + z^2 + \dots + z^{x-2}) dz,$$

т. е.

$$(2) \quad \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} + C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x-1};$$

сумма, содержащаяся во второй части этой формулы, извѣстна подъ именемъ *гармонической строки*.

Розысканіе minimum функціи $\Gamma(x)$.

524. Формула (2) § 521 показываетъ, что функція $\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2}$ положительная для всѣхъ значеній переменнѣй x , предположенной дѣйствительной и положительной; слѣдовательно, функція $\frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$ или $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ есть постоянно возрастающая; сверхъ того, мы видимъ изъ формулы (3) того же параграфа, что эта функція для $x = 0$ равна $-\infty$ и для $x = +\infty$ равна $+\infty$. Отсюда слѣдуетъ, что производная $\Gamma'(x)$ можетъ уничто-

житься только одинъ разъ, и слѣдовательно функція $\Gamma(x)$ допускаетъ только одинъ minimum. Этотъ minimum имѣетъ необходимо мѣсто для значеній x , заключенныхъ между 1 и 2, потому что $\Gamma(2) = \Gamma(1)$; когда x есть бесконечно-малая, тогда функція $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{1}{x}$ есть бесконечность; когда x возрастаетъ до ∞ , тогда $\Gamma(x)$ убываетъ до тѣхъ поръ, пока не достигнетъ своего minimum, а потомъ эта функція возрастаетъ до ∞ .

Если желаемъ получить значеніе x , отвѣчающее minimum $\Gamma(1+x)$, то достаточно опредѣлить единственный положительный корень уравненія $\Gamma'(1+x) = 0$ или $\frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx} = 0$. Это уравненіе, на основаніи формулы (2) § 522, есть

$$0 = -\frac{1}{1+x} + (1-C) + (S_2-1)x - (S_3-1)x^2 + \dots,$$

и нетрудно видѣть, что этотъ корень заключается между 0,4 и 0,5; посредствомъ извѣстныхъ способовъ приближенія находимъ

$$1+x = 1,4616321 \dots;$$

посредствомъ формулы (2) или (4) § 522 получимъ

$$\log \text{vulg } \Gamma(1+x) = \overline{1},9472392,$$

откуда

$$\Gamma(1+x) = 0,8856032.$$

Замѣчаніе на интерполированіе численной функціи

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-1).$$

525. Такъ какъ имѣемъ

$$\Gamma(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-1),$$

когда x есть цѣлое число, то функція $\Gamma(x)$ можетъ служить для интерполированія ряда, котораго общій членъ есть $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-1)$. Предъидущая формула выражаетъ, въ самомъ дѣлѣ, это произведеніе посредствомъ непрерывной функціи

отъ x , въ которой переменная способна принимать всѣ мнимыя значенія, которыхъ дѣйствительная часть положительная. Но формула (8) или (10) § 521, снабжаетъ гораздо болѣе общимъ способомъ интерполированія, потому что она позволяетъ выразить произведение $1.2.3 \dots (x-1)$ посредствомъ непрерывной функціи отъ x , въ которой переменная можетъ принимать какія угодно дѣйствительныя или мнимыя значенія. Такъ какъ этотъ результатъ есть крайней важности, то необходимо показать, что самыя элементарныя разсмотрѣнія непосредственно приводятъ къ формуламъ, о которыхъ мы говоримъ, когда стараемся интерполировать численную функцію $1.2.3 \dots (x-1)$.

Пусть поэтому будутъ x и m два цѣлыя положительныя числа; $x-1$ дробей

$$\frac{m}{m+1}, \frac{m}{m+2}, \dots, \frac{m}{m+x-1}$$

будутъ стремиться къ единицѣ, если m стремится къ безконечности, и если x остается постоянной; то же самое поэтому будетъ и съ произведеніемъ изъ этихъ $x-1$ дробей и мы будемъ имѣть

$$\frac{m^{x-1}}{(m+1)(m+2) \dots (m+x-1)} = \frac{1}{1+\epsilon_m},$$

гдѣ ϵ_m есть количество, уничтожающееся для $m = \infty$. Умноживъ оба члена дроби первой части на $1.2 \dots m$ и уничтоживъ знаменателя $1+\epsilon_m$, получимъ

$$1 = \frac{(1.2.3 \dots m) m^{x-1}}{1.2.3 \dots (m+x-1)} (1+\epsilon_m),$$

умноживъ же обѣ части на $1.2.3 \dots (x-1)$, найдемъ

$$1.2.3 \dots (x-1) = \frac{(1.2.3 \dots m) m^{x-1}}{x(x+1) \dots (m+x-1)} (1+\epsilon_m)$$

или

$$1.2.3 \dots (x-1) = \lim \frac{(1.2.3 \dots m) m^{x-1}}{x(x+1) \dots (m+x-1)} \text{ (для } m = \infty \text{)}.$$

Это именно есть формула (10) § 521 въ томъ случаѣ, когда x цѣлое и мы безъ труда выведемъ изъ нея формулу (8) того же параграфа.

Въ розысканіяхъ, которыя были предприняты по этому предмету, Гауссъ бралъ формулу (10) поименованнаго параграфа для опредѣленія $\Gamma(x)$, а Ліувилль, исходя изъ той же точки зрѣнія, пришелъ ко многимъ интереснымъ результатамъ *); мы видимъ изъ предъидущаго, насколько натураленъ этотъ ходъ дѣйствій. На основаніи развитаго нами анализа, вторая часть формулы (8) § 521 есть рядъ, который остается сходящимся для всѣхъ положительныхъ значеній x , а слѣдовательно, въ томъ же предположеніи, вторая часть формулы (10) того же параграфа стремится къ опредѣленному предѣлу. Но, чтобы оправдать новое опредѣленіе функціи Γ , необходимо доказать, что то же самое имѣетъ мѣсто для всѣхъ отрицательныхъ или мнимыхъ значеній x . Мы видимъ сначала изъ формулы (10) (§ 521), что $\Gamma(x)$ есть безконечность, когда x равно нулю или какому-нибудь цѣлому отрицательному числу; оставивъ этотъ случай въ сторонѣ, я говорю, что рядъ формулы (8) постоянно сходящійся. Въ самомъ дѣлѣ, общій членъ, въ которомъ предполагаемъ m большимъ модуля $x - 1$, есть

$$(x - 1) \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + \dots \right) - \left[\frac{x - 1}{m} - \frac{(x - 1)^2}{2m^2} + \dots \right]$$

или

$$\frac{(x - 1)(x - 2)}{2m^2} (1 + \epsilon_m),$$

гдѣ ϵ_m есть количество, уничтожающееся для $m = \infty$; отсюда слѣдуетъ, что, начиная съ достаточно удаленнаго мѣста, члены ряда убываютъ какъ члены ряда $\sum \frac{1}{m^2}$; поэтому этотъ рядъ постоянно сходящійся и, слѣдовательно, вторая часть формулы, которой мы занимаемся, стремится къ конечному и опредѣленному предѣлу.

*) См. по этому предмету замѣтку Ліувилля, напечатанную въ XVI томѣ 1-й серіи *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

Новыя доказательства свойствъ функціи $\Gamma(x)$.

526. Изложенныя выше свойства функціи Γ непосредственно вытекаютъ, какъ мы сейчасъ покажемъ, изъ формулы (10) § 521.

Первое свойство. — Имѣемъ:

$$\Gamma(x) = \frac{(1 \cdot 2 \dots m) m^{x-1}}{x(x+1) \dots (x+m-1)} (1 + \epsilon_m),$$

$$\Gamma(x+1) = \frac{(1 \cdot 2 \dots m) m^x}{(x+1)(x+2) \dots (x+m)} (1 + \epsilon'_m),$$

откуда

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = x \frac{m}{x+m} \frac{1 + \epsilon'_m}{1 + \epsilon_m},$$

сдѣлавъ же $m = \infty$, получимъ

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x),$$

это же есть первое свойство функціи Γ .

527. Второе свойство. — Если перемножимъ между собой два уравненія

$$\Gamma(x) = \frac{(1 \cdot 2 \dots m) m^{x-1}}{x(x+1) \dots (x+m-1)} (1 + \epsilon_m),$$

$$\Gamma(1-x) = \frac{(1 \cdot 2 \dots m) m^{-x}}{(1-x)(2-x) \dots (m-x)} (1 + \epsilon'_m),$$

то получимъ

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\left(1 + \frac{x}{m}\right) (1 + \epsilon_m) (1 + \epsilon'_m)}{x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)};$$

если сдѣлаемъ $m = \infty$, то числитель второй части этой формулы обратится въ 1 и знаменатель на основаніи извѣстной формулы

$$\sin z = z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

см. мой *Курсъ Тригонометріи*, 5-е изданіе стр. 247)

въ $\frac{1}{\pi} \sin \pi x$; поэтому имѣемъ

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

или, умножая на x ,

$$\Gamma(1+x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$

528. ТРЕТЬЕ СВОЙСТВО. — Третье свойство функции Γ было доказано въ § 519 только для частного случая; мы сейчас изложимъ это свойство во всей его общности.

Пусть x какое-нибудь дѣйствительное или мнимое количество, n и i два цѣлыя положительныя числа; если въ формулѣ (9) § 521 замѣнимъ x черезъ $x + \frac{i}{n}$, то получимъ

$$\Gamma\left(x + \frac{i}{n}\right) = \frac{(1 \cdot 2 \dots m) m^{x + \frac{i}{n} - 1}}{\left(x + \frac{i}{n}\right) \left(x + \frac{i}{n} + 1\right) \dots \left(x + \frac{i}{n} + m - 1\right)} (1 + \epsilon_m);$$

давъ потомъ i значенія $0, 1, 2, \dots, n-1$, и перемноживъ между собой полученные равенства, получимъ

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(x + \frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right) \\ = \frac{(1 \cdot 2 \dots m)^n m^{nx - \frac{n+1}{2}} n^{mn}}{nx (nx+1) \dots (nx+mn-1)} (1 + \epsilon_m), \end{aligned}$$

гдѣ ϵ_m означаетъ всегда количество, уничтожающееся для $m = \infty$. Но замѣнивъ въ уравненіи (9) § 521 x черезъ nx и написавъ mn вмѣсто m , также получимъ

$$\Gamma(nx) = \frac{(1 \cdot 2 \dots mn) (mn)^{nx-1}}{nx (nx+1) \dots (nx+mn-1)} (1 + \epsilon'_m),$$

изъ этихъ же уравненій имѣемъ

$$\frac{\Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(x + \frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right)}{n^{-nx} \Gamma(nx)} = \frac{(1 \cdot 2 \dots m)^n n^{mn+1}}{(1 \cdot 2 \dots mn) m^{\frac{n-1}{2}}} (1 + \epsilon_m),$$

гдѣ ϵ_m опять означаетъ количество, уничтожающееся для

$m = \infty$. Предѣлъ второй части этой формулы есть функція отъ n , независящая отъ x ; обозначивъ ее черезъ $\varphi(n)$, будемъ имѣть

$$(1) \quad \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(x + \frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = n^{-nx} \Gamma(nx) \varphi(n),$$

гдѣ функція $\varphi(n)$ опредѣляется формулой

$$\varphi(n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1 \cdot 2 \dots m)^n \frac{n^{mn+1}}{n-1}}{(1 \cdot 2 \dots mn) m^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Если сдѣлаемъ

$$\psi(m) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{m^{m + \frac{1}{2}}},$$

то можно будетъ также написать

$$\varphi(n) = \sqrt[n]{n} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{[\psi(m)]^n}{\psi(mn)} = \sqrt[n]{n} A_n,$$

гдѣ для краткости положено

$$A_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{[\psi(m)]^n}{\psi(mn)};$$

измѣнивъ m въ $2m$, также получимъ

$$A_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{[\psi(2m)]^n}{\psi(2mn)},$$

далѣе

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{A_n^2}{A_n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{[\psi(m)]^{2n}}{[\psi(mn)]^2} : \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{[\psi(2m)]^n}{\psi(2mn)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{\psi(m)^2}{\psi(2m)} \right]^2 : \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{[\psi(mn)]^2}{\psi(2mn)}; \end{aligned}$$

но количества $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{[\psi(m)]^2}{\psi(2m)}$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{[\psi(mn)]^2}{\psi(2mn)}$ равны A_2 ; поэтому имѣемъ

$$A_n = A_2^{n-1} \quad \text{и} \quad \varphi(n) = \sqrt[n]{n} A_2^{n-1};$$

что касается постоянной A_2 , то ея значеніе есть

$$A_2 = \frac{\varphi(2)}{\sqrt{2}} = \lim \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m)^2 2^{2m + \frac{1}{2}}}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2m) m^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim \sqrt{4 \frac{2}{1} \frac{2}{2} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \dots \frac{2m-2}{2m-1} \frac{2m}{2m-1}};$$

на основаніи формулы Валлиса (§ 492), количество подъ радикаломъ имѣеть предѣломъ $4 \frac{\pi}{2}$ или 2π ; поэтому имѣемъ

$$A_2 = \sqrt{2\pi},$$

слѣдовательно

$$\varphi(n) = n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

и

$$(2) \quad \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) \dots \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-nx + \frac{1}{2}} \Gamma(nx).$$

Вотъ какое уравненіе выражаетъ третье свойство функціи Γ ; сдѣлавъ $n=2$, получимъ

$$\Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^{-2x+1} \Gamma(2x),$$

это же согласуется съ результатомъ, который мы получили въ § 519.

Доказательство, которое мы только-что дали формулѣ (2), есть прямое и независящее отъ другихъ свойствъ функціи Γ . Чтобы опредѣлить постоянную, мы могли бы съ пользою употребить соотношеніе $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; такимъ образомъ, сдѣлавъ $x = \frac{1}{2}$ и $n = 2$ въ формулѣ (1), мы имѣли бы

$$\sqrt{\pi} = \frac{1}{2} \varphi(2) = \frac{1}{2} \sqrt{2} A_2, \quad \text{откуда} \quad A_2 = \sqrt{2\pi},$$

какъ это мы нашли другимъ способомъ. Наконецъ мы можемъ очень просто получить функцію $\varphi(n)$, какъ это дѣлалъ Лежандръ, если употребимъ второе свойство функціи Γ ; положимъ въ самомъ дѣлѣ въ формулѣ (1) $x=0$, замѣнивъ сперва $\Gamma(x)$ черезъ $\frac{\Gamma(x+1)}{x}$ и $\Gamma(nx)$ черезъ $\frac{\Gamma(nx+1)}{nx}$, получимъ

$$\frac{1}{n} \varphi(n) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

или, перемѣнивъ порядокъ множителей,

$$\frac{1}{n} \varphi(n) = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{1}{n}\right);$$

перемноживъ эти два значенія $\frac{1}{n} \varphi(n)$ и замѣтивъ, что

$$\Gamma\left(\frac{i}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-i}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{i\pi}{n}}, \text{ будемъ имѣть}$$

$$\varphi^2(n) = \frac{n^2 \pi^{n-1}}{\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n}};$$

но мы знаемъ, что знаменатель этого выраженія равенъ $\frac{n}{2^{n-1}}$: поэтому

$$\varphi^2(n) = n (2\pi)^{n-1} \quad \text{и} \quad \varphi(n) = \sqrt{n} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

какъ это мы нашли выше.

Приложеніе теоріи эйлеровыхъ интеграловъ къ отысканію нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ.

529. Если m обозначаетъ положительное количество, то (§ 516)

$$(1) \quad \int_0^\infty e^{-mx} x^{p-1} dx = \frac{\Gamma(p)}{m^p}$$

Эта формула существуетъ и въ томъ случаѣ, когда m есть мнимое количество, котораго дѣйствительная часть положительная, но это предложеніе требуетъ доказательства. Замѣнимъ m черезъ $a - t\sqrt{-1}$ и обозначимъ черезъ R и Φ модуль и аргументъ значенія, которое приметъ тогда предъидущій интегралъ, будемъ имѣть

$$(2) \quad R e^{\Phi \sqrt{-1}} = \int_0^\infty e^{-(a-t\sqrt{-1})x} x^{p-1} dx;$$

Очевидно, что это выраженіе останется конечнымъ, если a

есть количество положительное. Положимъ,

$$(3) \quad t = a \operatorname{tang} \varphi,$$

гдѣ φ есть уголъ, заключающійся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$; $R \cos \Phi$ и $R \sin \Phi$ будутъ непрерывныя функціи отъ φ , соотвѣтственно равныя дѣйствительному члену второй части формулы (2) и части, умноженной на $\sqrt{-1}$. Чтобы получить дифференціалы этихъ функцій, можно дифференцировать подъ знакомъ \int интегралы, выражающіе ихъ значенія; очевидно, что мы получимъ тотъ же самый результатъ, болѣе простымъ способомъ, если произведемъ дифференцированіе надъ формулой (2). Такимъ образомъ имѣемъ

$$(4) \quad R e^{\Phi \sqrt{-1}} \left(\frac{d \log R}{d \varphi} + \sqrt{-1} \frac{d \Phi}{d \varphi} \right) = \frac{a \sqrt{-1}}{\cos^2 \varphi} \int_0^\infty e^{-(a-t \sqrt{-1})x} x^p dx;$$

интегрированіе по частямъ даетъ

$$\begin{aligned} \int e^{-(a-t \sqrt{-1})x} x^p dx \\ = - \frac{e^{-(a-t \sqrt{-1})x} x^p}{a-t \sqrt{-1}} + \frac{p}{a-t \sqrt{-1}} \int e^{-(a-t \sqrt{-1})x} x^{p-1} dx, \end{aligned}$$

а такъ какъ проинтегрированная часть уничтожается для предѣловъ 0 и ∞ , на основаніи того, что $a > 0$, то

$$\int_0^\infty e^{-(a-t \sqrt{-1})x} x^p dx = \frac{p \cos \varphi e^{\Phi \sqrt{-1}}}{a} R e^{\Phi \sqrt{-1}},$$

это же приводитъ уравненіе (4) къ

$$\frac{d \log R}{d \varphi} + \sqrt{-1} \frac{d \Phi}{d \varphi} = \frac{p \sqrt{-1} e^{\Phi \sqrt{-1}}}{\cos \varphi}.$$

Сравнивъ между собой дѣйствительныя и мнимыя части, получимъ

$$\frac{d \log R}{d \varphi} = -p \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad \frac{d \Phi}{d \varphi} = p,$$

откуда

$$\log R = -p \int \frac{\sin \varphi d\varphi}{\cos^p \varphi} = \log \cos^p \varphi + \text{const.},$$

$$\Phi = p\varphi + \text{const.}$$

Но когда t или φ есть нуль, тогда $\Phi = 0$, $R = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$; поэтому

$$\Phi = p\varphi, \quad R = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \varphi,$$

и слѣдовательно формула (2) обращается въ

$$(5) \quad \int_0^\infty e^{-(a-t\sqrt{-1})x} x^{p-1} dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \varphi e^{p\varphi\sqrt{-1}}$$

и мы также можемъ написать

$$(6) \quad \int_0^\infty e^{-(a-t\sqrt{-1})x} x^{p-1} dx = \frac{\Gamma(p)}{(a-t\sqrt{-1})^p},$$

это же есть формула (1), въ которой сдѣлали $m = a - t\sqrt{-1}$. Но такъ какъ выраженіе $(a - t\sqrt{-1})^p$ способно принимать нѣсколько значеній, когда p есть дробь, то нужно хорошо замѣтить, что аргументъ этой степени долженъ быть полученъ отъ умноженія на p аргумента $a - t\sqrt{-1}$, взятаго между предѣлами $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

Формула (5) распадается на двѣ слѣдующихъ:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \cos tx dx &= \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \varphi \cos p\varphi \\ &= \frac{\Gamma(p)}{t^p} \sin^p \varphi \cos^p \varphi, \\ \int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \sin tx dx &= \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \varphi \sin p\varphi \\ &= \frac{\Gamma(p)}{t^p} \sin^p \varphi \sin p\varphi, \end{aligned} \right.$$

гдѣ три количества a , t , φ связаны между собой соотношеніемъ (3).

530. Мы допустили, что интегралы, входящіе въ эти формулы, имѣютъ конечныя и опредѣленныя значенія; это же

дѣйствительно имѣетъ мѣсто, когда количество a положительное, какъ это мы предполагали. Но не очевидно, что это будетъ такъ, когда a есть нуль, т. е. когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, если t имѣетъ конечное значеніе; въ этомъ случаѣ формулы (7) существуютъ только въ томъ случаѣ, когда p меньше единицы. Чтобы доказать это, достаточно будетъ разсмотрѣть второй изъ интеграловъ (7); то что мы сейчасъ будемъ говорить, приложимо и къ первому интегралу, съ соотвѣтствующими измѣненіями. Если количество t предполагается положительнымъ, то

$$(-1)^m u_m = \int_{\frac{m\pi}{t}}^{\frac{(m+1)\pi}{t}} x^{p-1} e^{-ax} \sin t x dx,$$

или, сдѣлавъ подстановку $x = \frac{z + m\pi}{t}$,

$$u_m = \frac{1}{t^p} \int_0^\pi (z + m\pi)^{p-1} e^{-\frac{a}{t}(z + m\pi)} \sin z dz;$$

очевидно, что интеграль, содержащійся во второй формулѣ (7), есть сумма сходящагося ряда

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots,$$

въ которомъ члены попеременно положительные и отрицательные; кромѣ того они бесконечно убываютъ, когда $a > 0$. Но когда a есть нуль, тогда u_m приводится къ выраженію

$$U_m = \frac{1}{t^p} \int_0^\pi (z + m\pi)^{p-1} \sin z dz,$$

которое обращается въ нуль для $m = \infty$ только въ томъ случаѣ, когда $p < 1$. Въ этомъ предположеніи рядъ

$$U_0 - U_1 + U_2 - U_3 + \dots$$

сходящійся, и я говорю, что онъ имѣетъ суммой значеніе, принимаемое суммой предъидущаго ряда для $a = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, если s и S обозначаютъ суммы обоихъ рядовъ, s_n и S_n суммы, образованныя изъ n первыхъ членовъ, r_n и R_n соотвѣт-

свующіе остатки, то будемъ имѣть

$$S - s = (S_n - s_n) + (R_n - r_n);$$

разность $S_n - s_n$ уничтожается вмѣстѣ съ a ; сверхъ того R_n и r_n стремятся тотъ и другой къ нулю, когда n возрастаетъ безпредѣльно; поэтому $S - s$ уничтожается для $a = 0$.

На основаніи этого формулы (7) для $a = 0$ или $\varphi = \frac{\pi}{2}$ дадутъ

$$(8) \quad \begin{cases} \int_0^\infty x^{p-1} \cos tx \, dx = \frac{\Gamma(p)}{t^p} \cos \frac{p\pi}{2}, \\ \int_0^\infty x^{p-1} \sin tx \, dx = \frac{\Gamma(p)}{t^p} \sin \frac{p\pi}{2}, \end{cases}$$

если только p заключается между 0 и 1.

Если въ послѣдней формулѣ $\Gamma(p)$ замѣнимъ его значеніемъ $\frac{\pi}{\Gamma(1-p) \sin p\pi}$, то получимъ

$$\int_0^\infty x^{p-1} \sin tx \, dx = \frac{\pi}{2t^p \Gamma(1-p) \cos \frac{p\pi}{2}};$$

интегралъ остается конечнымъ для $p = 0$, и мы имѣемъ

$$(9) \quad \int_0^\infty \frac{\sin tx}{x} \, dx = \frac{\pi}{2},$$

какъ это мы нашли уже въ § 494.

531. Предъидущія формулы позволяютъ опредѣлить громадное число опредѣленныхъ интеграловъ; мы сейчасъ дадимъ нѣсколько примѣровъ.

Замѣтимъ сначала, что уравненія (8) никоимъ образомъ не предполагаютъ формулы Эйлера, изъ которой мы вывели второе свойство эйлеровыхъ интеграловъ, и нетрудно, напротивъ, изъ нея вывести эту формулу. Дѣйствительно, умножимъ первое изъ уравненій (8) на $\frac{dt}{1+t^2}$ и возьмемъ потомъ интегралъ отъ $t = 0$ до $t = \infty$; интегрированіе можетъ быть произведено въ первой части подъ знакомъ \int , и мы имѣемъ

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{\cos t x}{1+t^2} dt \right] x^{p-1} dx = \Gamma(p) \cos \frac{p\pi}{2} \int_0^\infty \frac{t^{-p} dt}{1+t^2},$$

но такъ какъ x положительный, то интеграль $\int_0^\infty \frac{\cos t x}{1+t^2} dt$ равенъ $\frac{\pi}{2} e^{-x}$ (§ 496); первая часть предыдущей формулы обращается поэтому въ $\frac{\pi}{2} \Gamma(p)$, и мы имѣемъ

$$2 \int_0^\infty \frac{t^{-p} dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{\cos \frac{p\pi}{2}};$$

положивъ $t = x^{-\frac{1}{2}}$ и подставивъ $2p - 1$ вмѣсто p , получимъ

$$(10) \quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

это же есть формула, доказанная въ § 489. Нашъ анализъ предполагаетъ здѣсь, что p заключается между 0 и $\frac{1}{2}$, но предыдущая формула существуетъ для значеній p , заключающихся между 0 и 1, потому что интеграль первой части остается тотъ же самый, когда измѣняемъ x въ $\frac{1}{x}$ и p въ $1 - p$.

532. Пусть будетъ q число, заключающееся между 0 и 1, и предположимъ $p > q$. Умножаемъ каждое изъ уравненій (7) на

$$t^{q-1} dt = a^q \operatorname{tang}^{q-1} \varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi},$$

интегрируемъ потомъ отъ $t = 0$ до $t = +\infty$ или отъ $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$; въ первыхъ частяхъ интегрированіе можетъ быть произведено подъ знакомъ \int , и мы будемъ имѣть

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \left[\int_0^\infty t^{q-1} \cos t x dt \right] dx = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1} \varphi \sin^{q-1} \varphi \cos p \varphi d\varphi,$$

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \left[\int_0^\infty t^{q-1} \sin t x dt \right] dx = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1} \varphi \sin^{q-1} \varphi \sin p \varphi d\varphi.$$

На основаніи формулъ (8), интегралы относительно t , кото-

рые входятъ въ первыя части предыдущихъ уравненій, имѣютъ соотвѣтственно значеніями

$$\frac{\Gamma(q)}{x^q} \cos \frac{q\pi}{2}, \quad \frac{\Gamma(q)}{x^q} \sin \frac{q\pi}{2};$$

эти первыя части поэтому суть

$$\Gamma(q) \cos \frac{q\pi}{2} \int_0^\infty x^{p-q-1} e^{-ax} dx,$$

$$\Gamma(q) \sin \frac{q\pi}{2} \int_0^\infty x^{p-q-1} e^{-ax} dx,$$

или

$$\frac{\Gamma(p-q) \Gamma(q) \cos \frac{q\pi}{2}}{a^{p-q}}, \quad \frac{\Gamma(p-q) \Gamma(q) \sin \frac{q\pi}{2}}{a^{p-q}};$$

поэтому имѣемъ

$$(11) \quad \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1} \varphi \cos^{q-1} \varphi \sin p \varphi d\varphi = \frac{\Gamma(p-q) \Gamma(q)}{\Gamma(p)} \cos \frac{q\pi}{2}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1} \varphi \sin^{q-1} \varphi \sin p \varphi d\varphi = \frac{\Gamma(p-q) \Gamma(q)}{\Gamma(p)} \sin \frac{q\pi}{2}, \end{cases}$$

Если предположимъ $q = p - 1$, то будемъ имѣть $\Gamma(p - q) = 1$, $\Gamma(q) = \frac{\Gamma(p)}{p-1}$, и слѣдовательно,

$$(12) \quad \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-2} \varphi \cos p \varphi d\varphi = \frac{1}{p-1} \sin \frac{p\pi}{2}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-2} \varphi \sin p \varphi d\varphi = -\frac{1}{p-1} \cos \frac{p\pi}{2}; \end{cases}$$

въ этихъ формулахъ (12) число p предполагается > 1 .

Въ формулахъ (11) q должно быть < 1 ; но такъ какъ части каждой изъ нихъ состоятъ изъ непрерывныхъ функций отъ q , постоянно равныхъ между собой, то равенство будетъ имѣть мѣсто еще для $q = 1$; такимъ образомъ имѣемъ

$$(13) \quad \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2} \varphi \cos p \varphi d\varphi = 0, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2} \varphi \sin p \varphi d\varphi = \frac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Эти формулы предполагаютъ опять $p > 1$; нужно замѣтить, что изъ нихъ можно вывести формулы (12) посредствомъ измѣненія φ въ $\frac{\pi}{2} - \varphi$, и обратно.

Если во второмъ уравненій (11) $\Gamma(q)$ замѣнимъ черезъ $\frac{\pi}{\sin q \pi \Gamma(1-q)}$ и если сдѣлаемъ потомъ $q = 0$, то получимъ

$$(14) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1} \varphi \frac{\sin p \varphi}{\sin \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2};$$

въ этой формулѣ p должно быть положительное, но интегралъ имѣетъ постоянное значеніе, независящее отъ p .

533. На основаніи того, что мы видѣли въ § 529, мы можемъ написать

$$\frac{1}{(1 - x\sqrt{-1})^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty z^{n-1} e^{-z(1-x\sqrt{-1})} dz,$$

умноживъ же это равенство на функцію $\frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{(1+x\sqrt{-1})^n}$, гдѣ a предполагается положительнымъ, получимъ

$$\frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{z^{n-1} e^{-z(a+z)x\sqrt{-1}} dz}{(1+x\sqrt{-1})^n}.$$

Умножимъ еще ту и другую часть на $x^{p-1} dx$ и возьмемъ интегралъ отъ $x = 0$ до $x = \infty$; интегрированіе можетъ быть произведено во второй части подъ знакомъ \int , и мы будемъ имѣть

$$(15) \quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1} e^{ax\sqrt{-1}}}{(1+x^2)^n} dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{x^{p-1} e^{(a+z)x\sqrt{-1}}}{(1+x\sqrt{-1})^n} dx \right] z^{n-1} e^{-z} dz.$$

Также имѣемъ

$$\frac{1}{(1+x\sqrt{-1})^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y(1+x\sqrt{-1})} dy,$$

и, умноживъ на $x^{p-1} e^{(a+z)x\sqrt{-1}} dx$,

$$\frac{x^{p-1} e^{(a+z)x\sqrt{-1}} dx}{(1+x\sqrt{-1})^n} = \frac{dx}{\Gamma(n)} \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} e^{(a+z-y)x\sqrt{-1}} x^{p-1} dy;$$

взявъ интегралъ отъ $x=0$ до $x=\infty$, получимъ

$$(16) \int_0^\infty \frac{x^{p-1} e^{(a+z)x\sqrt{-1}} dx}{(1+x\sqrt{-1})^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty x^{p-1} e^{(a+z-y)x\sqrt{-1}} dx \right] y^{n-1} e^{-y} dy$$

Означимъ черезъ $\frac{G+H\sqrt{-1}}{\Gamma(n)}$ значеніе каждой части формулы (16), формула (15) обратится въ

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1} (\cos ax + \sqrt{-1} \sin ax) dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty (G+H\sqrt{-1}) z^{n-1} e^{-z} dz;$$

сравнивъ между собой части, содержащія множитель $\sqrt{-1}$, и сдѣлавъ потомъ $p=0$, получимъ

$$(17) \int_0^\infty \frac{\frac{\sin ax}{x}}{(1+x^2)^n} dx = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty H z^{n-1} e^{-z} dz.$$

Значеніе H дается формулой (16). Для случая $p=0$ имѣемъ

$$H = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{\sin(a+z-y)x}{x} dx \right] y^{n-1} e^{-y} dy;$$

но множитель между скобками $\int_0^\infty \frac{\sin(a+z-y)x}{x} dx$ равенъ $+\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$ (§ 495), смотря по тому, будетъ ли y меньше или больше $a+z$; поэтому имѣемъ.

$$H = \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{a+z} y^{n-1} e^{-y} dy - \int_{a+z}^\infty y^{n-1} e^{-y} dy \right];$$

взявъ дифференціалъ относительно a , получимъ

$$\frac{dH}{da} = \pi (a + z)^{n-1} e^{-(a+z)}.$$

Взявъ также дифференціалъ уравненія (17) относительно a , найдемъ

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n} dx = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty \frac{dH}{da} z^{n-1} e^{-z} dz,$$

и мы наконецъ получимъ формулу, которую мы желали вывести, именно:

$$(18) \quad \int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n} dx = \frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty z^{n-1} (a+z)^{n-1} e^{-(a+z)} dz,$$

гдѣ n означаетъ какое нибудь положительное число. Когда n есть цѣлое, тогда имѣемъ

$$(19) \quad \int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n} dx = \frac{\pi e^{-a}}{2^{2n-1} \Gamma(n)} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma(2n-1-i)}{\Gamma(i+1) \Gamma(n-i)} (2a)^i.$$

Для $n = 1$ снова найдемъ формулу

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a},$$

уже полученную въ § 496. Для $n = 2$ имѣемъ

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4} (1+a) e^{-a}.$$

534. Формула (18) приведетъ насъ сейчасъ къ другимъ опредѣленнымъ интеграламъ, имѣющимъ нѣкоторый интересъ.

Возьмемъ снова первую формулу (7), именно

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \cos tx dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos^p \varphi \cos p \varphi,$$

въ которой имѣемъ

$$t = a \tan \varphi,$$

умножимъ ее на

$$\frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{a d\varphi}{\cos^2 \varphi (1+a^2 \tan^2 \varphi)^n},$$

возьмемъ потомъ интеграль отъ $t = 0$ до $t = \infty$ или отъ $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$; произведя интегрирование въ первой части подъ знакомъ \int , получимъ

$$(20) \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \frac{\cos t x dt}{(1+t^2)^n} \right] x^{p-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(p)}{a^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-2} \varphi \cos p \varphi d\varphi}{(1+a^2 \tan^2 \varphi)^n}.$$

Но, на основаніи формулы (18), интеграль относительно t , который находится множителемъ въ первой части подъ знакомъ \int , имѣетъ значеніе

$$\frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty z^{n-1} (x+z)^{n-1} e^{-(x+z)} dz,$$

или, подставивъ xy вмѣсто z , xdy вмѣсто dz ,

$$\frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty y^{n-1} (1+y)^{n-1} e^{-x(1+y)} x^{2n-1} dy.$$

Если же умножимъ на $x^{p-1} e^{-ax} dx$ и если возьмемъ интеграль отъ 0 до ∞ , то получимъ результатъ, значеніемъ котораго будетъ значеніе интеграла, содержащагося въ первой части формулы (20); слѣдовательно, имѣемъ

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty x^{2n+p-2} e^{-(a+1+2y)x} dx \right] y^{n-1} (1+y)^{n-1} dy \\ &= \frac{\Gamma(p)}{a^{p-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-2} \varphi \cos p \varphi d\varphi}{(1+a^2 \tan^2 \varphi)^n}; \end{aligned}$$

въ первой части интеграль относительно x имѣетъ значеніемъ

$$\frac{\Gamma(2n+p-1)}{(a+1+2y)^{2n+p-1}};$$

поэтому

$$(21) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-2} \varphi \cos p \varphi d\varphi}{(1+a^2 \tan^2 \varphi)^n} \\ &= \pi a^{p-1} \frac{\Gamma(2n+p-1)}{\Gamma(p) \Gamma^2(n)} \int_0^\infty \frac{y^{n-1} (1+y)^{n-1} dy}{(a+1+2y)^{2n+p-1}}. \end{aligned} \right.$$

Когда $a = 1$, то интеграль, входящій во вторую часть, обращается въ

$$\frac{1}{2^{2n+p-1}} \int_0^\infty \frac{y^{n-1} dy}{(1+y)^{n+p}} = \frac{1}{2^{2n+p-1}} \frac{\Gamma(n) \Gamma(p)}{\Gamma(n+p)};$$

поэтому имѣемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+2n-2} \varphi \cos p \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{2n+p-1}} \frac{\Gamma(2n+p-1)}{\Gamma(n) \Gamma(n+p)},$$

или, сдѣлавъ $p+2n-2 = q$,

$$(22) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^q \varphi \cos p \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{q+1}} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{q-p}{2}+1\right)}$$

Эта формула (22) была въ первый разъ доказана Коши. Въ случаѣ $q = p$, она обращается въ формулу, полученную Пуассономъ, именно:

$$(23) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p \varphi \cos p \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{p+1}}.$$

Если въ формулѣ (21) сдѣлаемъ $n = 1$, то интеграль второй части обратится въ

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(a+1+2y)^{p+1}} = \frac{1}{2p(a+1)^p};$$

поэтому имѣемъ

$$(24) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^p \varphi \cos p \varphi d\varphi}{\cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\pi}{2} \frac{a^{p-1}}{(a+1)^p},$$

это-же, при предположеніи $n = 1$, приводится къ формулѣ (23).

О приближенномъ вычисленіи произведенія 1. 2. 3. . . . x , когда x есть большое число.

535. Логариемъ произведенія x первыхъ чиселъ можетъ быть выраженъ посредствомъ ряда, расположеннаго

по цѣлымъ и отрицательнымъ степенямъ x . Этотъ знаменитый рядъ принадлежащій Штирлингу, сдѣлался предметомъ изысканій многихъ математиковъ, между которыми особенно слѣдуетъ упомянуть Коши, Бине, Мальмстена и Ліувилля. Но между различными доказательствами, относящимися къ этой формулѣ, невозможно привести легче того, которое я представилъ нѣсколько лѣтъ тому назадъ Академіи Наукъ и которое я отчасти вновь произвелъ въ четвертомъ изданіи моего *Cours d'Algèbre supérieure*. Я показалъ, что достаточно извѣстной формулы Валлиса, чтобы вполне вывести формулу Штирлинга, и этотъ выводъ на столько легокъ, что вторая формула, до нѣкоторой степени, можетъ быть рассматриваема, какъ видоизмѣненіе первой. Эти доказательства существенно связываются съ теоріей эйлеровыхъ интеграловъ и я считаю полезнымъ привести ихъ здѣсь.

536. Формула Валлиса есть (§ 492)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2x-2}{2x-2} \cdot \frac{2x-2}{2x-1} \cdot \frac{2x}{2x-1} \quad (\text{для } x = \infty).$$

и она принимаетъ очень простой видъ

$$\frac{[\varphi(x)]^4}{[\varphi(2x)]^2} = 1 \quad (\text{для } x = \infty),$$

или, извлекая квадратный корень,

$$(1) \quad \frac{[\varphi(x)]^2}{\varphi(2x)} = 1 \quad (\text{для } x = \infty),$$

если означимъ черезъ $\varphi(x)$ выраженіе

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x}{\sqrt{2\pi x^{x+\frac{1}{2}}}},$$

или произведеніе этого-же самаго выраженія на показательную функцію вида a^x , гдѣ a какая нибудь постоянная. Формула (1) будетъ поэтому имѣть мѣсто, если, означивъ черезъ e основаніе неперовскихъ логариѳмовъ, положимъ

$$(2) \quad \varphi(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x}{\sqrt{2\pi e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}}}}.$$

Изъ формулы (2) имѣемъ

$$(3) \quad \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} = e^{-1 + (x+\frac{1}{2}) \log(1 + \frac{1}{x})}$$

или

$$(4) \quad \log \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = -1 + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

гдѣ знакъ \log выражаетъ неперовскій логарифмъ. Но, если $x > 1$, имѣемъ

$$\log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{nx^n} + \dots,$$

откуда

$$\begin{aligned} & \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{12x^3} + \dots + \frac{n-1}{2n(n+1)} \frac{(-1)^n}{x^n} + \dots; \end{aligned}$$

поэтому

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \log \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} \\ &= \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{12x^3} + \frac{3}{40x^4} - \dots + \frac{(n-1)}{2n(n+1)} \frac{(-1)^n}{x^n} + \dots \end{aligned} \right.$$

Въ этомъ рядѣ члены попеременно положительные и отрицательные; сверхъ того абсолютное значеніе отношенія члена n -го мѣста къ предыдущему есть

$$\frac{n^2}{n^2 + n - 2} \frac{1}{x};$$

это отношеніе равно $\frac{1}{x}$ для $n = 2$, но оно меньше $\frac{1}{x}$ для всѣхъ значеній n , превышающихъ 2; поэтому даже тогда, когда x обращается въ 1, абсолютныя значенія членовъ ряда (5) убываютъ, начиная со втораго члена. Отсюда очевидно слѣдуетъ, что

$$\log \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < \frac{1}{12x^2}.$$

или

$$(6) \quad \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < e^{\frac{1}{12x^2}}.$$

Но можно назначить предѣлъ $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}$ меньшій предъидущаго, и такъ какъ онъ намъ будетъ полезенъ, то надлежитъ его показать здѣсь.

Если формулу (5) умножимъ на $x+1$, то получимъ

$$(x+1) \log \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \frac{1}{12x} - \frac{1}{120x^3} + \dots \\ + \frac{(n-3)}{2(n-1)n(n+1)} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{n-1}} + \dots;$$

въ этомъ рядѣ недостаетъ члена $\frac{1}{x^2}$; другіе члены попеременно положительныя и отрицательныя, и отношеніе члена съ $\frac{1}{x^n}$ къ члену съ $\frac{1}{x^{n-1}}$ имѣетъ абсолютное значеніе

$$\frac{(n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2) + 2(n-4)x} \frac{1}{x};$$

это отношеніе равно $\frac{1}{x}$ для $n=4$; но оно меньше $\frac{1}{x}$ для $n>4$.

Поэтому члены уменьшаются, начиная со втораго, даже тогда, когда x равно 1, и мы имѣемъ

$$(x+1) \log \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < \frac{1}{12x},$$

или

$$(7) \quad \log \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} < \frac{1}{12x(x+1)}.$$

Формула (6) показываетъ, что

$$(8) \quad \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = e^{\frac{\theta_0}{x^2}},$$

гдѣ θ_0 есть цѣлое положительное число, меньшее $\frac{1}{12}$; измѣнивъ x въ $x+1$, $x+2$, ..., $2x-1$ и означивъ черезъ $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{x-1}$ числа, заключающіяся между 0 и $\frac{1}{12}$, также будемъ имѣть

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x+2)} = e^{\frac{\theta_1}{(x+1)^2}}, \\ \frac{\varphi(x+2)}{\varphi(x+3)} = e^{\frac{\theta_2}{(x+2)^2}}, \dots, \\ \frac{\varphi(2x-1)}{\varphi(2x)} = e^{\frac{\theta_{x-1}}{(2x-1)^2}}. \end{array} \right.$$

Перемножимъ между собой равенства (8) и (9); такъ какъ сумма x дробей

$$\frac{\theta_0}{x^2} + \frac{\theta_1}{(x+1)^2} + \frac{\theta_2}{(x+2)^2} + \dots + \frac{\theta_{x-1}}{(2x-1)^2}$$

меньше $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{x^2}$ Xx или $\frac{1}{12x}$, то будемъ имѣть

$$(10) \quad \frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = e^{\frac{\theta}{x}},$$

гдѣ θ есть число, заключающееся между 0 и $\frac{1}{12}$; слѣдовательно

$$(11) \quad \frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = 1 \quad (\text{для } x = \infty).$$

Если теперь формулу (1) раздѣлимъ на формулу (11), то получимъ

$$(12) \quad \varphi(x) = 1 \quad (\text{для } x = \infty),$$

т. е. на основаніи формулы (2)

$$(13) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x = \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon_x),$$

гдѣ ε_x означаетъ положительное количество, уничтожающееся для $x = \infty$, и высшій предѣлъ котораго мы сейчасъ дадимъ.

537. Имѣемъ

$$(14) \quad \Gamma(x+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x,$$

и я говорю, что можно получить, на основаніи предъидущаго, точное выраженіе функціи $\Gamma(x+1)$ или, что приведетъ къ тому-же, выраженіе неперовскаго логариѣма $\log \Gamma(x+1)$, когда x есть цѣлое число. На основаніи формулы (2), сна-

чала имѣемъ

$$(15) \quad \log \Gamma(x+1) = \frac{1}{2} \log 2\pi - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x + \log \varphi(x),$$

потомъ тождественно имѣемъ

$$\begin{aligned} \log \varphi(x) = \log \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} + \log \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x+2)} + \dots \\ + \log \frac{\varphi(x+m)}{\varphi(x+m+1)} + \log \varphi(x+m+1); \end{aligned}$$

но, если цѣлое число m возрастаетъ безпредѣльно, $\varphi(x+m+1)$, на основаніи формулы (12), стремится къ единицѣ и ея логарифмъ стремится къ нулю; поэтому имѣемъ

$$(16) \quad \log \varphi(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \log \frac{\varphi(x+m)}{\varphi(x+m+1)},$$

или, на основаніи формулы (4),

$$(17) \quad \log \varphi(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[\left(x+m+\frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x+m}\right) - 1 \right],$$

и слѣдовательно будемъ имѣть

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \log \Gamma(x+1) &= \frac{1}{2} \log 2\pi - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x \\ &+ \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[\left(x+m+\frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x+m}\right) + 1 \right]. \end{aligned} \right.$$

Эта формула (18), которая встрѣчается у Гудерманна, какъ мы видимъ, очень легко выводится изъ простой формулы Валлиса.

538. Такъ какъ количество $\log \varphi(x)$ положительное, то формула (15) сначала даетъ

$$(19) \quad \log \Gamma(x+1) > \frac{1}{2} \log 2\pi - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x.$$

Потомъ изъ формулы (16), на основаніи неравенства (7), будемъ имѣть

$$\log \varphi(x) < \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{12(x+m)(x+m+1)};$$

но дробь $\frac{1}{(x+m)(x+m+1)}$ распадается на

$$\frac{1}{x+m} - \frac{1}{x+m+1};$$

поэтому можно написать :

$$12 \log \varphi(x) < \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) + \dots$$

Рядъ, содержащійся во второй части этой формулы, имѣетъ суммою $\frac{1}{x}$, и мы, слѣдовательно, имѣемъ

$$\log \varphi(x) < \frac{1}{12x},$$

потомъ

$$(20) \quad \log \Gamma(x+1) < \frac{1}{2} \log 2\pi - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x + \frac{1}{12x}.$$

Формулы (19) и (20) даютъ намъ два предѣла, которые мы желали получить. Переходя отъ логарифмовъ къ числамъ, получимъ

$$(21) \quad \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x > \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}}, \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x < \sqrt{2\pi} e^{-x+\frac{1}{2x}} x^{x+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Распространеніе предъидущихъ формулъ на случай, когда x не есть цѣлое положительное число.

539. Предъидущій анализъ предполагаетъ, что x есть цѣлое положительное число; но вторая часть уравненія (18) § 537 есть функція, въ которой x способно принимать какія угодно значенія; исключая случая, когда x есть цѣлое отрицательное число, рядъ, входящій въ поименованную формулу, постоянно сходящійся, потому что его члены, въ чемъ не трудно удостовѣриться, убываютъ подобно членамъ ряда

$\sum \frac{1}{m^2}$. Теперь я говорю, что формула, о которой идетъ рѣчь, соображаясь съ общимъ опредѣленіемъ, которое мы дали функции Γ , существуетъ для какого угодно x . Это опредѣленіе выражается формулой (8) § 521, которая, если замѣнимъ x черезъ $x+1$ и напишемъ подъ знакомъ \sum , $m+1$ вмѣсто m , даетъ

$$\log \Gamma(x+1) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[x \log \left(1 + \frac{1}{m+1} \right) - \log \left(1 + \frac{x}{m+1} \right) \right].$$

Чтобы доказать тождество значеній $\log \Gamma(x+1)$, даваемыхъ предъидущимъ уравненіемъ и формулой (18) § 537, достаточно дифференцировать ихъ два раза; изъ той и другой имѣемъ

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x+1)}{dx^2} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{(x+m+1)^2};$$

вторыя части этихъ двухъ формулъ имѣютъ поэтому равными свои вторыя производныя; слѣдовательно, онѣ могутъ различаться только на линейную функцию отъ x ; но такъ какъ онѣ равны для цѣлыхъ и положительныхъ значеній x , то, слѣдовательно, ихъ разность приводится къ нулю.

Формула Штирлинга.

540. Нетрудно выразить функцию $\log \varphi(x)$ посредствомъ опредѣленнаго интеграла. Дифференцируя два раза сряду формулу (17) § 537, найдемъ

$$\frac{d \log \varphi(x)}{dx} = \frac{1}{2x} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[\log \left(1 + \frac{1}{x+m} \right) - \frac{1}{x+m} \right],$$

$$\frac{d^2 \log \varphi(x)}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{(x+m)^2}.$$

Но для всѣхъ положительныхъ значеній x имѣемъ

$$\frac{1}{z} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} d\alpha, \quad \frac{1}{z^2} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} \alpha d\alpha;$$

если поэтому переменная x остается положительной, то будем имѣть

$$\frac{d^2 \log \varphi(x)}{dx^2} = - \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) d\alpha + \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sum_{m=0}^{m=\infty} e^{-m\alpha} \alpha d\alpha;$$

такъ какъ количество $\sum_{m=0}^{m=\infty} e^{-m\alpha}$ равно $\frac{1}{1-e^{-\alpha}}$, то

$$\frac{d^2 \log \varphi(x)}{dx^2} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \left(\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} - \frac{\alpha}{2} - 1 \right) d\alpha;$$

взявъ два раза интегралъ и замѣтивъ, что функции $\log \varphi(x)$ и $\frac{d \log \varphi(x)}{dx}$ уничтожаются для $x = \infty$, получимъ

$$(1) \quad \log \varphi(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} \right) e^{-\alpha x} d\alpha.$$

Внеся это значеніе $\log \varphi(x)$ въ уравненіе (15) § 537, получимъ выраженіе $\log \Gamma(x+1)$, которое было дано Коши.

541. Отсюда можно вывести формулу Штирлинга, но для этого необходимо преобразовать формулу (1); уравненіе

$$\Gamma(1+x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$$

даётъ

$$\log \Gamma(1+x) + \log \Gamma(1-x) = \log \pi x - \log \sin \pi x,$$

взявъ же дифференціалъ, получимъ

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx} + \frac{d \log \Gamma(1-x)}{dx} &= \frac{1}{x} - \pi \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} \\ &= \frac{1}{x} - \pi \sqrt{-1} \frac{e^{\pi x \sqrt{-1}} + e^{-\pi x \sqrt{-1}}}{e^{\pi x \sqrt{-1}} - e^{-\pi x \sqrt{-1}}}; \end{aligned} \right.$$

сверхъ того изъ формулы (18) § 537 имѣемъ

$$\frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx} = -C + \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+x}\right) + \dots,$$

измѣнивъ же x въ $-x$,

$$-\frac{d \log \Gamma(1-x)}{dx} = -C + \left(1 - \frac{1}{1-x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2-x}\right) + \dots$$

Если-же внесемъ эти значенія въ уравненіе (2), то будемъ имѣть

$$\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2x}{2^2-x^2} + \frac{2x}{3^2-x^2} + \dots = \frac{1}{x} - \pi \sqrt{-1} \frac{e^{\pi x \sqrt{-1}} + e^{-\pi x \sqrt{-1}}}{e^{\pi x \sqrt{-1}} - e^{-\pi x \sqrt{-1}}}.$$

Эта формула ничто иное, какъ та, которая даетъ значеніе $\cot \pi x$ въ неопредѣленномъ рядѣ простыхъ дробей и которую мы доказали въ § 491; мы могли-бы поэтому и ее взять за исходный пунктъ; но, кромѣ того что она была доказана, на основаніи предъидущаго, для всѣхъ дѣйствительныхъ и мнимыхъ значеній x , было-бы небезполезно связать ее съ формулами, которыя мы дали въ нашей теоріи функцій Γ .

Если положимъ $x = \frac{\alpha \sqrt{-1}}{2\pi}$, то предъидущая формула обратится въ

$$(3) \quad \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} \right) = 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{4m^2\pi^2 + \alpha^2},$$

отъ дѣленія же будемъ имѣть

$$\frac{1}{4m^2\pi^2 + \alpha^2} = \frac{1}{(2m\pi)^2} - \frac{\alpha^2}{(2m\pi)^4} + \dots \pm \frac{\alpha^{2n-2}}{(2m\pi)^{2n}} \pm \Theta_m \frac{\alpha^{2n}}{(2m\pi)^{2n+2}},$$

гдѣ Θ_m означаетъ количество $\frac{4m^2\pi^2}{4m^2\pi^2 + \alpha^2}$, значеніе котораго заключается между 0 и 1. Дадимъ m значенія 1, 2, 3, ... до бесконечности, сложимъ потомъ всѣ результаты и замѣтимъ, что, если положимъ

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \Theta_m \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}} = \Theta \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}},$$

Θ необходимо будетъ заключаться между 0 и 1; на основаніи формулы (3) будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} \right) &= 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^2} - 2\alpha^2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^4} + \dots \\ &\pm 2\alpha^{2n-2} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^{2n}} \pm 2\Theta\alpha^{2n} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^{2n+2}}, \end{aligned}$$

и если сдѣлаемъ

$$(4) \quad \frac{B_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} = \frac{1}{2^{2n-1} \pi^{2n}} \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \dots \right),$$

то получимъ

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{B_1}{1 \cdot 2} - \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^2 + \dots \pm \frac{B_n}{1 \cdot 2 \dots 2n} \alpha^{2n-2} \\ &= \Theta \frac{B_{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (2n+2)} \alpha^{2n}, \end{aligned} \right.$$

гдѣ Θ , мы повторимъ, есть количество, заключающееся между 0 и 1.

Этотъ замѣчательный результатъ принадлежитъ Коши; функція отъ α , которая составляетъ первую часть формулы (5), обращается въ безконечность только для значеній α , заключающихся въ формулѣ $\alpha = 2k\pi\sqrt{-1}$, гдѣ k есть цѣлое положительное или отрицательное число, но отличающееся отъ нуля; отсюда слѣдуетъ, что эта формула для всѣхъ дѣйствительныхъ или мнимыхъ значеній α , которыхъ модуль меньше 2π , разлагается по формулѣ Маклорена въ сходящійся рядъ; такимъ образомъ въ этомъ предположеніи имѣемъ

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{B_1}{1 \cdot 2} - \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^2 + \dots \pm \frac{B_n}{1 \cdot 2 \dots 2n} \alpha^{2n-2} \mp \dots; \end{aligned} \right.$$

формула (5) существуетъ для всѣхъ *дѣйствительныхъ* значеній α и она даетъ возможность узнать выраженіе остатка ряда (6), когда останавливаемъ его на членѣ $n^{\text{го}}$ мѣста.

542. Коэффициенты B_1, B_2, B_3 , входящіе въ формулы (2) и (6), извѣстны подъ именемъ *чиселъ Бернулли*; уравненіе (4) даетъ возможность узнать общее выраженіе $n^{\text{го}}$ числа Бернулли, но это выраженіе содержитъ трансцендентное количество π и кромѣ того сумму неопредѣленного ряда. Нетрудно послѣдовательно вычислить числа B , которыя всѣ раціональны; для этого рассмотримъ уравненіе (6), гдѣ для

сходимости ряда предположимъ $\alpha < 2\pi$; если $\frac{1}{1-e^{-\alpha}}$ замѣнимъ равнымъ значеніемъ $\frac{1+e^{\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}$, то получимъ

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1 + \frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha})}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right] \\ = \frac{B_1}{1 \cdot 2} - \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{1 \cdot 2 \dots 2n} \alpha^{2n-2} + \dots,$$

или

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \right) \\ = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2\alpha} \left[1 + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \alpha^2 - \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{1 \cdot 2 \dots 2n} \alpha^{2n} + \dots \right]$$

замѣнивъ въ рядахъ показательныя функціи ихъ значеніями, получимъ

$$\frac{1}{2} \left(2 + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\alpha^{2n}}{1 \cdot 2 \dots 2n} + \dots \right) \\ = \left(1 + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{\alpha^{2n}}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} + \dots \right) \\ \times \left(1 + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \alpha^2 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{1 \cdot 2 \dots 2n} \alpha^{2n} + \dots \right);$$

оба множителя второй части — сходящіеся ряды и второй не перестаетъ быть сходящимся, когда его члены приводимъ къ ихъ абсолютному значенію, потому что рядъ (6) остается сходящимся, когда замѣняемъ α черезъ $\alpha\sqrt{-1}$, такъ какъ единственное условіе сходимости есть то, чтобы модуль α былъ меньше 2π ; слѣдовательно, если перемножимъ оба ряда, входящіе во вторую часть предыдущаго уравненія и если расположимъ произведеніе по степенямъ α , то получимъ рядъ тождественный тому, который содержится въ первой части. Поступивъ такимъ образомъ и сравнивъ коэффициенты въ той и другой части при α^{2n} , найдемъ

$$0 = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 \cdot 2 \dots 2n} + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (2n-1)} \frac{B_1}{1 \cdot 2} \\ - \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (2n-3)} \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{(-1)^{\mu-1}}{1 \cdot 2 \dots (2n-2\mu+1)} \frac{B_{\mu}}{1 \cdot 2 \dots 2\mu} \\ + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{1} \frac{B_n}{1 \cdot 2 \dots 2n},$$

уравнение, определяющее B_n , если известны B_1, B_2, \dots, B_{n-1} ; сделавъ последовательно $n = 1, 2, 3, \dots$, получимъ

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + B_1 = 0,$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{2} B_1 - B_2 = 0,$$

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{2} + \frac{6}{2} B_1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} B_2 + B_3 = 0,$$

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{2} + \frac{8}{2} B_1 - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} B_2 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_3 - B_4 = 0,$$

.....

откуда имѣемъ

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30},$$

$$B_5 = \frac{5}{66}, \quad B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}, \dots$$

Рядъ чиселъ Бернулли, какъ мы видимъ, сначала убывающій, а потомъ, послѣ B_3 , онъ дѣлается неопредѣленно возрастающимъ.

543. Возвратимся теперь къ формулѣ (1), которая даетъ выраженіе $\log \varphi(x)$. Эта формула, если употребимъ уравненіе (5), обратится въ

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \log \varphi(x) &= \frac{B_1}{1 \cdot 2} \int_0^\infty e^{-\alpha x} d\alpha - \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^2 d\alpha - \dots \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{B_n}{1 \cdot 2 \dots 2n} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{2n-2} d\alpha \\ &+ (-1)^n \frac{B_{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (2n+2)} \int_0^\infty \Theta e^{-\alpha x} \alpha^{2n} d\alpha. \end{aligned} \right.$$

Но для всѣхъ цѣлыхъ значеній μ

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{\mu-1} d\alpha = \frac{\Gamma(\mu)}{x^\mu} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1)}{x^\mu};$$

сверхъ того, такъ какъ количество Θ остается заключеннымъ между 0 и 1, то интегралъ $\int_0^\infty \Theta e^{-\alpha x} \alpha^{2n} d\alpha$ положительный и

меньше $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{2n} d\alpha$, т. е. меньше $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{x^{2n+1}}$; поэтому можно

будетъ его выразить черезъ $\theta \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{x^{2n+1}}$, гдѣ θ означаетъ

количество, заключающееся между 0 и 1. На основании этого предыдущее значение $\log \varphi(x)$ обращается въ

$$(8) \quad \begin{cases} \log \varphi(x) = \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{x} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \frac{1}{x^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n-1)2n} \frac{1}{x^{2n-1}} \\ + (-1)^n \theta \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{x^{2n+1}}, \end{cases}$$

внеся же это значение въ уравнение (15) § 537, будемъ имѣть для всѣхъ положительныхъ значеній x

$$(9) \quad \begin{cases} \log \Gamma(x+1) = \frac{1}{2} \log 2\pi - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{x} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \frac{1}{x^3} + \dots \\ + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n-1)2n} \frac{1}{x^{2n-1}} + (-1)^n \theta \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{x^{2n+1}}, \end{cases}$$

гдѣ количество θ , умножающее послѣдній членъ, мы должны повторить, заключается между 0 и 1.

Если продолжимъ до бесконечности рядъ второй части, то получимъ формулу Штирлинга, именно:

$$(10) \quad \begin{cases} \log \Gamma(x+1) = \frac{1}{2} \log 2\pi - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{x} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \frac{1}{x^3} + \dots \\ + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n-1)2n} \frac{1}{x^{2n-1}} + \dots \end{cases}$$

Нетрудно видѣть, что этотъ рядъ расходящійся, какое бы большее значение ни дали x ; въ самомъ дѣлѣ, абсолютное значение общаго члена $(-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n-1)2n} \frac{1}{x^{2n-1}}$ равно, на основаніи формулы (4), произведенію двухъ количествъ

$$\frac{1}{2\pi x} \frac{2}{2\pi x} \frac{3}{2\pi x} \dots \frac{2n-2}{2\pi x} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi^2 x} \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots\right).$$

Второе изъ этихъ выраженій стремится къ предѣлу $\frac{1}{2\pi^2 x}$, когда n возрастаетъ безпредѣльно; первое выраженіе, напротивъ, возрастаетъ сверхъ всякаго предѣла, потому что оно есть произведеніе, въ которомъ множителей, меньшихъ 1, конечное число, между тѣмъ какъ число множителей, превышающихъ 1, а также и какое угодно число, можетъ сдѣлаться больше всякаго даннаго числа. Отсюда слѣдуетъ, что члены ряда (10), начиная съ извѣстнаго мѣста, возрастаютъ сверхъ всякаго предѣла и, слѣдовательно, этотъ рядъ расходящійся.

544. Замѣчательно то, что рядъ Штирлинга, несмотря на свою расходимость, снабжаетъ очень точнымъ и очень удобнымъ способомъ вычисленія $\log \Gamma(x+1)$, и приближеніе, которое можно получить этимъ путемъ, тѣмъ болѣе, чѣмъ x больше. Дѣйствительно, если x больше 1, то члены въ формулѣ Штирлинга, помноженные на числа B , сначала убываютъ, и мы видимъ изъ формулы (9), что ошибка, полученная отъ употребленія формулы (10), постоянно меньше, по абсолютной величинѣ, перваго изъ *пренебрегаемыхъ* членовъ. Поэтому будемъ имѣть самое большое возможное приближеніе, если остановимся на членѣ, предшествующемъ *наименьшему* члену, и этотъ наименьшій членъ само-собою дастъ высшій предѣлъ ошибки, которую получимъ. Напримѣръ, если вполнѣ пренебрежемъ въ формулѣ (10) членами, помноженными на коэффициенты B , то полученная ошибка будетъ положительная и меньше $\frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{x}$ или $\frac{1}{12x}$; такъ какъ $B_1 = \frac{1}{6}$, по этому будемъ имѣть

$$(11) \begin{cases} \log \Gamma(x+1) > \frac{1}{2} \log 2\pi - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x, \\ \log \Gamma(x+1) < \frac{1}{2} \log 2\pi - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - \frac{1}{12x}, \end{cases}$$

перейдя-же отъ логарифмовъ къ числамъ, получимъ

$$(12) \begin{cases} \Gamma(x+1) > \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}}, \\ \Gamma(x+1) < \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{12x}}, \end{cases}$$

какъ это мы нашли въ § 538.

Исходя изъ этихъ формулъ, можно получить два предѣла числа Бернулли B_n , изъ которыхъ одинъ будетъ намъ ниже полезенъ. Положивъ для краткости

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \dots,$$

по формулѣ (4) найдемъ

$$B_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{2^{2n} - 1 \pi^{2n}} S_{2n}, \quad B_1 = \frac{S_2}{\pi^2},$$

откуда имѣемъ

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2} \frac{S_{2n+2}}{S_{2n}}, \quad \frac{B_n}{B_1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}} \frac{S_{2n}}{S_2},$$

но такъ какъ S_2 убываетъ, когда μ увеличивается, то

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} < \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2}, \quad \frac{B_n}{B_1} < \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}},$$

или, такъ какъ $B_1 = \frac{1}{6}$,

$$(13) \quad \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} < \frac{B_n}{4\pi^2},$$

$$(14) \quad B_n < \frac{1}{12} \frac{\Gamma(2n+1)}{(2\pi)^{2n-2}}.$$

Формула (14) даетъ высшій предѣлъ B_n ; мы будемъ имѣть низшій предѣлъ того же числа, если въ его точномъ выраженіи замѣнимъ S_{2n} черезъ 1; такимъ образомъ получимъ

$$(15) \quad B_n > \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n-1}\pi^{2n}}.$$

Если въ формулѣ (14) замѣнимъ $\Gamma(2n+1)$ его высшимъ предѣломъ, взятымъ изъ неравенствъ (12), и въ формулѣ (15) его низшимъ предѣломъ, то будемъ имѣть

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_n < \frac{1}{12} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{5}{2}}} e^{-2n} e^{\frac{1}{2+4n}}, \\ B_n > 2 \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n+\frac{1}{2}}} e^{-2n}; \end{array} \right.$$

отношеніе этихъ двухъ предѣловъ числа B_n есть $\frac{\pi^2}{6} e^{\frac{1}{2+4n}}$.

545. Формулы, которыя мы только-что вывели, были даны Коши; онѣ позволяютъ легко опредѣлить приближеніе, съ которымъ можно вычислить $\log \Gamma(x+1)$ по формулѣ Штирлинга.

Означимъ черезъ u_n абсолютное значеніе члена этого ряда, зависящаго отъ коэффициента B_n , имѣемъ

$$u_n = \frac{B_n}{(2n-1)2n} \frac{1}{x^{2n-1}}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_{n+1}}{B_n} \frac{(2n-1)2n}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{x^2},$$

на основаніи неравенства (13) вторая изъ этихъ двухъ фор-

мудъ дастъ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{(2n-1)2n}{4\pi^2 x^2},$$

и мы тѣмъ болѣе будемъ имѣть

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n^2}{\pi^2 x^2} \quad \text{и} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < \left(\frac{n}{3x}\right)^2.$$

Поэтому u_{n+1} будетъ меньше u_n до тѣхъ поръ, пока $n < 3x$ или $n = 3x$. Такимъ образомъ, когда x больше 1, то рядъ Штирлинга въ первыхъ членахъ есть убывающій и, если x есть число цѣлое, это убываніе будетъ несомнѣнно имѣть мѣсто до члена мѣста $3x$, который само собою будетъ меньше слѣдующихъ.

Теперь означимъ черезъ ε_n абсолютное значеніе получаемой ошибки, когда останавливаемся въ рядѣ Штирлинга на членѣ, умноженномъ на B_n ; какъ мы видѣли, будемъ имѣть

$$\varepsilon_n < \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{x^{2n+1}},$$

и, на основаніи неравенства (13), тѣмъ болѣе

$$\varepsilon_n < \frac{B_n}{4\pi^2 x^{2n+1}},$$

и наконецъ, на основаніи перваго изъ неравенствъ (16), имѣемъ

$$(17) \quad \varepsilon_n < \frac{1}{6} \frac{(n\pi)^{\frac{1}{2}}}{x} \left(\frac{n}{e\pi x}\right)^{2n} e^{\frac{1}{24n}},$$

предѣлъ, который легко вычислить по логарифмамъ.

Мы видѣли, что, если x цѣлое число, убываніе членовъ ряда постоянно имѣетъ мѣсто до тѣхъ поръ, пока n не будетъ равно $3x$; если сдѣлаемъ $n = 3x$, то формула (17) дастъ

$$\varepsilon_{3x} < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{6x - \frac{1}{2}} e^{\frac{1}{72x} - \frac{1}{2}} e^{-6x},$$

и такъ какъ x по крайней мѣрѣ равно 1, то тѣмъ болѣе будемъ имѣть

$$\varepsilon_{3x} < \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{11}{2}} e^{\frac{1}{72} - \frac{1}{2}} e^{-6x}.$$

но

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{72}} = 0,393409. \dots,$$

поэтому

$$\varepsilon_{3x} < 0,393409. \dots \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e} \right)^{6x},$$

или, взявъ обыкновенные логарифмы обѣихъ частей, имѣемъ

$$(18) \quad \log \varepsilon_{3x} < \overline{1}, 594844 + \frac{1}{2} \log \frac{1}{x} + (\overline{3}, 3942331) x.$$

Для $x = 1$ уже имѣемъ

$$\log \varepsilon_3 < \overline{4}, 9890775,$$

и слѣдовательно $\varepsilon_3 < \frac{1}{1000}$; для $x = 10$ имѣемъ

$$\log \varepsilon_{30} < \overline{27}, 047175,$$

и мы видимъ, что въ этомъ примѣрѣ $x = 10$ можно, остановившись на членѣ, умноженномъ на B_{30} , продолжить вычисленіе $\log \Gamma(x+1)$ до двадцать шестаго десятичнаго знака.

Формула (17) показываетъ, какъ это мы сказали, что формула Штирлинга позволяетъ вообще вычислить $\log \Gamma(x+1)$ посредствомъ приближенія, которое будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше будетъ x .

546. Взявъ одинъ или нѣсколько разъ дифференціалъ формулы Штирлинга, получимъ полезныя формулы; но такъ какъ формула Штирлинга содержитъ расходящійся рядъ, то то же самое будетъ и съ тѣми, которыя мы имѣемъ въ виду. Однако эти формулы, такъ же какъ и формула Штирлинга, могутъ служить для численнаго вычисленія; этимъ мы сейчасъ и займемся. Замѣтимъ, что количество Θ , входящее подъ знакъ \int въ послѣднемъ членѣ второй части формулы (7), не зависитъ отъ x ; поэтому, взявъ μ разъ дифференціалъ этого уравненія, будемъ имѣть

$$\begin{aligned}
(-1)^\mu \frac{d^\mu \log \varphi(x)}{dx^\mu} &= \frac{B_1}{1 \cdot 2} \int_0^\infty e^{\alpha x} \alpha^\mu d\alpha - \dots \\
&+ (-1)^{n-1} \frac{B_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{\mu+2n-2} d\alpha \\
&+ (-1)^n \frac{B_{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (2n+2)} \int_0^\infty \Theta e^{-\alpha x} \alpha^{\mu+2n} d\alpha;
\end{aligned}$$

потомъ, поступая такъ же, какъ и при выводѣ формулы (8) изъ (7), найдемъ

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} (-1)^\mu \frac{d^\mu \log \varphi(x)}{dx^\mu} &= B_1 \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(3)} \frac{1}{x^{\mu+1}} - B_2 \frac{\Gamma(\mu+3)}{\Gamma(5)} \frac{1}{x^{\mu+3}} - \dots \\ &+ (-1)^{n-1} B_n \frac{\Gamma(\mu+2n-1)}{\Gamma(2n+1)} \frac{1}{x^{\mu+2n-1}} \\ &+ (-1)^n \Theta B_n \frac{\Gamma(\mu+2n+1)}{\Gamma(2n+3)} \frac{1}{x^{\mu+2n+1}}, \end{aligned} \right.$$

гдѣ θ означаетъ, какъ и Θ , количество, заключающееся между 0 и 1. Когда x достаточно велико, тогда члены второй части сначала, какъ и въ формулѣ Штирлинга, убываютъ, и ошибка, которую получаемъ, когда останавливаемся на какомъ-нибудь членѣ, меньше слѣдующаго члена и одного съ нимъ знака; въ частномъ случаѣ $\mu = 1$ имѣемъ

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d \log \varphi(x)}{dx} &= -\frac{B_1}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{B_2}{4} \frac{1}{x^4} - \dots \\ &+ (-1)^n \frac{B_n}{2n} \frac{1}{x^{2n}} + (-1)^{n+1} \theta \frac{B_{n+1}}{2n+2} \frac{1}{x^{2n+2}}. \end{aligned} \right.$$

Взявъ дифференціалъ формулы (15) § 537, найдемъ

$$\begin{aligned}
\frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx} &= \log x + \frac{1}{2x} + \frac{d \log \varphi(x)}{dx}, \\
(-1)^\mu \frac{d^\mu \log \Gamma(x+1)}{dx^\mu} &= \frac{\Gamma(\mu-1)}{x^{\mu-1}} - \frac{\Gamma(\mu)}{2x^\mu} + (-1)^\mu \frac{d^\mu \log \varphi(x)}{dx^\mu},
\end{aligned}$$

поэтому будемъ имѣть

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx} &= \log x + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2} \frac{1}{x^2} + \dots \\ &+ (-1)^n \frac{B_n}{2n} \frac{1}{x^{2n}} + (-1)^{n+1} \theta \frac{B_{n+1}}{2n+2} \frac{1}{x^{2n+2}}, \end{aligned} \right.$$

и для $\mu > 1$

$$(22) \left\{ \begin{aligned} (-1)^\mu \frac{d^\mu \log \Gamma(x+1)}{dx^\mu} &= \frac{\Gamma(\mu-1)}{x^{\mu-1}} - \frac{\Gamma(\mu)}{2x^\mu} + B_1 \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(3)} \frac{1}{x^{\mu+1}} - \dots \\ &+ (-1)^{n-1} B_n \frac{\Gamma(\mu+2n-1)}{\Gamma(2n+1)} \frac{1}{x^{\mu+2n-1}} \\ &+ (-1)^n \theta B_n \frac{\Gamma(\mu+2n+1)}{\Gamma(2n+3)} \frac{1}{x^{\mu+2n+1}}. \end{aligned} \right.$$

гдѣ θ означаетъ во всѣхъ этихъ формулахъ количество, заключающееся между 0 и 1.

547. Результаты, которые мы только-что получили, снабжаютъ очень простымъ способомъ вычисленія постоянной Эйлера — постоянной, которую мы означили черезъ C . За исходную точку мы возьмемъ формулу (2) § 523, которая предполагаетъ x цѣлымъ числомъ и которая, отъ измѣненія x въ $x+1$, обращается въ

$$C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx};$$

замѣнивъ $\frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx}$ его значеніемъ, даваемымъ формулой (21), получимъ

$$C = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x}\right) - \log x - \frac{1}{2x} + \frac{B_1}{2x^2} - \frac{B_2}{4x^4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{2nx^{2n}} + \dots,$$

ошибка, полученная отъ того, что мы остановились на членѣ, зависящемъ отъ B_n , по абсолютной величинѣ будетъ меньше, чѣмъ $\frac{B_{n+1}}{(2n+2)x^{2n+2}}$. Замѣнивъ въ предыдущей формулѣ числа B ихъ значеніями, найдемъ

$$(13) \left\{ \begin{aligned} C &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x}\right) - \log x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{12x^2} \\ &- \frac{1}{120x^4} + \frac{1}{252x^6} - \frac{1}{240x^8} + \frac{1}{132x^{10}} - \frac{691}{32760x^{12}} + \dots, \end{aligned} \right.$$

если-же остановимся на послѣднемъ изъ написанныхъ членовъ, то полученная ошибка будетъ меньше $\frac{1}{12x^{14}}$. Такимъ образомъ, сдѣлавъ $x = 10$, получимъ формулу

$$C = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) \\ - \log 10 - \frac{1}{20} + \frac{0,01}{12} - \frac{0,0001}{120} + \frac{0,000\,001}{252} \\ - \frac{0,000\,000\,01}{240} + \frac{0,000\,000\,000\,1}{132} - \frac{0,000\,000\,000\,691}{32760},$$

которая дастъ значеніе C съ точными пятнадцатью десятичными знаками; взявъ

$$\log 10 = 2,302\,585\,092\,994\,045\,68,$$

безъ труда найдемъ значеніе

$$C = 0,577\,215\,664\,901\,532,$$

уже данное въ § 522.

548. Въ § 542 мы дали формулу, позволяющую вычислить послѣдовательно числа B_1, B_2, B_3, \dots ; можно вообще получить для B_n выраженіе, освобожденное отъ трансцендентныхъ количествъ, но которое будетъ немного сложно. Мы думаемъ, однако, что небезполезно, оканчивая эту главу, вывести эту формулу.

Числа Бернулли опредѣляются формулой (6), которая можетъ быть написана слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{B_1}{1 \cdot 2} x - \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^3 + \dots \\ + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{1 \cdot 2 \dots 2n} x^{2n-1} + \dots$$

Но тождественно имѣемъ

$$\frac{1}{e^z + 1} = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{2}{e^{2z} - 1};$$

если же дроби второй части замѣнимъ ихъ значеніями въ рядахъ, употребивъ при этомъ предъидущую формулу, приложенную къ случаямъ $\alpha = z$ и $\alpha = 2z$, то получимъ

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{e^z + 1} &= \frac{1}{2} - (2^2 - 1) \frac{B_1}{1 \cdot 2} z + (2^4 - 1) \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} z^3 - \dots \\ &+ (-1)^n (2^{2n} - 1) \frac{B_n}{1 \cdot 2 \dots 2n} z^{2n-1} + \dots, \end{aligned} \right.$$

сходящийся рядъ для всѣхъ значеній z , которыхъ модуль меньше π ; поэтому по формулѣ Маклорена имѣемъ

$$(25) \quad (-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2n} B_n = \frac{d^{2n-1} \frac{1}{e^z+1}}{dz^{2n-1}} \quad (\text{для } z=0).$$

Первая производная функціи $\frac{1}{e^z+1}$ есть $\frac{-e^z}{(e^z+1)^2}$, и не трудно видѣть, что вообще будемъ имѣть

$$\frac{d^{2n-1} \frac{1}{e^z+1}}{dz^{2n-1}} = \frac{A_1 e^{(2n-1)z} + A_2 e^{(2n-2)z} + \dots + A_{2n-1} e^z}{(e^z+1)^{2n}},$$

гдѣ $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$ коэффициенты независящіе отъ z ; сверхъ того уравненіе (24) показываетъ, что первая производная функціи $\frac{1}{e^z+1}$ есть четная функція отъ z , которая не измѣняется, когда измѣняемъ z въ $-z$; отсюда слѣдуетъ, что то же самое имѣетъ мѣсто для всѣхъ производныхъ нечетныхъ порядковъ. Но отъ измѣненія z въ $-z$, предыдущее выраженіе обращается въ

$$\frac{A_{2n-1} e^{(2n-1)z} + A_{2n-2} e^{(2n-2)z} + \dots + A_1 e^z}{(e^z+1)^{2n}};$$

нужно поэтому, чтобы вообще $A_{2n-i} = A_i$ и слѣдовательно

$$(26) \quad \frac{d^{2n-1} \frac{1}{e^z+1}}{dz^{2n-1}} = \frac{A_1 [e^{(2n-1)z} + e^z] + \dots + A_{n-1} [e^{(n+1)z} + e^{(n-1)z}] + A_n e^{nz}}{(e^z+1)^{2n}}.$$

Теперь имѣемъ

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^z+1} &= \frac{e^{-z}}{1+e^{-z}} \\ &= e^{-z} - e^{-2z} + e^{-3z} - \dots + (-1)^{\mu-1} e^{-\mu z} + \dots, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n-1} \frac{1}{e^z+1}}{dz^{2n-1}} &= -1^{2n-1} e^{-z} + 2^{2n-1} e^{-2z} - 3^{2n-1} e^{-3z} - \dots \\ &\quad + (-1)^{\mu} \mu^{2n-1} e^{-\mu z} + \dots; \end{aligned}$$

но также имѣемъ

$$\begin{aligned}
(e^z + 1)^{2n} &= e^{2nz} + \frac{2n}{1} e^{(2n-1)z} + \dots \\
&\quad + \frac{2n(2n-1)\dots(2n-i+1)}{1 \cdot 2 \dots i} e^{(2n-i)z} + \dots \\
&\quad + 2ne^z + 1,
\end{aligned}$$

перемноживъ же между собой предъидущія уравненія, на основаніи формулы (26), будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}
&A_1 [e^{(2n-1)z} + e^z] + \dots + A_{n-1} [e^{(n+1)z} + e^{(n-1)z}] + A_n e^{nz} \\
&= [-1^{2n-1} e^{-z} + 2^{2n-1} e^{-2z} - \dots + (-1)^\mu \mu^{2n-1} e^{-\mu z} + \dots] \\
&\quad \times \left[e^{2nz} + \dots + \frac{2n(2n-1)\dots(2n-i+1)}{1 \cdot 2 \dots i} e^{(2n-i)z} + \dots + 2ne^z + 1 \right].
\end{aligned}$$

Первая часть этой формулы есть цѣлая функція отъ e^z ; слѣдовательно, если произведемъ умноженіе, указанное во второй части, то останутся только члены, содержащіе положительныя степени отъ e^z ; написавъ, что члены въ $e^{(2n-\mu)z}$ равны въ обѣихъ частяхъ, найдемъ

$$A_1 = -1^{2n-1},$$

и, для значеній μ , превышающихъ 1,

$$\begin{aligned}
(27) \quad A_\mu &= (-1)^\mu \left[\mu^{2n-1} - \frac{2n}{1} (\mu-1)^{2n-1} + \dots \right. \\
&\quad \left. + (-1)^i \frac{2n(2n-1)\dots(2n-i+1)}{1 \cdot 2 \dots i} (\mu-i)^{2n-1} + \dots \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{\mu-1} \frac{2n(2n-1)\dots(2n-\mu+2)}{1 \cdot 2 \dots (\mu-1)} 1^{2n-1} \right].
\end{aligned}$$

но формулы (25) и (26) даютъ

$$(-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2n} B_n = \frac{1}{2^{2n-1}} (A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{n-1} + \frac{1}{2} A_n);$$

поэтому имѣемъ

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^n 2^{2n-1} (2^{2n}-1)}{2n} B_n \\
&= -1^{2n-1} + (2^{2n-1} - 2n) - \left[3^{2n-1} - 2n 2^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \right] + \dots \\
&\quad + (-1)^{n-1} \left[(n-1)^{2n-1} - 2n(n-2)^{2n-1} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{2n \dots (n+1)}{1 \dots (n-2)} 1^{2n-1} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} (-1)^n \left[n^{2n-1} - 2n(n-1)^{2n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2n \dots (n+2)}{1 \dots (n-1)} 1^{2n-1} \right];
\end{aligned}$$

наконецъ, если соединимъ члены, содержащіе n^{2n-1} , $(n-1)^{2n-1} \dots$, то будемъ имѣть

$$(28) \left\{ \begin{aligned} & \frac{2^{2n-1} (2^{2n} - 1)}{2n} B_n = \frac{1}{2} n^{2n-1} - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2n}{1} \right) (n-1)^{2n-1} \\ & + \left[1 + \frac{2n}{1} + \frac{1}{2} \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \right] (n-2)^{2n-1} \\ & - \left[1 + \frac{2n}{1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right] (n-3)^{2n-1} \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

формулу, въ которой законъ составленія членовъ очевиденъ.

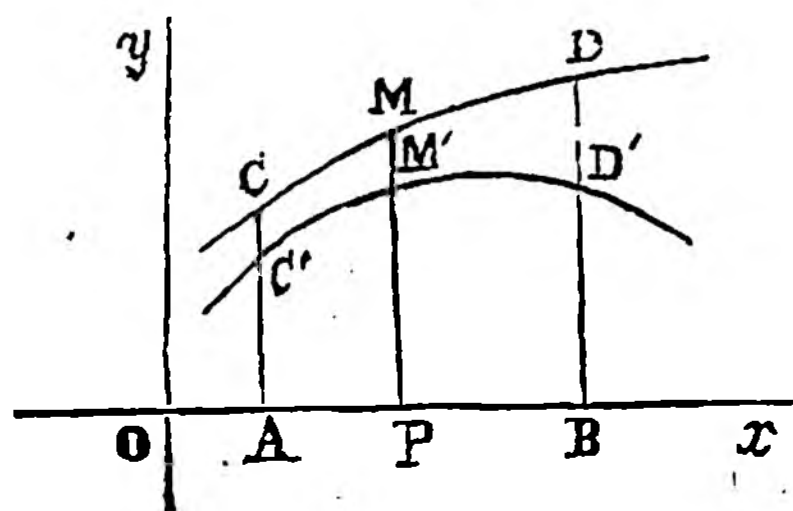
ГЛАВА IV.

О КВАДРАТУРѢ И СПРЯМЛЕНІИ КРИВЫХЪ.

О квадратурѣ плоскихъ кривыхъ.

549. Дѣйствиѣ, имѣющее предметомъ интегрированіе даннаго дифференціала $f(x) dx$, часто называется *квадратурой*; это дѣйствиѣ на самомъ дѣлѣ, какъ мы видѣли, есть то, которое нужно произвести, когда желаемъ опредѣлить площадь, заключающуюся между кривой, которой ордината есть $f(x)$, осью абсциссъ и двумя ординатами, отвѣчающими опредѣленнымъ абсциссамъ.

Чтобы получить площадь, заключающуюся между двумя данными кривыми CMD , $C'M'D'$, и ординатами $CC'A$, $DD'B$, отвѣчающими абсциссамъ x_0 и X , мы замѣтимъ, что эта площадь есть разность двухъ $CDBA$, $C'D'BA$. Если означимъ



черезъ y , y' ординаты MP , $M'P$ двухъ кривыхъ, отвѣчающихъ абсциссѣ переменнѣйшей x , то искомая площадь, въ случаѣ прямоугольныхъ координатъ, будетъ

$$\int_{x_0}^X y dx - \int_{x_0}^X y' dx = \int_{x_0}^X (y - y') dx.$$

Эта формула приложима къ тому случаю, когда требуется найти площадь сегмента, заключеннаго между дугой кривой и ея хордой; тогда y' есть линейная функція $ax + b$.

Площадь, ограниченная частями какихъ-нибудь кривыхъ, опредѣленныхъ аналитически, можетъ быть раздѣлена на нѣсколько положительныхъ или отрицательныхъ частей, которыя, какъ мы сейчасъ показали, могутъ быть вычислены.

Въ вопросахъ квадратуръ, прямолинейныя координаты не представляютъ постоянно переменныхъ, которыя надлежитъ употреблять. Въ частности часто бываетъ выгодно употреблять полярныя координаты; мы опредѣлимъ тогда площади нѣкоторыхъ секторовъ, образованныхъ дугой кривой и двумя радіусами-векторами. Если черезъ ρ , ω назовемъ полярныя координаты, черезъ ω_0 и Ω значенія ω , отвѣчающія крайнимъ радіусамъ, то общее выраженіе секторовъ, о которыхъ мы говорили, будетъ

$$\int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} \rho^2 d\omega.$$

Если желаемъ имѣть площадь, заключающуюся между двумя кривыми и радіусами-векторами, отвѣчающими угламъ ω_0 и Ω , то употребимъ формулу

$$\int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} (\rho^2 - \rho'^2) d\omega,$$

гдѣ ρ и ρ' означаютъ радіусы-векторы двухъ данныхъ кривыхъ.

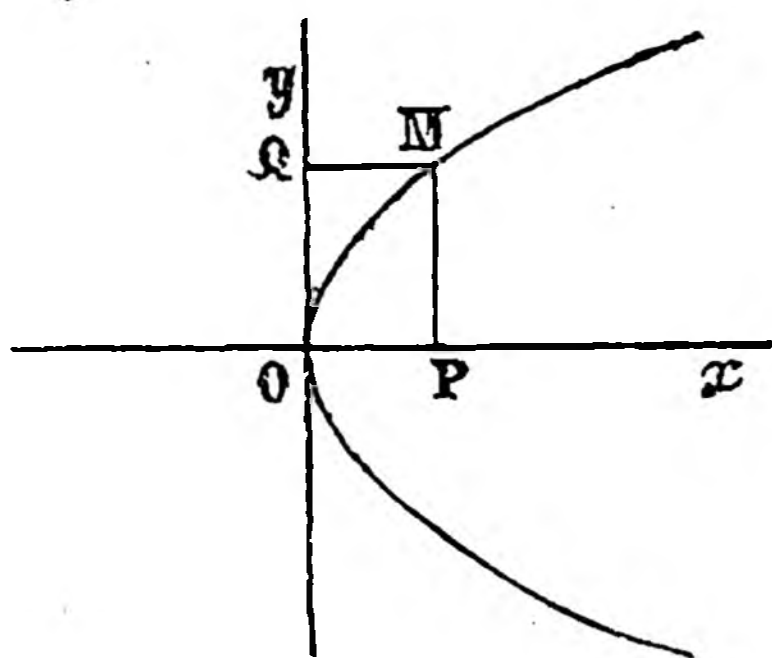
Въ Дифференціальномъ исчисленіи мы дали различные примѣры квадратуръ, въ которыхъ интегрированіе производится непосредственно; мы дадимъ здѣсь нѣсколько другихъ.

550. П а р а б о л ы. — Подъ именемъ *параболы* мы понимаемъ кривыя, опредѣляемыя въ прямолинейныхъ координатахъ уравненіемъ вида

$$y^m = px^n,$$

гдѣ m и n положительные показатели. Означимъ черезъ x

площадь OMP , заключенную между кривой, осью абсциссъ



и ординатой $MP = y$. Въ случаѣ прямоугольныхъ координатъ имѣемъ

$$du = y dx = p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}} dx,$$

откуда

$$u = p^{\frac{1}{m}} \int_0^x x^{\frac{n}{m}} dx = \frac{m}{m+n} p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}+1} = \frac{m}{m+n} xy.$$

Но произведение xy равно площади прямоугольника $ORMQ$, построеннаго на координатахъ точки M ; поэтому имѣемъ

$$\frac{OMP}{ORMQ} = \frac{m}{m+n} \quad \text{или} \quad \frac{OMP}{OMQ} = \frac{m}{n};$$

слѣдовательно, парабола раздѣляетъ площадь прямоугольника на двѣ части, которыя находятся между собой въ отношеніи чиселъ m и n .

Обратно, всякая кривая, обладающая этимъ свойствомъ, есть парабола, потому что предъидущая пропорція, т. е.

$$\frac{u}{xy - u} = \frac{m}{n},$$

дасть

$$u = \frac{m}{m+n} xy, \quad du = y dx = \frac{m}{m+n} (x dy + y dx)$$

и

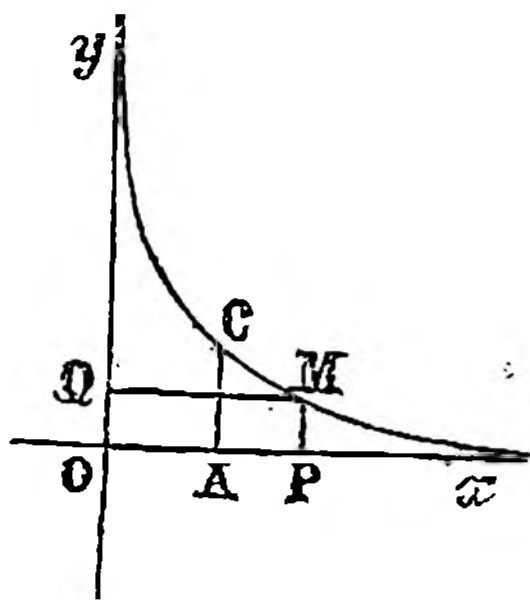
$$m \frac{dx}{x} - n \frac{dy}{y} = 0 \quad \text{или} \quad d \log x^m - d \log y^n = 0,$$

это же показываетъ, что отношеніе $\frac{y^n}{x^m}$ равно постоянной.

551. Гиперболы. — Подъ именемъ *гиперболы* извѣстны кривыя, опредѣляемыя въ прямолинейныхъ координатахъ уравненіемъ вида

$$x^m y^n = p,$$

гдѣ m и n положительные показатели. Предположимъ, что m не меньше n , и построимъ вѣтвь кривой, расположен-



ную въ углѣ положительныхъ координатъ и имѣющую асимптотами двѣ оси Ox , Oy . Пусть будутъ $AC = y_0$, $MP = y$ ординаты, отвѣчающія абсциссамъ x_0 и x ; u площадь, заключенная между этими ординатами, осью абсциссъ и кривой. Въ случаѣ прямоугольныхъ координатъ имѣемъ

$$du = ydx = p^{\frac{1}{m}} x^{-\frac{n}{m}} dx,$$

откуда, исключая случая $m = n$,

$$u = \frac{m}{m-n} p^{\frac{1}{m}} \left(x^{\frac{m-n}{m}} - x_0^{\frac{m-n}{m}} \right).$$

Мы видимъ, что площадь u возрастаетъ сверхъ всякаго предѣла, когда x стремится къ безконечности; напротивъ, она стремится къ конечному предѣлу

$$u = \frac{m}{m-n} p^{\frac{1}{m}} x^{\frac{m-n}{m}} = \frac{m}{m-n} xy,$$

когда x_0 стремится къ нулю. Предъидущая формула выражаетъ, что неопредѣленная площадь U и прямоугольникъ $ORMQ$, построенный на координатахъ точки M , находятся въ постоянномъ отношеніи: m къ $m - n$.

Это свойство принадлежитъ исключительно гиперболамъ, потому что предъидущая формула даетъ

$$dU = y dx = \frac{m}{m-n} (x dy + y dx),$$

откуда

$$m \frac{dy}{y} + n \frac{dx}{x} = 0 \quad \text{или} \quad d \log (x^n y^m) = 0,$$

и, следовательно,

$$x^n y^m = \text{const.}$$

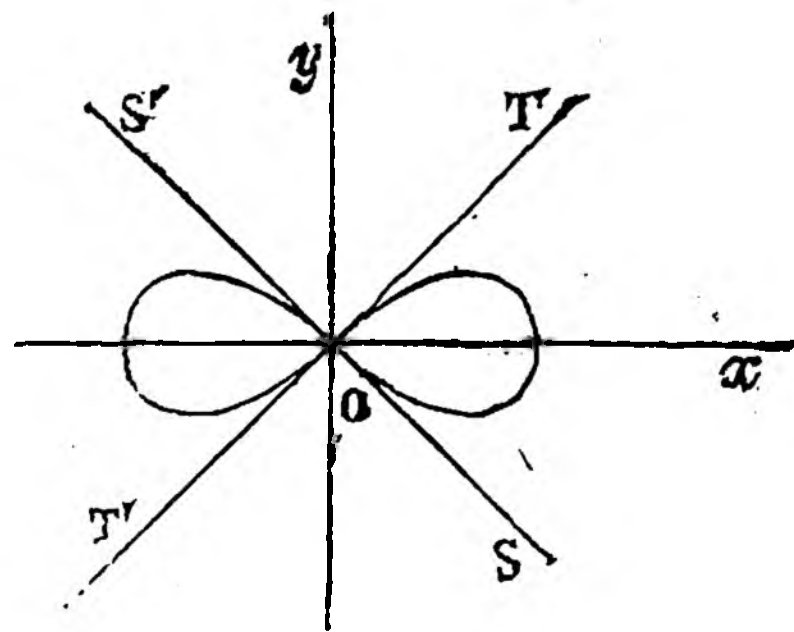
552. ЛЕМНИСКАТА. — Между кривыми, которых квадратура можетъ быть, съ точки зрѣнія геометріи, строго высчитана, нужно замѣтить *лемнискату* Бернулли. Эта кривая имѣетъ то свойство, что *разстоянія каждой изъ ея точекъ отъ двухъ постоянныхъ, разстояніе между которыми есть $2a$, имѣютъ постоянное произведеніе равное a^2* . Въ полярныхъ координатахъ лемниската имѣетъ уравненіемъ

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\omega,$$

гдѣ ρ означаетъ радіусъ-векторъ, выходящій изъ центра. Площадь u сектора, ограниченнаго радіусами, отвѣчающими значеніямъ ω_0 , Ω переменнѣй ω , имѣетъ значеніе

$$u = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} \rho^2 d\omega = a^2 \int_{\omega_0}^{\Omega} \cos 2\omega d\omega = \frac{a^2}{2} (\sin 2\Omega - \sin 2\omega_0).$$

Кривая симметрична относительно полярной оси Ox и перпендикуляра Oy къ этой оси; она состоитъ изъ двухъ замкнутыхъ вѣтвей, и двѣ касательныя TT' , SS' , проведенныя



черезъ центръ O , наклонены къ оси на 45 градусовъ. Если ищемъ площадь, заключающуюся въ одной изъ вѣтвей, то надо сдѣлать въ предъидущей формулѣ $\omega_0 = -\frac{\pi}{4}$, $\Omega = \frac{\pi}{4}$, ко-

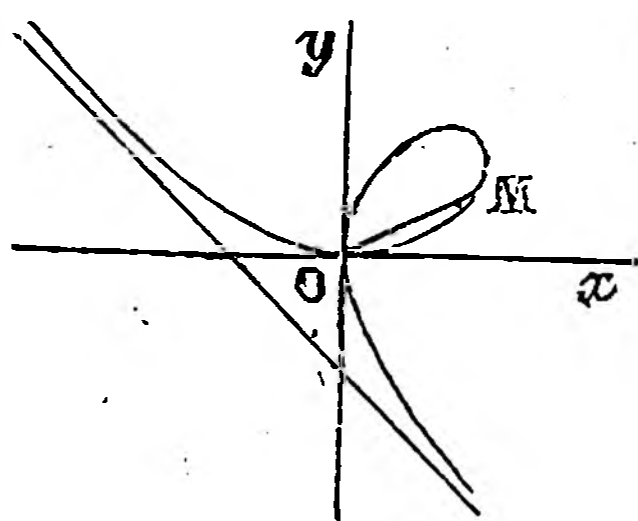
торая тогда дастъ

$$u = a^2.$$

553. Д Е К А Р Т О В Ъ Л И С Т Ъ. — Кривая, извѣстная подъ этимъ именемъ, въ прямоугольныхъ координатахъ имѣетъ уравненіемъ

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

гдѣ a данный параметръ. Она состоитъ изъ двухъ безконечныхъ вѣтвей, встрѣчающихся въ началѣ координатъ и имѣю-



щихъ асимптотой прямую, опредѣляемую уравненіемъ

$$x + y + a = 0.$$

Нужно вмѣсто x и y подставить полярныя координаты ρ и ω , такъ чтобы

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega.$$

Уравненіе кривой тогда обратится въ

$$\rho = \frac{3a \sin \omega \cos \omega}{\sin^3 \omega + \cos^3 \omega},$$

уравненіе же асимптоты есть

$$\rho_1 = \frac{-a}{\sin \omega + \cos \omega}.$$

Площадь, заключенная между кривой и радіусами, отвѣчающими значеніямъ ω_0 и Ω , будетъ

$$u = \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{1}{2} \rho^2 d\omega = \frac{3a^2}{2} \int_{\omega_0}^{\Omega} \frac{3 \tan^2 \omega \frac{d\omega}{\cos^3 \omega}}{(1 + \tan^3 \omega)^2};$$

количество подъ знакомъ \int есть дифференціалъ отъ $\frac{-1}{1 + \tan^3 \omega};$

поэтому имѣемъ

$$u = \frac{3a^2}{2} \left[\frac{1}{1 + \operatorname{tang}^3 \omega_0} - \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^3 \Omega} \right].$$

Если желаемъ опредѣлить площадь завитка, образованнаго кривой, то сдѣлаемъ $\omega_0 = 0$, $\Omega = \frac{\pi}{2}$, это же дастъ $\frac{3a^2}{2}$

Чтобы имѣть площадь, заключающуюся между вѣтвью кривой, ея асимптотой и двумя радіусами-векторами, нужно вычесть u изъ площади u_1 , заключенной между асимптотой и радіусами-векторами. Эта площадь u_1 есть площадь треугольника; сверхъ того она имѣетъ выраженіемъ

$$u_1 = \int_{\omega_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \rho^2 d\omega = \frac{a^2}{2} \int_{\omega_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\cos^2 \omega (1 + \operatorname{tang} \omega)^2}$$

или

$$u_1 = \frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{1 + \operatorname{tang} \omega_0} - \frac{1}{1 + \operatorname{tang} \Omega} \right];$$

поэтому будемъ имѣть

$$u_1 - u = \frac{a^2}{2} \left[\frac{2 - \operatorname{tang} \Omega}{1 - \operatorname{tang} \Omega + \operatorname{tang}^2 \Omega} - \frac{2 - \operatorname{tang} \omega_0}{1 - \operatorname{tang} \omega_0 + \operatorname{tang}^2 \omega_0} \right].$$

Если желаемъ опредѣлить неопредѣленную площадь, заключенную между отрицательной частью оси x , кривой и ея асимптотой, то мы должны сдѣлать $\omega_0 = \frac{3\pi}{4}$, $\Omega = \pi$; въ этомъ случаѣ получимъ

$$u_1 - u = \frac{a^2}{2};$$

очевидно, мы найдемъ то же самое значеніе для площади, заключенной между положительной частью оси y , кривой и ея асимптотой. Прибавивъ къ этимъ двумъ площадямъ площадь треугольника, образованнаго асимптотой и осями, которая опять равна $\frac{a^2}{2}$, получимъ полную площадь $\frac{3a^2}{2}$, заключающуюся между двумя безконечными вѣтвями и ихъ асимптотами. Эта площадь равна, какъ мы видимъ, площади замкнутаго завитка.

О спрямленіи кривыхъ.

554. Задача спрямленія плоскихъ кривыхъ и кривыхъ двоякой кривизны не отличается отъ той, которою мы только-что занимались.

Пусть s дуга плоской кривой, отсчитываемая отъ произвольнаго начала; въ системѣ прямоугольныхъ координатъ имѣемъ

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

если же означимъ черезъ t независимую переменную, черезъ t_0 , T значенія t , отвѣчающія началу дуги S и ея крайней точкѣ, то, предположивъ, что t измѣняется въ томъ же смыслѣ, когда беремъ дугу S , будемъ имѣть

$$s = \int_{t_0}^T \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} dt.$$

Если употребимъ полярныя координаты ρ и ω , и если означимъ опять черезъ t независимую переменную, то будемъ имѣть (§ 202)

$$s = \int_{t_0}^T \frac{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}}{dt} dt.$$

Для кривыхъ двоякой кривизны имѣемъ аналогичныя формулы. Означимъ черезъ s дугу какой-нибудь кривой, отсчитываемую отъ произвольнаго начала; въ системѣ прямоугольныхъ координатъ имѣемъ

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

когда же употребляемъ полярныя координаты r , θ , ψ , тогда тотъ же дифференціалъ имѣетъ выраженіемъ (§ 259)

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2};$$

поэтому, если черезъ t означимъ независимую переменную, то дуга S , которой концы отвѣчаютъ значеніямъ t_0 и T переменной t , будетъ имѣть выраженіемъ

$$s = \int_{t_0}^T \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} dt$$

или

$$S = \int_{t_0}^T \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2}}{dt} dt.$$

Если дѣло идетъ о сферической кривой и если беремъ центръ шара за начало радіусовъ-векторовъ, то будемъ имѣть $r = \text{const.}$, и предыдущая формула дастъ

$$S = r \int_{t_0}^T \frac{\sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2}}{dt} dt.$$

Въ Дифференціальномъ исчисленіи мы дали выраженіе дуги параболы и мы натурально были приведены къ разсужденію о спрямленіи нѣкоторыхъ другихъ кривыхъ. Было бы излишнимъ увеличивать здѣсь число примѣровъ, и мы ограничимся тѣмъ, что дадимъ нѣкоторые, представляющіе интересъ для Геометріи или для Анализа.

Спряменение эллипса и гиперболы.

555. Разсмотримъ эллипсъ, половина большой оси котораго будетъ взята за единицу и котораго эксцентриситетъ будетъ означенъ черезъ k . Прямоугольныя координаты кривой, отнесенной къ своимъ осямъ, будутъ (§ 221) $\sin \varphi$, $\sqrt{1 - k^2} \cos \varphi$ и дифференціалъ дуги будетъ $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$. Теперь, если означимъ, согласно Лежандру, черезъ $E(\varphi)$ длину дуги эллипса, начинающуюся отъ одного изъ концовъ малой оси, при которой уголъ φ есть нуль, и кончающуюся въ точкѣ, отвѣчающей какому-нибудь значенію φ , то будемъ имѣть

$$(1) \quad E(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

и мы также можемъ написать (§ 221):

$$(2) \quad E(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - k^2 \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Если разсмотримъ въ то же время гиперболу, которой поперечная полу-ось будетъ k и мнимая полу-ось $\sqrt{1 - k^2}$,

то координаты кривой, отнесенной къ своимъ осямъ, могутъ быть выражены (§ 222) черезъ $(1 - k^2) \operatorname{tang} \varphi$ и $\frac{k \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}$; означивъ въ этомъ случаѣ черезъ $Y(\varphi)$ дугу гиперболы, отсчитываемую отъ поперечной оси, при которой φ есть нуль, и оканчивающуюся въ точкѣ, отвѣчающей какому-нибудь значенію φ , будемъ имѣть

$$(3) \quad Y(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{(1 - k^2) d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

и мы также можемъ написать (§ 222)

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} Y(\varphi) &= k^2 \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - k^2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ &\quad + \operatorname{tang} \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned} \right.$$

Формулы (2) и (4) показываютъ, что дуга эллипса $E(\varphi)$ и дуга гиперболы $Y(\varphi)$ выражаются посредствомъ эллиптическихъ интеграловъ перваго и втораго рода, и обратно, эти эллиптическіе интегралы могутъ быть выражены посредствомъ дуги эллипса и дуги гиперболы; нужно вспомнить, что алгебраическая часть $\operatorname{tang} \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$, содержащаяся въ формулѣ (4), равна касательной къ крайней точкѣ дуги $Y(\varphi)$, оканчивающейся на перпендикулярѣ, опущенномъ изъ центра кривой на эту касательную (§ 222).

Лежандръ означилъ эллиптическую функцію перваго рода черезъ $F(\varphi)$; такимъ образомъ имѣемъ

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

или

$$(5) \quad F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta \varphi},$$

гдѣ для краткости, какъ и въ § 438, сдѣлано

$$(6) \quad \Delta \varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi};$$

но знаменитый авторъ принялъ для функціи втораго рода

дугу эллипса $E(\varphi)$, и отсюда-то названіе *эллиптическихъ функцій*, прилагаемое къ рассматриваемымъ трансцендентнымъ функціямъ. Формула (2) даетъ

$$(7) \quad \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{\Delta \varphi} = \frac{1}{k^2} [F(\varphi) - E(\varphi)],$$

слѣдовательно, функція, которую мы согласились выбрать для означенія втораго рода эллиптическихъ интеграловъ, выражается посредствомъ дуги эллипса и функціи перваго рода.

Формула (4), при употребленіи формулы (2), также даетъ

$$(8) \quad Y(\varphi) = (1 - k^2) F(\varphi) - E(\varphi) + \Delta \varphi \operatorname{tang} \varphi.$$

556. Мы можемъ разложить въ рядъ дуги эллипса и гиперболы или, что приведетъ къ тому же, функціи $F(\varphi)$ и $E(\varphi)$ (§ 483). По формулѣ биннома имѣемъ

$$\frac{1}{\Delta \varphi} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \varphi + \dots,$$

$$\Delta \varphi = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \varphi - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \varphi - \dots,$$

и, слѣдовательно,

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} F(\varphi) &= \varphi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^\varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \int_0^\varphi \sin^4 \varphi \, d\varphi \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \int_0^\varphi \sin^6 \varphi \, d\varphi + \dots, \\ E(\varphi) &= \varphi - \frac{1}{2} k^2 \int_0^\varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi - \frac{1}{2 \cdot 4} k^4 \int_0^\varphi \sin^4 \varphi \, d\varphi \\ &\quad - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \int_0^\varphi \sin^6 \varphi \, d\varphi - \dots \end{aligned} \right.$$

Ряды, содержащіеся въ этихъ формулахъ, постоянно сходящіеся, такъ какъ $k < 1$, и мы увидимъ дальше, что постоянно можно уменьшить какъ угодно этотъ модуль; первая формула не отличается отъ той, которую мы дали въ § 477; интегралы, содержащіеся во вторыхъ частяхъ, даются формулами § 456.

Когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тогда функции $F(\varphi)$, $E(\varphi)$ суть *полные интегралы* Лежандра первого и второго рода; мы опять их означимъ черезъ F_1 , E_1 . Имѣемъ (§ 488)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} \varphi \, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \frac{\pi}{2},$$

и слѣдовательно

$$(10) \quad \begin{cases} F_1 = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 3 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 5 k^6 + \dots \right]; \\ E_1 = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 3 k^4 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 5 k^6 - \dots \right]; \end{cases}$$

вторая изъ формулъ (10) даетъ длину четверти эллипса.

О переменѣ модуля въ эллиптическихъ функцияхъ. — Теорема Ландена.

557. Одно изъ самыхъ замѣчательныхъ свойствъ эллиптическихъ интеграловъ первого рода состоитъ въ томъ, что каждая изъ этихъ функций можетъ быть преобразована безчисленнымъ числомъ различныхъ способовъ въ другую эллиптическую функцию того же рода, которой модуль, по произволу, меньше или больше модуля данной. Слѣдовательно, можно образовать различные ряды модулей, неопредѣленные съ обѣихъ сторонъ, которыхъ члены приближаются или къ нулю или къ единицѣ, и которые отвѣчаютъ равнымъ между собою эллиптическимъ функциямъ первого рода. Мы не можемъ въ этомъ сочиненіи развить важную теорію *преобразованія* эллиптическихъ функций; но мы думаемъ, однако, что небезполезно будетъ показать первый рядъ модулей, данный Лежандромъ, это же позволитъ намъ доказать любопытную теорему Ландена, относящуюся къ дугамъ гиперболы.

Пусть будетъ k данное количество, заключающееся между 0 и 1, φ переменный уголъ, и положимъ по предъидущему

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

гдѣ радикаль взять съ знакомъ $+$. Можно опредѣлить уголъ φ_1 , удовлетворяющій двумъ уравненіямъ

$$(1) \quad \sin (2\varphi_1 - \varphi) = k \sin \varphi, \quad \cos (2\varphi_1 - \varphi) = \Delta\varphi,$$

измѣняющійся, кромѣ того, непрерывно съ φ и уничтожающійся вмѣстѣ съ нимъ. Такъ какъ $\Delta\varphi$ положительное, то уголъ $2\varphi_1 - \varphi$ постоянно заключается между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$; если означимъ черезъ Φ уголъ, заключающійся между 0 и $\frac{\pi}{2}$, имѣющій синусомъ $k \sin \varphi$, то будемъ имѣть

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + \Phi}{2};$$

слѣдовательно, φ_1 опредѣляется вполне, когда дается φ ; обратно, значеніе φ вполне опредѣляется, когда дано φ_1 . Эти два угла измѣняются одновременно отъ 0 до $+\infty$ или отъ 0 до $-\infty$; когда $\varphi = \pi$, Φ есть нуль, и мы имѣемъ $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

Если сложимъ уравненія (1) послѣ умноженія ихъ на $-\sin \varphi$ и $+\cos \varphi$, потомъ на $+\cos \varphi$ и $+\sin \varphi$, то получимъ

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi_1 &= \cos \varphi \Delta\varphi - k \sin^2 \varphi, \\ \sin 2\varphi_1 &= \sin \varphi (k \cos \varphi + \varphi \Delta\varphi), \end{aligned}$$

откуда

$$(2) \quad \begin{cases} 2 \cos^2 \varphi_1 = 1 - k \sin^2 \varphi + \cos \varphi \Delta\varphi, \\ 2 \sin^2 \varphi_1 = 1 + k \sin^2 \varphi - \cos \varphi \Delta\varphi, \\ 2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 = \sin \varphi (k \cos \varphi + \Delta\varphi). \end{cases}$$

Первое изъ уравненій (1) также даетъ

$$(3) \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\sin 2\varphi_1}{k + \cos 2\varphi_1},$$

$$(4) \quad \operatorname{tang} (\varphi - \varphi_1) = \frac{1 - k}{1 + k} \operatorname{tang} \varphi_1,$$

если же положимъ

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1-k}, \quad \Delta_1 \varphi_1 = \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1},$$

то еще будемъ имѣть

$$(5) \quad \begin{cases} \sin \varphi = \frac{2}{1+k} \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\Delta_1 \varphi_1}, \\ \cos \varphi = \frac{1 - \frac{2}{1+k} \sin^2 \varphi_1}{\Delta_1 \varphi_1}, \\ \Delta \varphi = \frac{1 - \frac{2k}{1+k} \sin^2 \varphi_1}{\Delta_1 \varphi_1}. \end{cases}$$

Потомъ, первая изъ формулъ (1) черезъ дифференцирование, употребивъ формулу вторую, дастъ

$$\frac{2 d\varphi_1}{k \cos \varphi + \Delta \varphi} = \frac{d\varphi}{\Delta \varphi},$$

или, на основаніи третьей формулы (2) и первой формулы (5), имѣемъ

$$\frac{d\varphi_1}{\Delta_1 \varphi_1} = \frac{1+k}{2} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi},$$

а такъ какъ φ и φ_1 уничтожаются въ одно время, то

$$(6) \quad \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-k_1^2 \sin^2 \varphi_1}} = \frac{1+k}{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

это же есть важная формула, открытая Лежандромъ. Если положимъ

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}, \quad F(k_1, \varphi_1) = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\Delta_1 \varphi_1},$$

то уравненіе (6) дастъ

$$(7) \quad F(k_1, \varphi_1) = \frac{1+k}{2} F(k, \varphi).$$

Означимъ черезъ $F_1(k)$, $F_1(k_1)$ полныя функціи модулей k и k_1 ; когда φ равно π , уголъ φ_1 имѣетъ значеніе $\frac{\pi}{2}$; сверхъ того, очевидно, имѣемъ

$$F(k, \pi) = 2 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 2 F_1(k),$$

поэтому

$$(8) \quad F_1(k_1) = (1+k) F_1(k).$$

558. На основаніи предъидущаго, модули k и k_1 могутъ быть замѣнены другъ другомъ; эти модули связаны между собой отношеніемъ

$$(9) \quad k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$

и если означимъ черезъ k' , k'_1 дополнительные модули до k и k_1 , т. е. $\sqrt{1-k^2}$ и $\sqrt{1-k_1^2}$, то будемъ имѣть.

$$(10) \quad k'_1 = \frac{1-k}{1+k},$$

откуда

$$(11) \quad k = \frac{1-k_1}{1+k'_1},$$

формула (10) даетъ

$$(12) \quad k'_1 = \frac{k'^2}{(1+k)^2}, \quad \text{откуда } k'_1 < k'^2.$$

Отсюда слѣдуетъ рядъ, рассматриваемый безконечнымъ въ обѣ стороны,

$$(13) \quad \dots k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_2, \dots,$$

въ которомъ членъ $k_0 = k$ меньше 1 и котораго каждый членъ выводится изъ предъидущаго по формулѣ

$$(14) \quad k_{i+1} = \frac{2\sqrt{k_i}}{1+k_i},$$

членъ k_m стремится къ единицѣ, если m стремится къ $+\infty$, и k_m стремится къ нулю, когда m стремится къ $-\infty$. Поэтому эллиптическую функцію перваго рода $F(k, \varphi)$ можно привести къ другой $F(k_i, \varphi_i)$, въ которой модуль k_i какъ угодно близокъ къ нулю или къ единицѣ; что касается амплитуды φ_i этой новой функціи, то она можетъ быть вычислена изъ формулъ, изложенныхъ прежде.

Разсмотримъ, на примѣръ, полную функцію $F_1(k)$; на основаніи формулы (8) будемъ имѣть

$$\begin{aligned} F_1(k) &= (1+k_{-1}) F(k_{-1}) \\ &= (1+k_{-1})(1+k_{-2}) F(k_{-2}) \\ &\dots\dots\dots \\ &= (1+k_{-1})(1+k_{-2}) \dots (1+k_{-i}) F(k_{-i}). \end{aligned}$$

Но если i стремится къ $+\infty$, k_{-i} стремится къ нулю и $F(k_{-i})$ стремится къ предѣлу $\frac{\pi}{2}$; поэтому имѣемъ такое замѣчательное разложеніе полной функціи $F_1(k)$:

$$(15) \quad F_1(k) = \frac{\pi}{2} (1 + k_{-1}) (1 + k_{-2}) (1 + k_{-3}) \dots$$

559. Преобразование, которымъ мы только-что занимались, приводитъ къ важнымъ результатамъ, относящимся къ функціямъ втораго рода. Если умножимъ уравненіе

$$\frac{d\varphi}{\Delta_1 \varphi_1} = \frac{1+k}{2} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}$$

на $\sin^2 \varphi_1$, то на основаніи формулъ (2) будемъ имѣть

$$\frac{\sin^2 \varphi_1 d\varphi_1}{\Delta_1 \varphi_1} = \frac{k(1+k)}{4} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\Delta \varphi} + \frac{1-k}{4} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} - \frac{1+k}{4} \cos \varphi d\varphi,$$

и, взявъ интегралъ,

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2 \varphi_1 d\varphi_1}{\Delta_1 \varphi_1} &= \frac{k(1+k)}{4} \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\Delta \varphi} \\ &+ \frac{1+k}{4} F(k, \varphi) - \frac{1+k}{4} \sin \varphi. \end{aligned} \right.$$

Введемъ вмѣсто интеграловъ втораго рода дуги эллипса $E(k, \varphi)$, $E(k_1, \varphi_1)$; такъ какъ (§ 555) имѣемъ

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\Delta \varphi} &= \frac{1}{k^2} [F(k, \varphi) - E(k, \varphi)], \\ \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2 \varphi_1 d\varphi_1}{\Delta_1 \varphi_1} &= \frac{1}{k_1^2} [F(k_1, \varphi_1) - E(k_1, \varphi_1)], \end{aligned}$$

то формула (16), на основаніи формулы (7), дастъ

$$(17) \quad (1+k) E(k_1, \varphi_1) = E(k, \varphi) - \frac{1}{2} k'^2 F(k, \varphi) + k \sin \varphi.$$

Это уравненіе показываетъ, что эллиптическая функція перваго рода $F(k, \varphi)$ можетъ быть выражена двумя дугами, принадлежащими двумъ различнымъ эллипсамъ.

Дуга гиперболы, какъ мы видѣли въ § 555, дается формулой

$$Y(k, \varphi) = k'^2 F(k, \varphi) - E(k, \varphi) + \tan \varphi \Delta \varphi;$$

исключивъ изъ этого выраженія функцію E посредствомъ формулы (17), получимъ

$$(18) \quad \begin{cases} Y(k, \varphi) = E(k, \varphi) - 2(1+k)E(k, \varphi_1) \\ \quad + 2k \sin \varphi + \tan \varphi \Delta \varphi. \end{cases}$$

Если изъ этой формулы вычтемъ ту, которая получается отъ измѣненія φ и φ_1 въ Φ и Φ_1 , то конечное уравненіе выразитъ теорему, открытую, лѣтъ сто тому назадъ, англійскимъ геометромъ Ланденомъ, именно, что *всякая дуга гиперболы можетъ быть выражена двумя дугами эллипса*. Обратно, *всякая дуга эллипса можетъ быть выражена двумя дугами гиперболы*; нетрудно вывести это предложеніе изъ формулъ, которыя мы доказали.

560. Если въ формулѣ (17) предположимъ $\varphi = \pi$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, то получимъ слѣдующее соотношеніе между полными функціями:

$$(1+k)E_1(k_1) = 2E_1(k) - k'^2 F_1(k).$$

Замѣнивъ k , k' и k_1 сначала черезъ k_i , k'_i , k_{i+1} , потомъ черезъ k_{i-1} , k'_{i-1} , k_i , будемъ имѣть

$$\begin{aligned} (1+k_i)E_1(k_{i+1}) &= 2E_1(k_i) - k_i'^2 F_1(k_i), \\ (1+k_{i-1})E_1(k_i) &= 2E_1(k_{i-1}) - k_{i-1}'^2 F_1(k_{i-1}), \end{aligned}$$

гдѣ модули k_{i-1} , k_i , k_{i+1} опредѣляются въ функціи начальнаго модуля k_0 или k , какъ это было показано въ § 558. Также имѣемъ (§ 557)

$$F_1(k_i) = (1+k_{i-1})F_1(k_{i-1});$$

если же исключимъ функцію F_1 изъ предъидущихъ уравненій и если замѣнимъ k_{i-1} , k'_{i-1} равными количествами

$\frac{1-k'_i}{1+k'_i}$, $\frac{2\sqrt{k'_i}}{1+k'_i}$, то получимъ

$$(19) \quad (k'_i(1+k'_i)E_1(k_{i-1}) - (2+k'_i)E_1(k_i) + (1+k_i)E_1(k_{i+1})) = 0,$$

замѣчательное соотношеніе между периметрами трехъ эллипсовъ, имѣющихъ эксцентриситетами k_{i-1} , k_i , k_{i+1} .

Объ алгебраических кривыхъ, дуги которыхъ выражаются дугами круга.

561. Изслѣдованіе алгебраическихъ кривыхъ, которыхъ дуги выражаются дугами круга, представляетъ нѣкоторый интересъ со стороны Геометріи, потому что надъ этими кривыми, какъ и надъ кругомъ, можно производить всѣ построенія, относящіяся къ сложенію или вычитанію дугъ, къ ихъ умноженію и ихъ дѣленію. Эйлеръ много занимался этимъ изслѣдованіемъ и въ Мемуарѣ, опубликованномъ только послѣ его смерти, онъ показалъ видъ кривыхъ, которыя были найдены, говоритъ онъ, только послѣ долговременной работы по этому предмету.

Кривыя, найденныя Эйлеромъ, составляютъ только очень частный случай тѣхъ, которыхъ неопредѣленная дуга выражается дугой круга и которыхъ прямолинейныя координаты суть раціональныя функціи тригонометрическаго тангенса этой дуги. Я далъ всѣ эти кривыя въ Мемуарѣ, составляющемъ часть XXXV-го выпуска *Journal de l'Ecole Polytechnique*, и я показалъ, что онѣ образуютъ безконечное число различныхъ классовъ, изъ которыхъ каждый содержитъ безконечное число отдѣльныхъ кривыхъ. Я ограничусь здѣсь развитіемъ рѣшенія самаго простаго случая, заключающаго кривыя перваго класса.

Если чрезъ i означимъ мнимое количество $\sqrt{-1}$, чрезъ g положительное количество, ω дѣйствительный уголъ и чрезъ e основаніе неперовскихъ логарифмовъ, потомъ если сдѣлаемъ

$$t = (z - a)^{n+1} (z - b)^{p+1} (z - c)^{q+1} \dots$$

$$\tau = (z - \alpha)^{n+1} (z - \beta)^{p+1} (z - \gamma)^{q+1} \dots,$$

гдѣ a и α мнимыя сопряженныя количества, такъ же какъ b и β , c и γ , . . . , и m , n , p , q , . . . цѣлыя положительныя числа, то общее рѣшеніе данной задачи будетъ дано формулой

$$(1) \quad x + iy = ge^{i\omega} \int \frac{t}{\tau} \frac{(z - i)^m}{(z + i)^{m+2}} dz,$$

если только постоянныя a , b , c , . . . , α , β , γ будутъ такъ выбраны,

чтобы интегралъ, входящій въ предыдущую формулу, былъ алгебраическій. Дѣйствительно, имѣемъ

$$dx + i dy = g e^{i\omega} \frac{t}{\tau} \frac{(z - i)^m}{(z + i)^{m+2}} dz,$$

и, измѣнивъ i въ $-i$,

$$dx - i dy = g e^{-i\omega} \frac{\tau}{t} \frac{(z + i)^m}{(z - i)^{m+2}} dz.$$

Перемноженіе предыдущихъ формулъ даетъ

$$dx^2 + dy^2 = \frac{g^2 dz^2}{(z^2 + 1)^2}, \text{ откуда } \sqrt{dx^2 + dy^2} = g \frac{dz}{1 + z^2},$$

и

$$\int_0^z \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz} dz = g \operatorname{arc tang} z.$$

Такъ какъ степень числителя дроби $\frac{t}{\tau} \frac{(z - i)^m}{(z + i)^{m+2}}$ меньше двумя единицами степени знаменателя, то, если μ означаетъ число постоянныхъ a, b, c, \dots или $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, достаточно удовлетворить $\mu - 1$ условіямъ (§ 419), чтобы сдѣлать алгебраическимъ выраженіе $x + iy$.

Когда t и τ обращаются въ единицу, тогда наша формула не даетъ иной кривой кромѣ круга; самый простой случай есть тотъ, когда имѣемъ

$$t = (z - a)^{n+1}, \quad \tau = (z - \alpha)^{n+1}.$$

Въ этомъ случаѣ формула (1) обращается въ

$$(2) \quad x + iy = g e^{i\omega} \int \frac{(z - a)^{n+1} (z - i)^m}{(z - \alpha)^{n+1} (z + i)^{m+2}} dz,$$

и чтобы интегралъ былъ алгебраическій, достаточно одного условія. Чтобы найти это условіе самымъ простымъ способомъ, возьмемъ новую переменную u и положимъ

$$\frac{z - i}{z + i} = \frac{a - i}{a + i} u;$$

сдѣлаемъ также для краткости

$$(3) \quad \zeta = \frac{(a + i)(\alpha - i)}{(a - i)(\alpha + i)};$$

будемъ имѣть

$$\frac{dz}{(z+i)^2} = \frac{1}{2i} \frac{a-i}{a+i} du$$

и

$$\frac{(z-i)^m dz}{(z+i)^{m+2}} = \frac{1}{2i} \left(\frac{a-i}{a+i} \right)^{m+1} u^m du,$$

потомъ

$$\frac{z-a}{z-\alpha} = \frac{a+iu-1}{\alpha+iu-\zeta}.$$

На основаніи этого формула (2) обращается въ

$$x+iy = A \int \frac{u^m (u-1)^{n+1} du}{(u-\zeta)^{n+1}},$$

гдѣ для краткости сдѣлано

$$A = \frac{g}{2i} e^{i\omega} \left(\frac{a+i}{\alpha+i} \right)^{n+1} \left(\frac{a-i}{a+i} \right)^{m+1}.$$

Теперь мы видимъ, что условіе, чтобы $x+iy$ было алгебраическое, есть

$$(4) \quad \frac{d^n \zeta^m (\zeta-1)^{n+1}}{d\zeta^n} = 0.$$

Это уравненіе относительно ζ есть степени $m+1$; оно имѣетъ корень равный 1 и, если n меньше m , оно имѣетъ $m-n$ нулевыхъ корней; число корней отличныхъ отъ 0 и 1 поэтому равно наименьшему изъ чиселъ m и n ; прилагая n разъ сряду теорему Ролля къ уравненію

$$\zeta^m (\zeta-1)^{n+1} = 0,$$

которое имѣетъ m нулевыхъ корней и $n+1$ корней равныхъ 1, мы видимъ, что всѣ эти корни дѣйствительные, неравные и заключающіеся между 0 и 1. Нулевые корни уравненія (4) не могутъ намъ годиться, потому что, для $\zeta=0$, формула (3) даетъ $a=-i$; или $a=+i$; но одно изъ уравненій имѣетъ слѣдствіемъ другое, потому что a и α сопряженные количества; слѣдовательно, мы снова приходимъ къ тому случаю, когда полиномы t и τ обращаются въ единицу

Для $\zeta = 1$ уравнение (3) дает $a = \alpha$, и формула (2) опять приводится къ той, которую даетъ предположеніе $t = \tau = 1$.

Но каждому изъ корней ζ , заключающихся между 0 и 1, отвѣчаютъ для a и α мнимыя, сопряженные другъ другу, значенія. Замѣтимъ сначала, что можно предположить

$$(5) \quad a \alpha = 1$$

безъ умавленія общности рѣшенія, потому противный случай мы приведемъ къ этому посредствомъ измѣненія переменнѣй.

Очевидно, достаточно будетъ написать $\frac{z + \varepsilon}{1 - \varepsilon z}$ вмѣсто z , гдѣ ε есть одинъ изъ корней уравненія

$$\varepsilon^2 + 2 \frac{a + \alpha}{a \alpha - 1} \varepsilon - 1 = 0;$$

черезъ преобразованіе, о которомъ идетъ рѣчь, формула (3) обращается въ

$$x + iy = g e^{i\omega} \int \frac{(z - a_1)^{n+1} (z - i)^m}{(z - \alpha_1)^{n+1} (z + i)^{m+2}} dz,$$

гдѣ a_1 и α_1 имѣютъ слѣдующія значенія:

$$a_1 = \frac{a - \varepsilon}{1 + a \varepsilon}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha - \varepsilon_1}{1 + \alpha \varepsilon};$$

отсюда имѣемъ $a_1 \alpha_1 = 1$. Поэтому можно допустить уравненіе (5), и изъ этого уравненія, соединеннаго съ (3), тогда получимъ

$$(6) \quad \begin{cases} a = \frac{2\sqrt{\zeta}}{1+\zeta} - \frac{1-\zeta}{1+\zeta} i, \\ \alpha = \frac{2\sqrt{\zeta}}{1+\zeta} + \frac{1-\zeta}{1+\zeta} i; \end{cases}$$

если въ формулѣ (2) a и α дадимъ эти значенія, то выраженіе $x + iy$ будетъ алгебраическое.

562. Разсмотримъ случай $m = 1$, отвѣчающій кривымъ Эйлера. Уравненіе (2) обращается въ

$$(7) \quad x + iy = g e^{i\omega} \int \frac{(z - a)^{n+1} (z - i)}{(z - \alpha)^{n+1} (z + i)^3} dz,$$

и уравненіе условія есть

$$\frac{d^2 \xi^{n+1} (\xi - 1)}{d\xi^2} = 0,$$

откуда, не принимая во вниманіе корней $\xi = 0$, найдемъ

$$\xi = \frac{n}{n+2}.$$

Уравненія (6) даютъ потомъ слѣдующія значенія a и α :

$$(8) \quad \begin{cases} a = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} - \frac{i}{n+1}, \\ \alpha = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} + \frac{i}{n+1}. \end{cases}$$

Интегралъ, образующій вторую часть уравненія (7), есть алгебраическая функція, поэтому ясно, что знаменатель этой функціи есть $(z - \alpha)^n (z + i)^2$. Кромѣ того, если возьмемъ такъ интегралъ, чтобы онъ уничтожился для $z = a$, то числитель будетъ дѣлиться на $(z - a)^{n+2}$ и, такъ какъ этотъ числитель можетъ быть только степени $n+2$, мы будемъ имѣть результатъ вида

$$x + iy = g e^{\omega i} \frac{(z - a)^{n+2}}{(z - \alpha)^n (z + i)^2} + \text{const.}$$

Такъ какъ постоянная вліяетъ только на положеніе начала координатъ, то мы предположимъ ее равной нулю, и мы просто возьмемъ

$$(9) \quad x + iy = g e^{\omega i} \frac{(z - a)^{n+2}}{(z - \alpha)^n (z + i)^2},$$

гдѣ g и ω конечно, имѣютъ тѣ же численные значенія, что и прежде. Исключивъ z изъ уравненія (9) и того, которое изъ него получится отъ измѣненія i въ $-i$, будемъ имѣть уравненіе кривыхъ, которыми мы занимаемся, въ прямолинейныхъ координатахъ; но проще употребить полярныя координаты и исключеніе замѣнить интегрированіемъ.

Взявъ дифференціалъ уравненія (9) и употребивъ формулы (8), получимъ

$$(10) \quad dx + i dy = \frac{2 \sqrt{n(n+2)}}{n+1} g e^{\omega i} \frac{(z - a)^{n+1} (z - i)}{(z - \alpha)^{n+1} (z + i)^3} dz;$$

нужно замѣтить, что уравненіе (9) имѣетъ слѣдствіемъ уравненіе (10) для какого угодно n ; поэтому мы можемъ предположить это число дробнымъ, потому что кривая, къ которой относится уравненіе (9), не перестаетъ быть алгебраической. Такимъ образомъ, только-что полученные нами результаты приобрѣтають общность, которую не дозволяетъ наше предположеніе.

Умножимъ каждое изъ уравненій (9) и (10) на его сопряженное количество, получимъ

$$x^2 + y^2 = g^2 \frac{(z - a)^2 (z - \bar{a})^2}{(z - i)^2 (z + i)^2},$$

$$dx^2 + dy^2 - \frac{4n(n+2)}{(n+1)^2} g^2 \frac{dx^2}{(z - i)^2 (z + i)^2}.$$

Означимъ черезъ ρ радіусъ-векторъ $\sqrt{x^2 + y^2}$, черезъ ds дифференціалъ дуги кривой, именно $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, и возьмемъ ds съ знакомъ противнымъ dz ; будемъ имѣть

$$\rho = g \frac{z^2 - 2z \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} + 1}{z^2 + 1},$$

$$ds = -2g \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \frac{dz}{z^2 + 1};$$

и если положимъ

$$z = -\operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \right), \quad \text{откуда} \quad dz = -\frac{1}{2} \frac{d\lambda}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2} \right)},$$

то эти формулы обратятся въ

$$(11) \quad \rho = g \left(1 + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos \lambda \right),$$

$$(12) \quad ds = g \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} d\lambda.$$

Взявъ дифференціалъ уравненія (11), найдемъ

$$d\rho = -g \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \sin \lambda d\lambda,$$

откуда

$$(13) \quad \frac{d\rho}{ds} = -\sin \lambda,$$

и если ω означаетъ вторую полярную координату, то мы можемъ положить

$$(14) \quad \frac{\rho}{ds} \frac{d\omega}{ds} = + \cos \lambda,$$

такъ какъ $d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = ds^2$.

Изъ уравненій (11), (12) и (14) находимъ

$$d\omega = \frac{ds \cos \lambda}{\rho} = \frac{\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos \lambda d\lambda}{1 + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos \lambda}$$

или

$$(15) \quad d\omega = d\lambda - \frac{d\lambda}{1 + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos \lambda}.$$

Чтобы проинтегрировать выраженіе (15), мы употребимъ новую переменную λ' , опредѣляемую двумя уравненіями

$$(16) \quad \cos \lambda' = \frac{\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} + \cos \lambda}{1 + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos \lambda}, \quad \sin \lambda' = \frac{\frac{1}{n+1} \sin \lambda}{1 + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos \lambda}.$$

Эти уравненія одинаковы, потому что изъ нихъ имѣемъ

$$\cos^2 \lambda' + \sin^2 \lambda' = 1.$$

Взявъ дифференціалъ втораго уравненія (16), получимъ

$$\cos \lambda' d\lambda' = \frac{1}{n+1} \frac{\frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} + \cos \lambda}{\left(1 + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos \lambda\right)^2} d\lambda,$$

откуда, по причинѣ перваго изъ уравненій (16),

$$(n+1) d\lambda' = \frac{d\lambda}{1 + \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \cos \lambda};$$

слѣдовательно, уравненіе (15) обращается въ

$$d\omega = d\lambda - (n+1) d\lambda'.$$

Интегрируемъ это уравненіе такъ, чтобы ω уничтожа-
лось въ одно время съ λ и λ' ; получимъ

$$(17) \quad \omega = \lambda - (n+1) \lambda',$$

откуда

$$(18) \quad \cos \omega + i \sin \omega = (\cos \lambda + i \sin \lambda) (\cos \lambda' - i \sin \lambda')^{n+1}.$$

Сдѣлаемъ для краткости

$$(19) \quad R = \sqrt{-\rho^2 + 2g\rho - \frac{g^2}{(n+1)^2}};$$

изъ уравненія (11) имѣемъ

$$(20) \quad \cos \lambda = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}} \frac{\rho - g}{g}, \quad \sin \lambda = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}} \frac{R}{g},$$

уравненія (16) потомъ дадутъ

$$(21) \quad \begin{cases} \cos \lambda' = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} \frac{(n+1)\rho - \frac{g}{n+1}}{\rho}, \\ \sin \lambda' = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} \frac{R}{\rho}. \end{cases}$$

На основаніи этого имѣемъ

$$\cos \lambda + i \sin \lambda = \frac{1}{g} \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}} (\rho - g + iR),$$

$$\cos \lambda' - i \sin \lambda' = \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} \left[(n+1)\rho - \frac{g}{n+1} - iR \right];$$

наконецъ уравненіе (18) обращается въ

$$(22) \quad \begin{cases} \cos \omega + i \sin \omega \\ = \frac{n+1}{g [\sqrt{n(n+2)}]^{n+2}} \frac{(\rho - g + iR) \left[(n-1)\rho - \frac{g}{n+1} - iR \right]^{n+1}}{\rho^{n+1}}. \end{cases}$$

Это уравненіе (22) разлагается на два другихъ, которыя
опредѣляютъ $\cos \omega$ и $\sin \omega$ въ функціи ρ ; то и другое изъ этихъ
уравненій можетъ быть рассматриваемо какъ уравненіе на-
шихъ кривыхъ въ полярныхъ координатахъ.

Умноживъ уравненіе (22) на ρ , получимъ

$$(23) \quad x + iy = \frac{n+1}{g [\sqrt{n(n+2)}]^{n+2}} \frac{(\rho - g + iR) \left[(n+1) - \frac{g}{n+1} - iR \right]^{n+1}}{\rho^n};$$

въ частномъ случаѣ, когда n цѣлое, значенія x и y имѣютъ слѣдующій видъ:

$$x = \frac{F(\rho)}{\rho^n}, \quad y = \frac{f(\rho)}{\rho^n} R,$$

гдѣ F и f суть цѣлыя функціи отъ ρ .

563. Въ общемъ случаѣ уравненіе (22) очень сложно для того, чтобы могло съ пользой служить къ изученію кривыхъ, которыя оно выражаетъ; лучше употребить систему, образованную изъ уравненій (11), (16) и (17), какъ это дѣлалъ Эйлеръ.

Если возьмемъ за единицу количество $g \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}$, то уравненія (11) и (12) приведутся къ

$$\rho = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cos \lambda, \\ ds = d\lambda;$$

слѣдовательно, имѣемъ

$$s = \lambda,$$

отсчитывая при этомъ дуги отъ $\lambda = 0$, и мы получимъ

$$\rho = \frac{n+1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cos s,$$

общее уравненіе нашихъ кривыхъ между дугой и радіусомъ-векторомъ. Эти результаты сходны съ тѣми, которые получилъ Эйлеръ.

564. Въ случаѣ $n = 1$, принимая $\frac{g}{2}$ за единицу, уравненіе (22) обращается въ

$$\cos \omega + i \sin \omega = \frac{(\rho - 2 + iR)(2\rho - 1 - iR)^2}{3\rho^2 \sqrt{3}}$$

и мы имѣемъ

$$R = \sqrt{-\rho^2 + 4\rho - 1}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что кривая, относящаяся къ случаю $n=1$, опредѣляется тѣмъ или другимъ изъ двухъ уравненій

$$\cos \omega = \frac{\rho^2 + 6\rho - 2}{3\rho^2 \sqrt{3}},$$

$$\sin \omega = \frac{(\rho^2 + 2\rho - 2) \sqrt{-\rho^2 + 4\rho - 1}}{3\rho^2 \sqrt{3}}.$$

Въ случаѣ $n=2$, уравненіе (22), принимая $\frac{g}{3}$ за единицу, обращается въ

$$\cos \omega + i \sin \omega = \frac{(\rho - 3 + iR)(3\rho - 1 - iR)^3}{64\rho^3},$$

и мы имѣемъ

$$R = \sqrt{-\rho^2 + 6\rho - 1}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что кривая, относящаяся къ случаю $n=2$, дается тѣмъ или другимъ изъ двухъ уравненій:

$$\cos \omega = \frac{\rho^4 + 14\rho^2 - 8\rho + 1}{8\rho^3},$$

$$\sin \omega = \frac{(\rho - 1)(\rho^2 + 4\rho - 1) \sqrt{-\rho^2 + 6\rho - 1}}{8\rho^3}.$$

Спрявленія лемнискаты и овала Кассини.

565. Въ полярныхъ координатахъ лемниската имѣетъ уравненіемъ (§ 552)

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\omega;$$

слѣдовательно, имѣемъ

$$\rho \frac{d\rho}{d\omega} = -2a^2 \sin 2\omega, \quad \rho^4 + \rho^2 \frac{d\rho^2}{d\omega^2} = 4a^4,$$

отсюда, означивъ черезъ s дугу кривой, отсчитываемую отъ произвольнаго начала, находимъ

$$ds = 2a^2 \frac{d\rho}{\sqrt{4a^4 - \rho^4}} \text{ или } ds = a \sqrt{2} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}.$$

Если сдѣлаемъ

$$\sin \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi, \quad \cos \omega = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi},$$

то получимъ

$$ds = a \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Если же примемъ линію a за единицу и если заставимъ дугу s начинаться въ точкѣ, гдѣ $\omega = 0$, $\varphi = 0$, то будемъ имѣть

$$s = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Такимъ, образомъ дуга лемнискаты ни что иное, какъ эллиптическій интегралъ перваго рода, амплитуда котораго есть φ , а модуль имѣетъ квадратомъ $\frac{1}{2}$.

Мы увидимъ далѣе, что эллиптическія функціи перваго рода могутъ быть складываемы или вычитаемы между собой, алгебраически умножаемы или дѣлимы тѣмъ же способомъ, что дуги круга; поэтому надъ лемнискатой можно произвести построенія, аналогичныя тѣмъ, къ которымъ мы пришли въ теоріи круга.

566. Лемниската ни что иное, какъ частный случай кривой, извѣстной подъ именемъ *овала Кассини* и опредѣляемой тѣмъ свойствомъ, что произведеніе разстояній каждой точки кривой отъ двухъ неподвижныхъ точекъ есть величина постоянная. Въ полярныхъ координатахъ уравненіе этой кривой есть

$$\rho^4 - 2a^2 \rho^2 \cos 2\omega \times a^4 = b^4,$$

гдѣ $2a$ есть разстояніе двухъ неподвижныхъ точекъ, а b^2 постоянное произведеніе разстояній точки кривой отъ этихъ неподвижныхъ точекъ.

(Овалъ Кассини принимаетъ три очень различные вида, по мѣрѣ того какъ отношеніе $\frac{b}{a}$ меньше, равно или больше

единицы; въ случаѣ $\frac{b}{a} = 1$ овалъ обращается въ лемнискату.

Мы предположимъ сначала $\frac{b}{a} < 1$ и сдѣлаемъ $b^2 = a^2 \sin 2\alpha$; въ этомъ случаѣ кривая состоитъ изъ двухъ замкнутыхъ, равныхъ между собой, вѣтвей, уголъ же 2α есть тотъ, который образуютъ между собой касательныя, проведенныя черезъ центръ. Радиусы-векторы, отвѣчающіе значеніямъ ω_0 и ω_1 переменнѣй ω , опредѣляютъ на кривой двѣ дуги, которыя я означу черезъ $s(\omega_0, \omega_1)$, $\sigma(\omega_0, \omega_1)$ или просто черезъ $s(\omega_1)$, $\sigma(\omega_1)$, если $\omega_0 = 0$. На основаніи этого не трудно найти

$$s(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}} d\omega,$$

$$\sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cos 2\omega - \sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega - \cos^2 2\alpha}} d\omega,$$

отсюда имѣемъ

$$(1) \quad s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega - \cos 2\alpha}},$$

$$(2) \quad s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega + \cos 2\alpha}}.$$

Если положимъ, въ формулѣ (1)

$$(3) \quad \sin \omega = \sin \alpha \sin \varphi,$$

и въ формулѣ (2)

$$(4) \quad \sin \omega = \cos \alpha \sin \psi,$$

то будемъ имѣть

$$(5) \quad s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}},$$

$$(6) \quad s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \psi}},$$

гдѣ углы φ_0 , ψ_0 , ω_0 или φ_1 , ψ_1 , ω_1 должны удовлетворять уравненіямъ (3) и (4).

Если сдѣлаемъ $\omega_0 = 0$, то также будемъ имѣть $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, и если напомнимъ φ , ψ , ω вмѣсто φ_1 , ψ_1 , ω_1 , то уравненія (5) и (6) дадутъ

$$(7) \quad F(\sin \alpha, \varphi) = \frac{a}{b^2} [s(\omega) + \sigma(\omega)],$$

$$(8) \quad F(\cos \alpha, \psi) = \frac{a}{b^2} [s(\omega) - \sigma(\omega)].$$

Отсюда слѣдуетъ, что всякая эллиптическая функція перваго рода, какой бы ни былъ ея модуль, выражается суммой или разностию двухъ дугъ овала Кассини, только что разсмотрѣннаго вида. Обратно, всякая дуга этой кривой можетъ быть выражена посредствомъ суммы двухъ эллиптическихъ функцій перваго рода, которыхъ модули дополнены одинъ другому. Эти модули имѣютъ значенія

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Если въ уравненіи (7) положимъ $\omega = \alpha$, откуда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, и если означимъ черезъ S полную длину кривой, то будемъ имѣть

$$F_1(\sin \alpha) = \frac{a}{4b^2} S,$$

это же показываетъ, что полная функція модуля $\sin \alpha$ можетъ быть выражена посредствомъ цѣлаго периметра кривой.

Въ случаѣ $\frac{b}{a} = 1$, уголъ α равенъ $\frac{\pi}{2}$ и дуги $\sigma(\omega)$ суть нули; мы найдемъ извѣстный результатъ, относящійся къ лемнискатѣ.

567. Предположимъ $\frac{b}{a} > 1$ и положимъ $a^2 = b^2 \sin 2\alpha$; кривая составлена изъ одной только вѣтви. Я означу черезъ $s(\omega_0, \omega_1)$ дугу, опредѣляемую радіусами-векторами, отвѣчающими значеніямъ ω_0 , ω_1 переменнѣй ω , и черезъ $\sigma(\omega_0, \omega_1)$ дугу, опредѣляемую радіусами-векторами перпен-

дикулярными къ двумъ первымъ. На основаніи этого будемъ имѣть

$$s(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}} d\omega,$$

$$\sigma(\omega_0, \omega_1) = \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{-\cos 2\omega + \sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}} d\omega;$$

слѣдовательно, предположивъ ω_0, ω_1 заключающимися между нулемъ и $\frac{\pi}{4}$, получимъ

$$(9) \quad s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = 2 \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cot 2\alpha + \sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}} d\omega,$$

$$(10) \quad s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{b^2}{a} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\sqrt{-\cot 2\alpha + \sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha}} d\omega.$$

Положимъ, въ уравненіи (9),

$$(11) \quad \sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha} = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}{\sin 2\alpha},$$

и въ уравненіи (10),

$$(12) \quad \sqrt{\cos^2 2\omega + \cot^2 2\alpha} = \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \psi}{\sin 2\alpha};$$

будемъ имѣть

$$(13) \quad s(\omega_0, \omega_1) + \sigma(\omega_0, \omega_1) = b \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}},$$

$$(14) \quad s(\omega_0, \omega_1) - \sigma(\omega_0, \omega_1) = b \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \psi}};$$

углы $\varphi_0, \psi_0, \omega_0$ или $\varphi_1, \psi_1, \omega_1$ должны удовлетворять уравненіямъ (11) и (12); если же опредѣлимъ уголъ ω' соотношеніемъ

$$\sin 2\omega' = \sin 2\alpha \sin 2\omega,$$

то уравненія (11) и (12) приведутся къ

$$\sin \varphi = \frac{\sin \omega'}{\sin \alpha}, \quad \sin \psi = \frac{\sin \omega'}{\cos \alpha}.$$

Если $\omega_0 = 0$, то также имѣемъ $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, и уравненія (13) и (14) даютъ

$$(15) \quad F(\sin \alpha, \varphi) = \frac{1}{b} [s(\omega) + \sigma(\omega)],$$

$$(16) \quad F(\cos \alpha, \psi) = \frac{1}{b} [s(\omega) - \sigma(\omega)].$$

Модули этихъ эллиптическихъ функцій опять дополнительны одинъ другому и имѣютъ значенія

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}, \\ \cos \alpha &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}. \end{aligned}$$

Если сдѣлаемъ $\omega = \frac{\pi}{4}$, то получимъ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, и уравненіе (15), означивъ черезъ S полный периметръ кривой, дастъ

$$F_1(\sin \alpha) = \frac{S}{4b}.$$

Мы видимъ, что пришли къ тѣмъ же слѣдствіямъ, что и въ первомъ случаѣ.

Объ алгебраическихъ кривыхъ, которыхъ дуги выражаются эллиптическими функціями перваго рода.

568. Опреѣленіе всѣхъ алгебраическихъ кривыхъ, которыхъ дуги могутъ быть выражены посредствомъ эллиптическихъ функцій перваго рода, представляетъ очень большія затрудненія, и Лежандръ, который много занимался этимъ изысканіемъ, не могъ найти ни одной кривой, обладающей свойствомъ лемнискаты. Я далъ, нѣсколько лѣтъ тому назадъ, полное рѣшеніе задачи, ограничившись однако случаемъ кривыхъ, которыхъ прямолинейныя координаты могутъ быть выражены раціональными функціями одной и той же переменной. Я былъ приведенъ, такимъ образомъ, къ безчисленному числу различныхъ классовъ, содержащихъ каждый безконечное число отдѣльныхъ кривыхъ, которыхъ дуги выражаются посредствомъ эллиптическихъ интеграловъ различ-

ныхъ модулей. Дальнѣйшій разборъ полученныхъ результатовъ поставилъ въ очевидность два замѣчательныя геометрическія свойства, общія всѣмъ кривымъ этого класса, и которыя могутъ служить къ ихъ опредѣленію; теорія этихъ кривыхъ дѣлается сверхъ того независимой отъ аналитическихъ разсмотрѣній, которыя послужили къ ихъ открытію.

569. Т Е О Р Е М А I. — Пусть n целое, или дробное, или даже несоизмѣримое число; построимъ треугольникъ OMP такъ, чтобы

$$OP = \sqrt{n} \quad \text{и} \quad MP = \sqrt{n+1};$$

потомъ вообразимъ, что вершина O остается неподвижной, треугольникъ же измѣняется такъ, что косинусъ угла ω , образованнаго одной перемѣнной стороной OM съ неподвижной стороной, постоянно равенъ косинусу угла

$$n \text{ } MOR - (n+1) \text{ } OMP;$$

точка M опишетъ кривую (алгебраическую, если n соизмѣримое), которой дуга будетъ выражаться въ функции радиуса-вектора посредствомъ эллиптическаго интеграла модуля $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

Пусть, дѣйствительно, будутъ $MOR = \alpha$, $OMP = \beta$; уравненіе кривой получится, если исключимъ α и β изъ

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \cos [n\alpha - (n+1)\beta], \\ \cos \alpha &= \frac{\rho^2 - 1}{2\rho \sqrt{n}}, \quad \cos \beta = \frac{\rho^2 + 1}{2\rho \sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Изъ этихъ двухъ послѣднихъ уравненій находимъ

$$\sin \alpha = \frac{R}{2\rho \sqrt{n}}, \quad \sin \beta = \frac{R}{2\rho \sqrt{n+1}},$$

гдѣ для краткости сдѣлано

$$R = \sqrt{-\rho^4 + 2(n+1)\rho^2 - 1}.$$

Теперь, взявъ дифференціалъ, находимъ

$$\pm d\omega = n d\alpha - (n+1) d\beta.$$

$$d\alpha = -\frac{\rho^2 + 1}{R} \frac{d\rho}{\rho}, \quad d\beta = -\frac{\rho^2 - 1}{R} \frac{d\rho}{\rho},$$

откуда

$$\pm d\beta = \frac{\rho^2 - (2n+1)}{R} \frac{d\rho}{\rho},$$

и слѣдовательно, для дифференціала дуги будемъ имѣть

$$\pm ds = 2 \sqrt{n(n+1)} \frac{d\rho}{R}.$$

Изъ предъидущихъ уравненій имѣемъ еще слѣдующія формулы, которыя надлежитъ замѣтить:

$$\pm ds = \sqrt{n} \frac{d\alpha}{\cos \beta}, \quad \mp ds = \sqrt{n+1} \frac{d\beta}{\cos \alpha}.$$

Сверхъ того, положивъ $k = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$, имѣемъ

$$\sin \beta = k \sin \alpha, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha};$$

поэтому, предположивъ, что $d\rho$ имѣетъ знакъ $d\alpha$, имѣемъ

$$ds = \sqrt{n} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}},$$

и дуга, отсчитываемая отъ точки полярной оси, отвѣчающей $\alpha = 0$ или $\rho = \sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}$, будетъ выражаться эллиптическимъ интеграломъ модуля k и амплитуды α ,

$$\sqrt{n} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}},$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно видѣть, что въ случаѣ $n = 1$, кривая, о которой мы говоримъ, обращается въ лемнискату.

Площадь образующаго треугольника OMP есть $\frac{R}{4}$, и кромѣ того мы легко найдемъ, что

$$\int \frac{1}{2} \rho^2 d\omega = \frac{R}{4} + \text{const.},$$

откуда заключаемъ, что площадь сектора кривой, отсчиты-

ваемой отъ полярной оси, постоянно равна площади образующаго треугольника.

570. Я перехожу теперь къ разбору втораго свойства этихъ замѣчательныхъ кривыхъ. Въ треугольникѣ ОМР имѣемъ

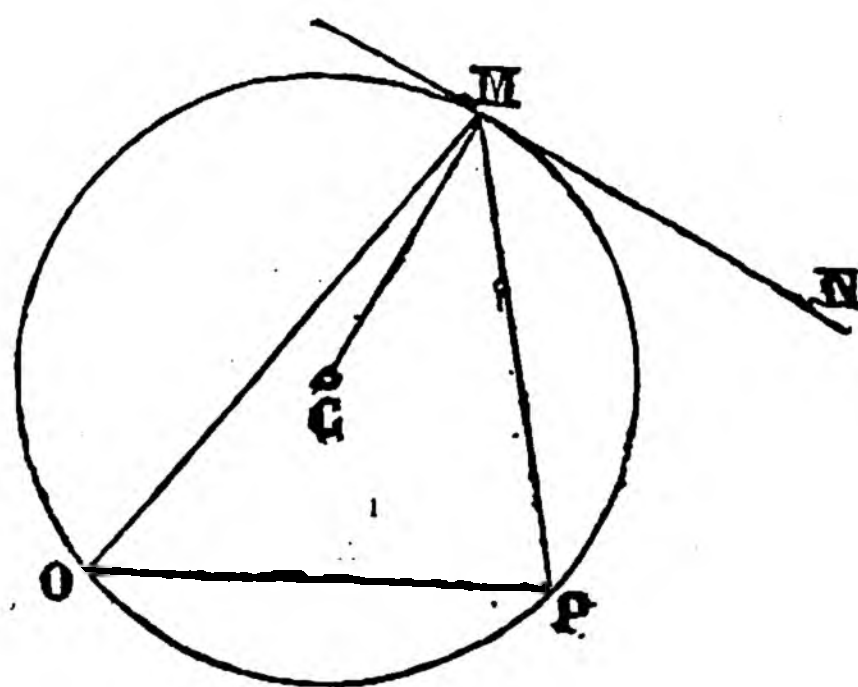
$$\rho^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} \cos(\alpha + \beta),$$

откуда

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\rho^2 - (2n + 1)}{2\sqrt{n(n+1)}} = \pm \frac{\rho d\omega}{ds},$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{R}{2\sqrt{n(n+1)}} = \pm \frac{d\rho}{ds},$$

откуда заключаемъ, что наклоненіе нормали на радіусъ-векторъ равно именно $\alpha + \beta$ или его дополненію; если же при точкѣ М построимъ уголъ $PMN = MOR$, предположивъ сначала первый случай, то MN будетъ нормаль къ кривой въ точкѣ М, которая отвѣчаетъ положенію ОМР образующаго треугольника; сверхъ того точка О необходимо находится на сегментѣ, вмѣщающемъ уголъ PMN, который описали на



МР, это же показываетъ, что MN есть касательная къ кругу, описанному около образующаго треугольника, а если С есть центр описаннаго круга, то радіусъ МС будетъ касательная къ кривой. Сверхъ того очевидно, что, когда вершина М треугольника опишетъ кривую непрерывнымъ движеніемъ, это свойство сохранится для всѣхъ положеній этого треугольника.

Можно предположить, что наклоненіе нормали на радіусъ-векторъ равно дополненію угла $\alpha + \beta$; въ этомъ случаѣ за-

ставимъ треугольникъ ОМР обращаться вокругъ ОМ; мы получимъ второй треугольникъ, который можно взять вмѣсто перваго для образованія кривой, и предъидущее свойство будетъ тогда относиться къ этому новому треугольнику.

Изъ предъидущаго слѣдуетъ способъ слѣдующаго образованія.

ТЕОРЕМА II. — *Если треугольникъ ОМР измѣняется такъ, что вершина его остается неподвижной, и если движущіяся стороны ОР и МР постоянно равны, первая \sqrt{n} , вторая $\sqrt{n+1}$, сверхъ того если безконечно-малое перемѣщеніе ММ' точки М имѣетъ мѣсто непрерывно по прямой, соединяющей эту точку съ центромъ описаннаго круга около образующаго треугольника, то точка М опишетъ эллиптическую кривую, отвечающую числу n .*

ГЛАВА V.

О КУБАТУРѢ ТѢЛЪ И КВАДРАТУРѢ КРИВЫХЪ ПОВЕРХНОСТЕЙ. — О КРАТНЫХЪ ИНТЕГРАЛАХЪ.

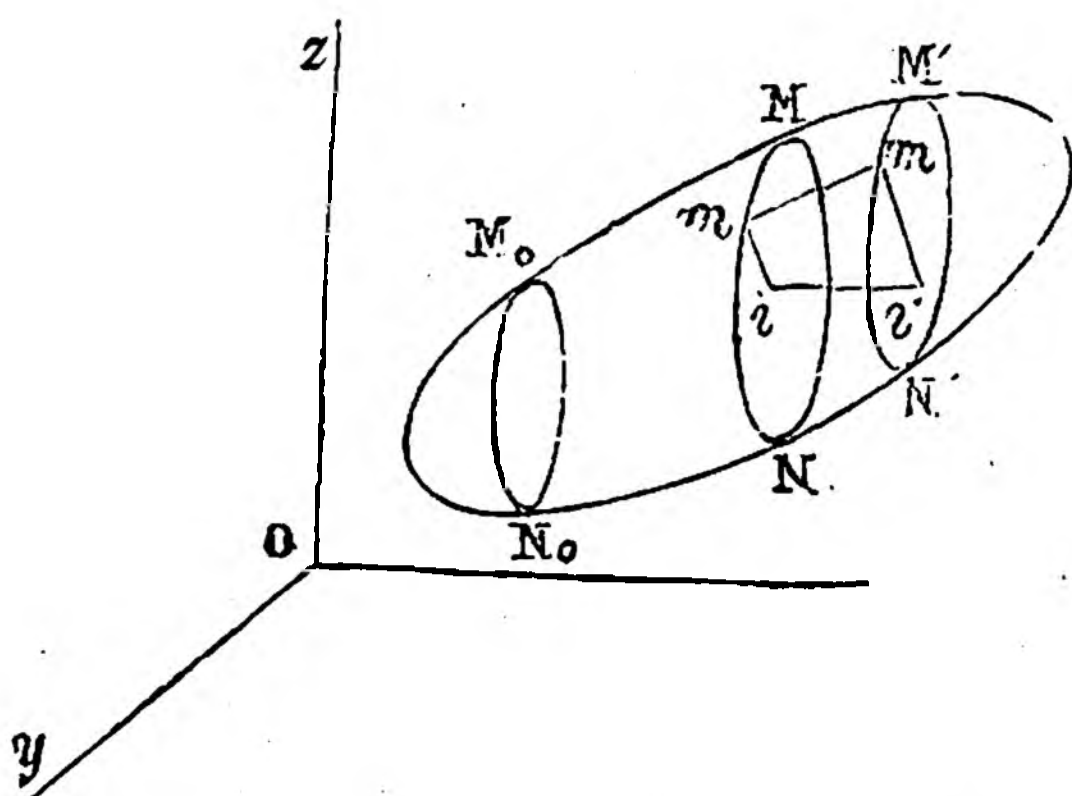
Объемъ цилиндра съ какимъ угодно основаніемъ.

571. Основаніе цилиндра можетъ быть раздѣлено на бесконечно-малые элементы, или линіями параллельными данному направленію, или радіусами, выходящими изъ внутренней точки. Разсмотримъ первый способъ раздѣленія; каждый изъ элементовъ будетъ заключаться между двумя параллелограммами, которые нетрудно построить между двумя прямоугольниками, которыхъ отношеніе будетъ имѣть предѣломъ единицу. Основаніе B цилиндра будетъ поэтому предѣлъ суммы внутреннихъ прямоугольниковъ или суммы внѣшнихъ прямоугольниковъ. Съ другой стороны, объемъ V цилиндра, котораго высоту означимъ черезъ H , заключается между суммой внутреннихъ призмъ высоты H и между суммой внѣшнихъ призмъ той же высоты; сверхъ того эти двѣ суммы призмъ стремятся та и другая къ предѣлу, равному произведенію BH ; поэтому имѣемъ $V = BH$.

Выраженіе объема части какого-нибудь тѣла, заключающейся между двумя параллельными плоскостями.

572. Пусть будетъ Ox , Oy , Oz три оси прямолинейныхъ координатъ; означимъ черезъ V объемъ сегмента какого-нибудь

тѣла, заключеннаго между двумя плоскостями M_0N_0, MN , параллельными плоскости yOz и отвѣчающими абсциссамъ x_0 и x .



Если предположимъ x_0 постоянной и x переменнѣй, то объемъ V будетъ функція отъ x , дифференціалъ которой не трудно найти. Для этого рассмотримъ сѣченія, произведенныя въ тѣлѣ двумя плоскостями $MN, M'N'$, параллельными yOz и отвѣчающими абсциссамъ x и $x + \Delta x$; эти двѣ плоскости вмѣщаютъ въ себѣ объемъ ΔV ; мы означимъ черезъ u площадь сѣченія, опредѣляемую плоскостью MN . Возьмемъ внутри площади u точку i , проведемъ ii' параллельно оси Ox и черезъ ii' заставимъ пройти какую-нибудь полу-плоскость $mii'm'$, встрѣчающую плоскости $MN, M'N'$ въ $im, i'm'$ и поверхность тѣла въ кривой mt' . Проведемъ черезъ всѣ точки дуги mt' линіи, параллельныя mi , оканчивающіяся на прямой ii' ; пусть будетъ l_1 наименьшая изъ этихъ прямыхъ, l_2 наибольшая. Отложимъ на im линіи ip_1, ip_2 соотвѣтственно равныя l_1 и l_2 . Если полу-плоскость $mii'm'$ заставимъ обращаться вокругъ неподвижной прямой ii' , то двѣ точки p_1 и p_2 опишутъ въ плоскости MN двѣ замкнутыя кривыя, которыхъ площади мы означимъ черезъ u_1 и u_2 .

Поверхность тѣла есть непрерывная поверхность, поэтому очевидно, что площади u_1 и u_2 стремятся къ u , когда Δx стремится къ нулю. Пусть будетъ α уголъ, образуемый осью Ox съ плоскостію yOz , разстояніе плоскостей $MN, M'N'$ будетъ $\Delta \alpha \sin \alpha$. Построимъ цилиндръ, котораго одно изъ основаній есть площадь u_1 , другое основаніе находится въ плоскости $M'N'$, ребра же его параллельны Ox ; построимъ также

второй цилиндръ съ периметромъ u_2 . Объемъ ΔV заключается между объемами этихъ двухъ цилиндровъ, имѣющихъ измѣреніями

$$u_1 \sin \alpha \Delta x, \quad u_2 \sin \alpha \Delta x,$$

отношеніе $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ поэтому заключается между $u_1 \sin \alpha$ и $u_2 \sin \alpha$ и слѣдовательно мы имѣемъ

$$\frac{dV}{dx} = u \sin \alpha, \quad \text{или} \quad dV = \sin \alpha \, dx.$$

Теперь, если дадимъ x определенное значеніе X , то объемъ V разсмотрѣннаго сегмента будетъ имѣть выраженіемъ

$$V = \sin \alpha \int_{x_0}^X u \, dx,$$

гдѣ u , мы должны повторить, есть площадь сѣченія, произведеннаго въ тѣлѣ плоскостію параллельной плоскости yz , отвѣчающей абсциссѣ x ; въ случаѣ прямоугольныхъ осей просто имѣемъ

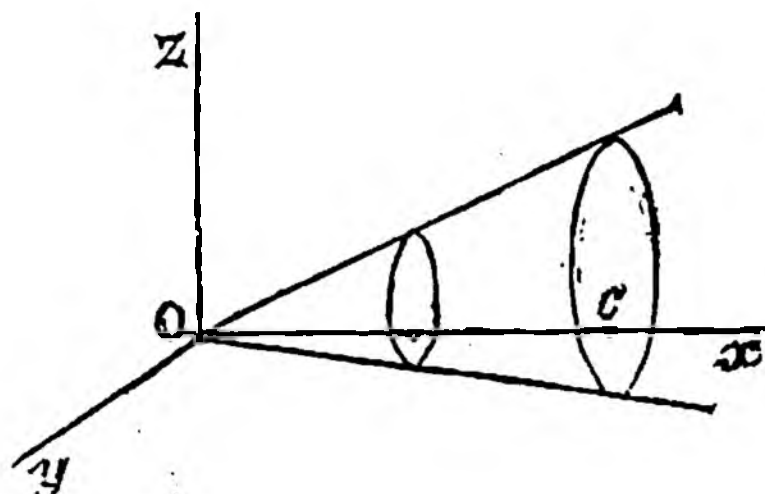
$$V = \int_{x_0}^X u \, dx.$$

Полученный только-что результатъ предполагаетъ площадь u , извѣстную въ функціи x ; опредѣленіе этой площади требуетъ также интегрированія; но существуетъ нѣсколько случаевъ, гдѣ это интегрированіе можетъ быть произведено непосредственно. Мы сейчасъ дадимъ нѣсколько примѣровъ.

Приложеніе къ нѣкоторымъ примѣрамъ.

573. П р и м ѣ р ъ I. — *Найти объемъ конуса съ какимъ-нибудь основаніемъ.*

Возьмемъ за начало трѣхъ прямоугольныхъ координатъ вершину O конуса и перпендикуляръ, опущенный изъ этой вершины на основаніе, за ось x .



Если означимъ черезъ B основаніе конуса, черезъ H его высоту, то, какъ извѣстно, будемъ имѣть

$$\frac{u}{B} = \frac{x^2}{H^2}, \quad u = \frac{B}{H^2} x^2,$$

и объемъ V будетъ

$$V = \frac{B}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{B}{H^2} \times \frac{H^3}{3}$$

или

$$V = \frac{1}{3} BH.$$

574. П Р И М Ъ Р Ъ II. — *Найти объемъ сегмента эллипсоида, заключающагося между двумя параллельными плоскостями.*

Отнесемъ эллипсоидъ къ тремъ сопряженнымъ діаметрамъ Ox , Oy , Oz , изъ которыхъ два послѣднихъ параллельны основаніямъ сегмента; уравненіе поверхности тѣла будетъ

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{b'^2 \left(1 - \frac{x^2}{a'^2}\right)} + \frac{z^2}{c'^2 \left(1 - \frac{x^2}{a'^2}\right)} = 1,$$

гдѣ a' , b' , c' суть половины сопряженныхъ діаметровъ. Площадь u здѣсь есть площадь эллипса, въ которомъ два сопряженныхъ діаметра длиной имѣютъ удвоенныя выраженія

$$b' \sqrt{1 - \frac{x^2}{a'^2}}, \quad c' \sqrt{1 - \frac{x^2}{a'^2}};$$

сверхъ того уголъ между этими діаметрами равенъ углу θ , образуемому полудіаметрами b' , c' эллипсоида. Поэтому имѣемъ

$$u = \pi b' c' \sin \theta \left(1 - \frac{x^2}{a'^2}\right),$$

и, слѣдовательно, если x_0 , X означаютъ значенія x , отвѣчающія основаніямъ сегмента, и если α есть уголъ, образуемый осью x съ плоскостію yz , будемъ имѣть

$$V = \pi b' c' \sin \theta \sin \alpha \int_{x_0}^X \left(1 - \frac{x_0}{a'^2}\right) dx$$

или

$$V = \pi b' c' \sin \theta \sin \alpha \left[(X - x_0) - \frac{X^3 - x_0^3}{3a'^2} \right].$$

Чтобы получить цѣлый объемъ эллипсоида, нужно сдѣлать $x_0 = -a'$, $X = +a'$, и мы получимъ

$$V = \frac{4}{3} \pi a' b' c' \sin \theta \sin \alpha;$$

если возьмемъ за a' , b' , c' полу-оси a , b , c , то будемъ имѣть $\theta = 90^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, и

$$V = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Сравненіе двухъ предъидущихъ формулъ дастъ

$$a' b' c' \sin \theta \sin \alpha = abc,$$

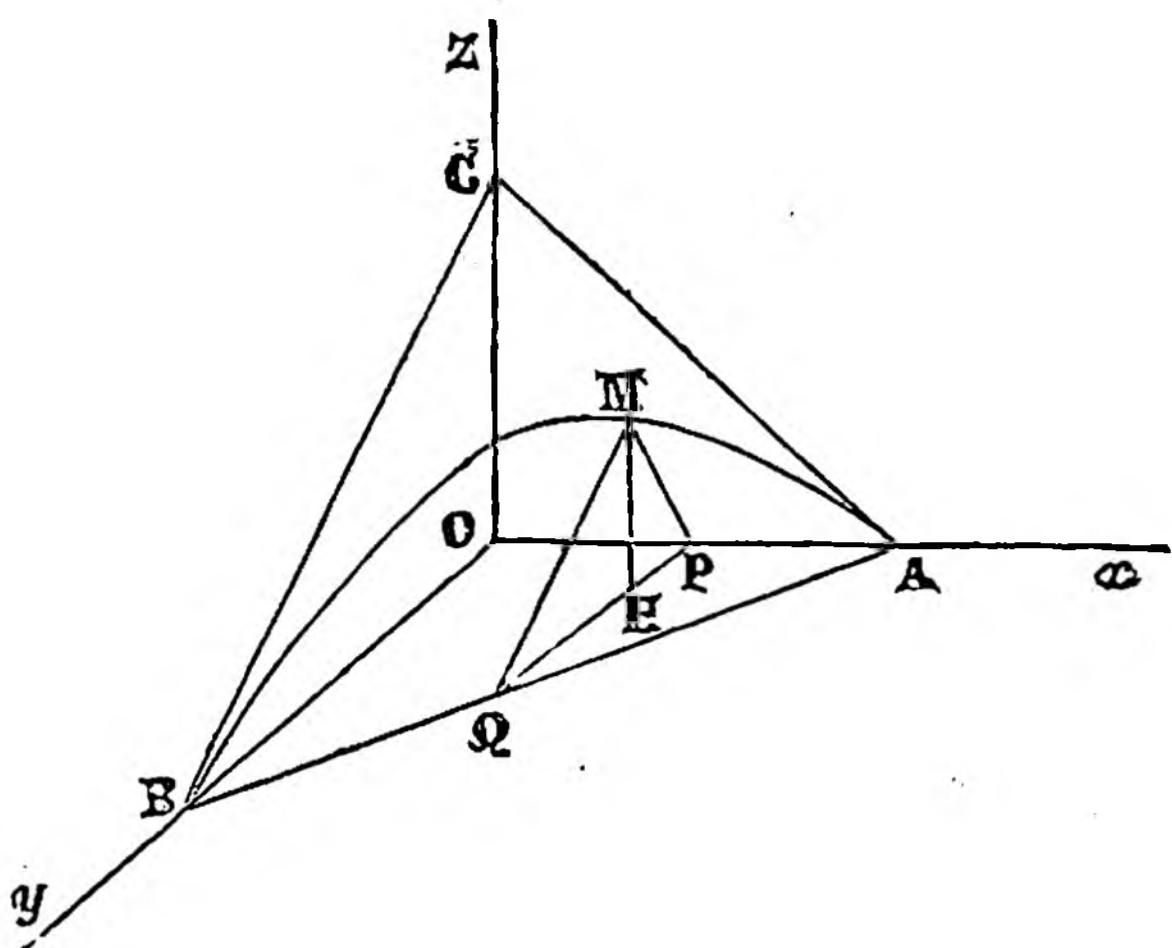
это же выражаетъ извѣстную теорему, по которой параллелепипедъ, построенный на трехъ сопряженныхъ діаметрахъ эллипсоида, имѣетъ постоянный объемъ.

Очевидно, что посредствомъ аналогичнаго вычисленія, мы получимъ объемъ одно-полаго или дву-полаго гиперболоида, или объемъ сегмента эллиптического параболоида.

575. П Р И М Ъ Р Ъ III. — Даны три прямоугольныя оси координатъ, требуется опредѣлить объемъ, заключающійся въ уголъ положительныхъ координатъ и ограниченный гиперболическимъ параболоидомъ, даннымъ уравненіемъ $xy = az$, гдѣ a постоянная, плоскостію ABC , имѣющей уравненіемъ $x + y + z = a$ и плоскостію xy .

Параболоидъ пересѣкается плоскостію ABC по гиперболѣ AMB и проходитъ черезъ ось x , а также черезъ ось y . Плоскость PMQ , параллельная плоскости yz , отвѣчающая абсциссѣ

x , пересѣкаетъ эту поверхность по прямой MP и плоскость ABC по прямой MQ , параллельной BC — слѣду той же плос-



кости ABC на плоскости yz ; наконецъ она пересѣкаетъ плоскость xu по прямой RQ , параллельной Oy . Площадь, означенная въ § 572 черезъ u , поэтому здѣсь есть площадь треугольника PMQ , посредствомъ котораго образованъ объемъ, который требуется вычислить.

Основаніе RQ этого треугольника есть ордината y , относящаяся къ абсциссѣ x , линіи AB — слѣда плоскости ABC на плоскость xu ; поэтому имѣемъ

$$RQ = a - x;$$

высота MN треугольника PMQ есть z , относительно абсциссы x , пересѣченія параболоида и плоскости ABC ; исключеніе y изъ уравненій обѣихъ поверхностей даетъ

$$x(a - x - z) = az;$$

такимъ образомъ имѣемъ

$$MN = \frac{x(a - x)}{a + x},$$

и, слѣдовательно, значеніе u есть

$$u = \frac{1}{2} \frac{x(a - x)^2}{a + x}.$$

Сверхъ того искомый объемъ V ограничивается плоскостями, отвѣчающими абсциссамъ 0 и a ; поэтому имѣемъ

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{x(a - x)^2}{a + x} dx = \int_0^a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3ax}{2} + 2a^2 - \frac{2a^3}{x + a} \right) dx,$$

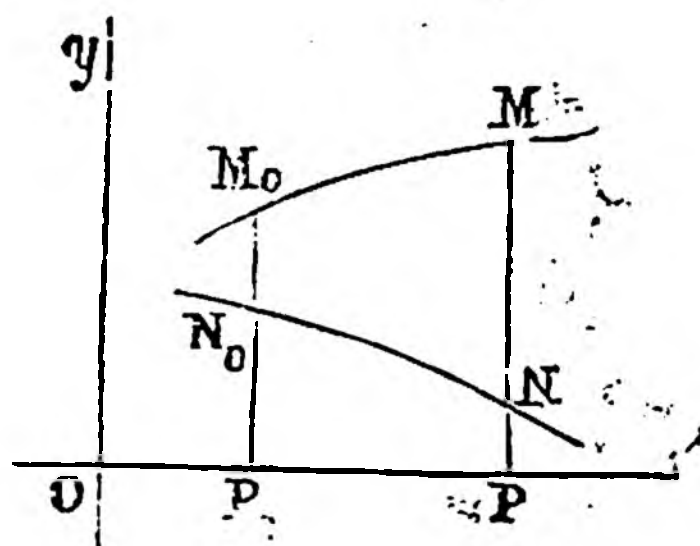
взявъ же интеграль, находимъ

$$V = \left(\frac{17}{12} - \log 4 \right) a^3.$$

Приложеніе къ тѣламъ вращенія.

576. Площадь, означенная въ § 572 черезъ u , получается непосредственно въ очень обширномъ случаѣ тѣлъ вращенія вокругъ оси x , потому что эта площадь есть площадь круга или площадь, заключенная между концентрическими кругами.

Пусть $M_0 M$ данная кривая, расположенная въ плоскости xy ; построимъ тѣло, образуемое вращеніемъ вокругъ оси x площади $M_0 P_0 MP$, заключающейся между кривой $M_0 M$, осью x и ординатами $M_0 P_0, MP$.



Въ этомъ случаѣ площадь u будетъ площадь круга радіуса y ; поэтому будемъ имѣть

$$u = \pi y^2, \quad V = \pi \int_{x_0}^X y^2 dx,$$

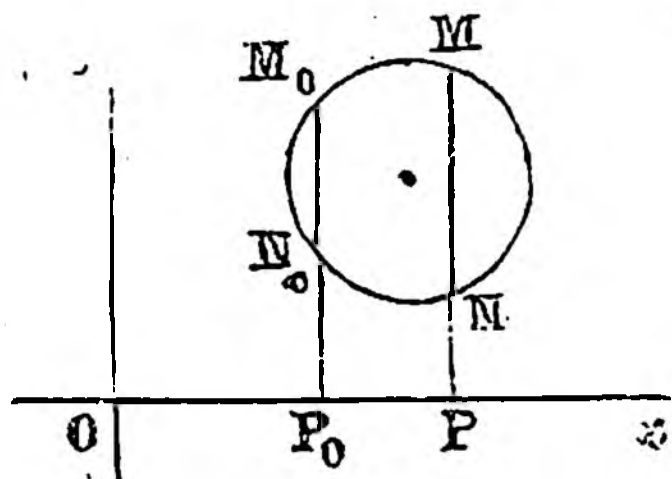
гдѣ x_0 и X означаютъ абсциссы, отвѣчающія ординатамъ $M_0 P_0, MP$.

Предположимъ, что, отыскивается объемъ V , образованный площадью $M_0 N_0 NM$, заключающейся между двумя данными кривыми $M_0 M, N_0 N$ и ординатами $M_0 P_0, MP$. Пусть будутъ y и y' ординаты обѣихъ кривыхъ; площадь u будетъ площадь, заключающаяся между двумя концентрическими кругами радіусовъ y и y' ; поэтому, будемъ имѣть

$$u = \pi (y^2 - y'^2), \quad V = \pi \int_{x_0}^X (y^2 - y'^2) dx.$$

577. П Р И М Ъ Р Ъ I. — *Определить объемъ кольца (tore).*

Кольцо есть тѣло, образуемое вращеніемъ круга вокругъ оси, расположенной въ его плоскости.



Отнесемъ образующій кругъ къ двумъ прямоугольнымъ осямъ, изъ которыхъ одна, ось x , совпадаетъ съ осью вращенія; пусть будутъ a радіусъ круга, b ордината круга, y , y' ординаты точекъ M , N , отвѣчающихъ одной и той же абсциссѣ x ; будемъ имѣть

$$y + y' = 2b, \quad y - y' = 2\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y^2 - y'^2 = 4b\sqrt{a^2 - x^2};$$

потомъ, предположивъ ось вращенія внѣ круга, получимъ

$$u = 4\pi b\sqrt{a^2 - x^2}, \quad V = 4\pi b \int_{x_0}^X \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Если же означимъ черезъ v площадь части круга, заключающейся между ординатами $M_0 P_0$, MP , отвѣчающими абсциссамъ x_0 , X , то очевидно получимъ

$$v = \int_{x_0}^X (y - y') dx = 2 \int_{x_0}^X \sqrt{a^2 - x^2} dx;$$

поэтому сегментъ кольца будетъ

$$V = 2\pi b v.$$

Если желаемъ имѣть объемъ цѣлаго тѣла, то сдѣлаемъ $v = \pi a^2$, и мы будемъ имѣть

$$V = 2\pi^2 a^2 b.$$

578. П Р И М Ъ Р Ъ II. — *Определить объемъ, образованный площадью циклоиды, обращающейся вокругъ своего основанія.*

Возьмемъ за ось x основаніе циклоиды и за ось y перпен-

дикуляръ, проведенный черезъ одинъ изъ концовъ этого основанія; кривая будетъ опредѣляться (§ 230) уравненіями

$$x = a (\varphi - \sin \varphi), \quad y = a (1 - \cos \varphi),$$

откуда имѣемъ

$$dx = a (1 - \cos \varphi) d\varphi.$$

Пусть будетъ V объемъ, образованный площадью, заключающейся между кривой, основаніемъ и ординатой y , отвѣчающей абсциссѣ x или углу φ ; будемъ имѣть

$$V = \pi \int_0^x y^2 dx = \pi a^3 \int_0^\varphi (1 - \cos \varphi)^3 d\varphi,$$

но

$$(1 - \cos \varphi)^3 = \frac{5}{2} - \frac{15}{4} \cos \varphi + \frac{3}{2} \cos 2\varphi - \frac{1}{4} \cos 3\varphi,$$

поэтому

$$V = \pi a^3 \left(\frac{5}{2} \varphi - \frac{15}{4} \sin \varphi + \frac{3}{4} \sin 2\varphi - \frac{1}{12} \sin 3\varphi \right).$$

Если желаемъ опредѣлить цѣлый объемъ тѣла, образованнаго циклоидой, то сдѣлаемъ $\varphi = 2\pi$, и мы будемъ имѣть

$$V = 5 \pi^2 a^3.$$

579. ПРИМѢРЪ III. — *Опредѣлить объемъ, образованный поверхностію циклоиды, обращающейся вокругъ касательной къ вершинѣ.*

Кривая отнесена къ тѣмъ же осямъ, что и въ предыдущемъ примѣрѣ; пусть будетъ V объемъ, образованный поверхностію, заключенной между кривой, касательной къ вершинѣ и перпендикуляромъ $2a - y$ къ этой касательной, отвѣчающей углу φ ; будемъ имѣть

$$V = \pi \int_x^{\pi a} (2a - y)^2 dx = \pi a^3 \int_\varphi^\pi (1 + \cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi;$$

но

$$\int \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} + \text{const.},$$

$$\int \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \sin^3 \varphi + \text{const.},$$

поэтому

$$V = \pi a^3 \left(\frac{\pi - \varphi}{2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right);$$

сдѣлавъ $\varphi = 0$, будемъ имѣть объемъ образованный поверхностью, заключающейся между полу-циклоидой и касательной; если удвоимъ результатъ, то получимъ полный объемъ, именно

$$V = \pi^2 a^3.$$

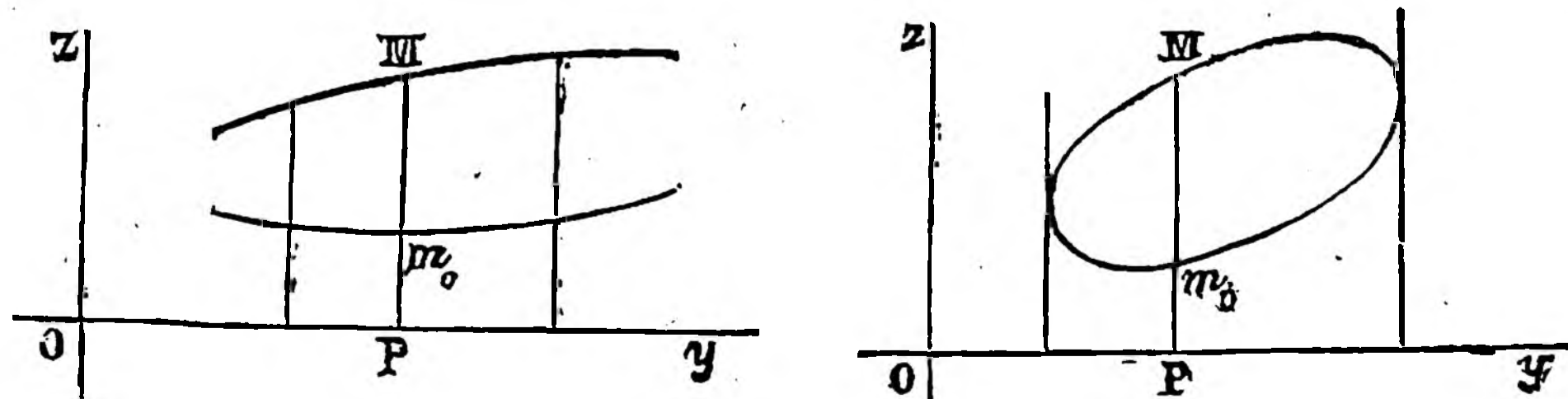
Такимъ образомъ V есть пятая часть объема, разсмотрѣннаго въ предыдущемъ примѣрѣ.

Новыя разсмотрѣнія, относящіяся къ опредѣленію объематѣль, ограниченныхъ какими-нибудь поверхностями.

580. Обратимся снова къ формулѣ

$$(1) \quad V = \int_{x_0}^X u dx,$$

которую мы вывели въ § 572 для случая прямоугольныхъ координатъ и гдѣ V есть часть объема тѣла, заключенная между плоскостями, параллельными плоскости yz , отвѣчающими абсциссамъ x_0 и X . Можно всегда предположить, что поверхность, которой u означаетъ площадь, ограничивается фигурой, встрѣчаемой только въ двухъ точкахъ прямыми, параллельными оси z ; если это не такъ, то мы разо-



бьемъ объемъ на нѣсколько частей, удовлетворяющихъ каждая этому условію. Въ этомъ случаѣ, если означимъ че-

резь Z и z_0 ординаты MP , m_0P , параллельныя z , отвѣчающія значенію $OP = y$ ординаты, параллельной y ; если означимъ въ то же время черезъ y_0 и Y значенія y , отвѣчающія предѣльнымъ ординатамъ обвода площади u , то эта площадь будетъ имѣть выраженіемъ

$$(2) \quad u = \int_{y_0}^Y (Z - z_0) dy,$$

и формула (1) можетъ быть написана слѣдующимъ образомъ

$$(3) \quad V = \int_{x_0}^X dx \int_{y_0}^Y (Z - z_0) dy.$$

Въ этой формулѣ (3) Z и z_0 суть данныя функціи отъ x и отъ y ; онѣ представляютъ ординаты z двухъ точекъ поверхности тѣла, отвѣчающія координатамъ x , y ; y_0 и Y суть функціи переменнѣй x ; онѣ представляютъ ординаты, параллельныя y , и отвѣчаютъ абсциссѣ x периметра, ограничивающаго проэкцію объема V на плоскость xy ; наконецъ x_0 и X означаютъ данныя постоянныя.

Формула (2) выражаетъ, какъ мы знаемъ, что

$$u = \lim \sum (Z - z_0) \Delta y,$$

гдѣ x разсматривается какъ постоянная и y какъ величина измѣняющаяся отъ y_0 до Y по бесконечно-малымъ промежуткамъ, равнымъ Δy ; изъ формулы (1) также имѣемъ

$$V = \lim \sum u \Delta x,$$

гдѣ x измѣняется отъ x_0 до X по промежуткамъ, равнымъ Δx . Поэтому можно написать

$$V = \lim \sum \Delta x \lim \sum (Z - z_0) \Delta y$$

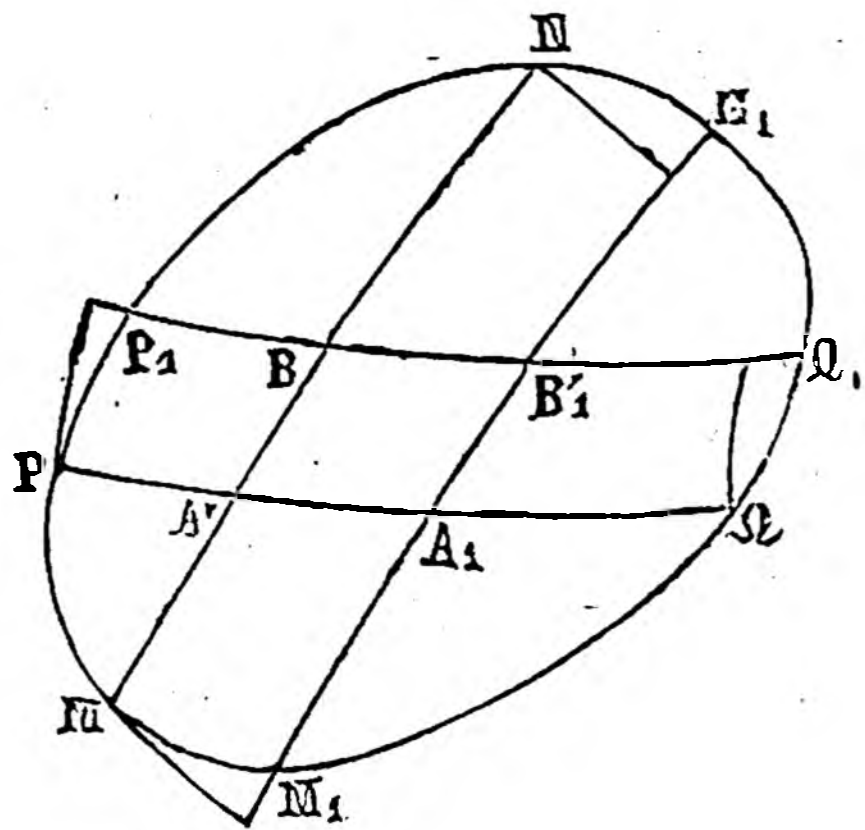
или

$$(4) \quad V = \lim \sum \sum (Z - z_0) \Delta x \Delta y.$$

Выраженіе (3) называется *двойнымъ интеграломъ*; вы-

раженіе (4), которое есть его слѣдствіе, показываетъ, что V есть предѣлъ, къ которому стремится сумма бесконечно-малыхъ призмъ $(Z - z_0) \Delta x \Delta y$, которыхъ основанія $\Delta x \Delta y$ образуютъ сумму, имѣющую предѣломъ площадь, по которой проектируется объемъ V на плоскость xy .

581. Къ предъидущимъ результатамъ можно придти посредствомъ другихъ разсмотрѣній, которыя позволяютъ въ то же время ввести болѣе общности. Означимъ черезъ V объемъ нѣкоторой части тѣла, отнесеннаго къ тремъ прямоугольнымъ осямъ, и предположимъ, какъ и прежде, что мы всегда можемъ исполнить, что поверхность тѣла, котораго нужно найти объемъ, встрѣчается только въ двухъ точкахъ прямыми параллельными z . Пусть будутъ, какъ и въ § 580, Z и z_0 значенія z , относящіяся къ этой поверхности. Назовемъ черезъ P площадь, по которой проектируется объемъ V на плоскость xy , и раздѣлимъ эту площадь по какому-нибудь закону по всѣмъ направленіямъ на бесконечно-малые элементы. Раздѣленіе, о которомъ я говорю, можетъ быть исполнено посредствомъ двухъ видовъ линій, зависящихъ каждый отъ произвольнаго параметра; двѣ бесконечно-близкія кривыя MN , M_1N_1 одного изъ видовъ опредѣляютъ съ



двумя бесконечно-близкими кривыми PQ , P_1Q_1 другаго вида четырехугольникъ $ABV_1A_1 = \alpha$, который будетъ одинъ изъ разсмотрѣнныхъ нами элементовъ; будемъ имѣть

$$P = \sum \alpha + \sum \pm \alpha',$$

гдѣ α' означаетъ бесконечно-малый элементъ, ограниченный отчасти контуромъ площади P .

Но элементы α' заключаются между двумя кривыми бесконечно-близкими къ периметру P , поэтому сумма $\Sigma \pm \alpha$ имѣетъ предѣломъ нуль, слѣдовательно

$$P = \lim \sum \alpha;$$

согласно положенію § 9, можно еще пренебречь въ α всѣми бесконечно-малыми количествами относительно этого элемента.

Теперь, цилиндръ, имѣющій основаніемъ α и ребра параллельныя оси z , отсѣкаетъ въ объемѣ V элементъ, который можно означить черезъ $\alpha(Z - z_0 + \varepsilon)$, гдѣ ε означаетъ бесконечно-малую; то же самое относится и къ цилиндрамъ, отвѣчающимъ остаточнымъ элементамъ α' и которымъ отвѣчаютъ элементы тѣлъ $\alpha'(Z' - z'_0 + \varepsilon')$. Такимъ образомъ имѣемъ

$$V = \sum \alpha (Z - z_0 + \varepsilon) + \sum \alpha' (Z' - z'_0 + \varepsilon'),$$

вторая сумма имѣетъ предѣломъ нуль, потому что $\sum \alpha'$ стремится къ нулю; сумма $\sum \alpha \varepsilon$ также имѣетъ предѣломъ нуль (§ 9), и мы имѣемъ

$$(5) \quad V = \lim \sum \alpha (Z - z_0).$$

582. Предположимъ, что элементы α опредѣляются рядомъ линій, параллельныхъ оси x , и вторымъ рядомъ линій параллельныхъ оси y ; будемъ имѣть

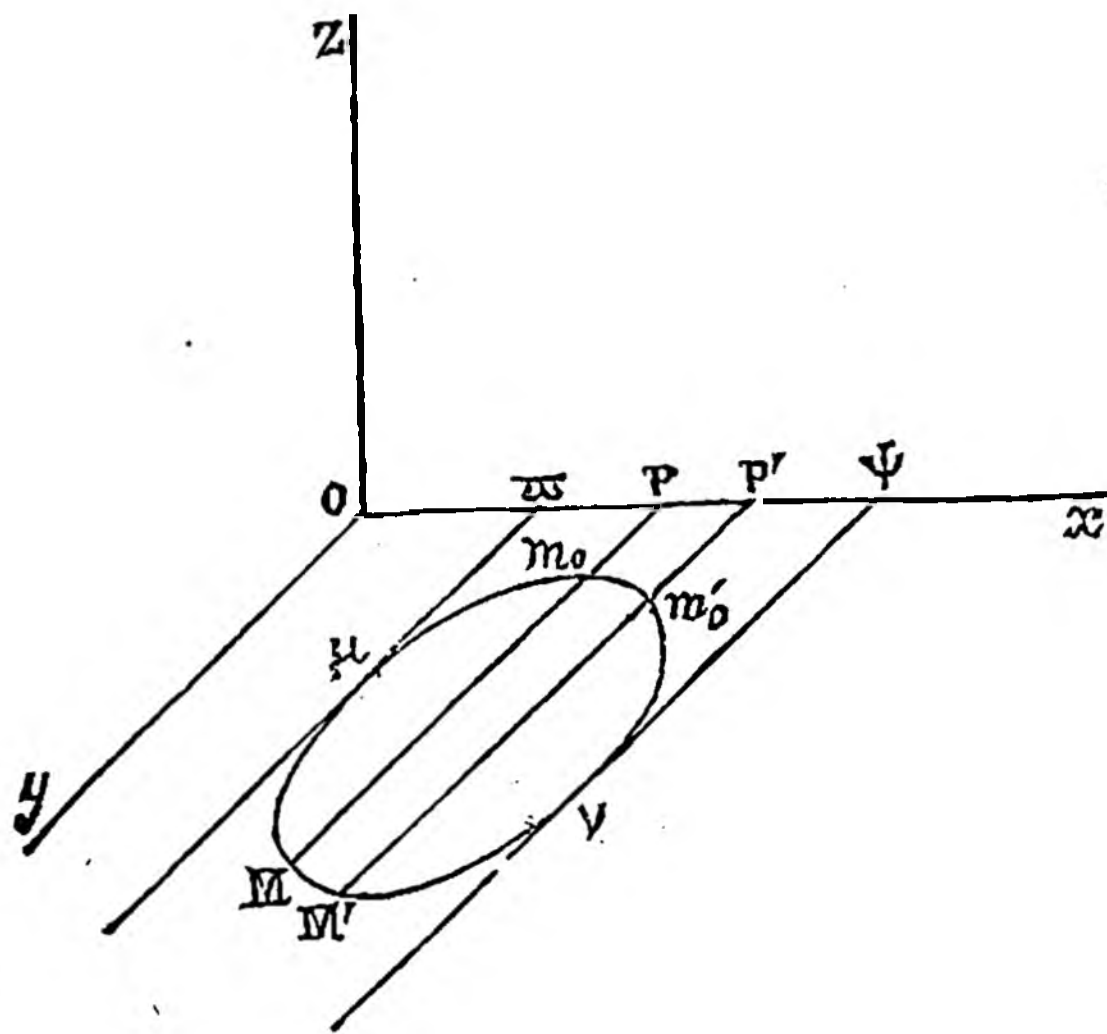
$$\alpha = \Delta x \Delta y,$$

и слѣдовательно

$$V = \lim \sum (Z - z_0) \Delta x \Delta y.$$

Чтобы получить V по этой формулѣ, можно начать съ того, чтобы взять предѣлъ суммы элементовъ $(Z - z_0) \Delta x \Delta y$, предположивъ x и Δx постоянными. Этотъ предѣлъ будетъ равенъ $\Delta x \int_{y_0}^x (Z - z_0) dy$, если только предположимъ, что периметръ площади P пересѣкается линіями, параллель-

ными оси y только въ двухъ точкахъ m_0 , M , и если при этомъ ординаты этихъ точекъ означимъ черезъ y_0 , Y . Такимъ образомъ имѣемъ элементъ объема V , который про-



ектируется по части $Mm_0 m'_0 M'$ площади R , части, заключающейся между двумя линиями, параллельными оси y , отвѣчающими абсциссамъ x и $x + \Delta x$. Теперь пусть будутъ x_0 и X абсциссы, соотвѣтствующія ординатамъ y_0 , Y , которыхъ касается периметръ площади R ; намъ остается взять предѣлъ суммы только-что опредѣленныхъ элементовъ, когда x измѣняется отъ x_0 до X по промежуткамъ, равнымъ Δx ; такимъ образомъ будемъ имѣть такое выраженіе V

$$(6) \quad V = \int_{x_0}^X dx \int_{y_0}^Y (Z - z_0) dy.$$

Вмѣсто того, чтобы поступить такъ, какъ мы дѣлали, можно сначала взять сумму элементовъ $(Z - z_0) \Delta x \Delta y$, предположивъ y и Δy постоянными; такимъ образомъ получимъ $\Delta y \int_{x'_0}^{X'} (Z - z_0) dx$, гдѣ предѣлы x'_0 и X' суть абсциссы точекъ контура площади R , отвѣчающія ординатѣ y ; потомъ, означивъ черезъ y'_0 и Y' ординаты, соотвѣтствующія абсциссамъ, которыхъ касается контуръ площади R , для объема V будемъ имѣть

$$(7) \quad V = \int_{y'_0}^{Y'} dy \int_{x'_0}^{X'} (Z - z_0) dx.$$

Если площадь R есть прямоугольникъ, котораго стороны

параллельны осямъ x и y , то очевидно, что будемъ имѣть

$$x'_0 = x_0, \quad X' = X, \quad y'_0 = y_0, \quad Y' = Y,$$

и слѣдовательно

$$\int_{x_0}^X dx \int_{y_0}^Y (Z - z_0) dy = \int_{y_0}^Y dy \int_{x_0}^X (Z - z_0) dx,$$

откуда слѣдуетъ теорема, уже изложенная въ § 481, именно:

Когда нужно взять интегралъ выраженія $(Z - z_0) dx dy$ между предѣлами x_0, X перемѣнной x и между предѣлами y_0, Y перемѣнной y , тогда дѣйствія можно произвести въ какомъ угодно порядкѣ, лишь-бы предѣлы, относящіеся къ интегрированію, не зависѣли отъ перемѣнной, къ которой относится другое интегрированіе.

583. ОПРЕДѢЛЕНІЕ ЦѢЛАГО ОБЪЕМА ТѢЛА. — Мы предположимъ, что прямая встрѣчаетъ поверхность тѣла только въ двухъ точкахъ; противный случай можно легко привести къ этому предположенію. Площадь P , очевидно, здѣсь есть слѣдъ на плоскость xu цилиндра, параллельнаго z и описаннаго около поверхности тѣла; это есть также то, что называется *видимымъ контуромъ* тѣла на плоскость xu . Ординаты z_0, Z будутъ даны уравненіемъ

$$F(x, y, z) = 0,$$

принадлежащимъ поверхности тѣла; точки этой поверхности, гдѣ касательная плоскость параллельна оси z , удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

и исключеніе z изъ двухъ предъидущихъ уравненій даетъ уравненіе контура площади P

$$f(x, y) = 0;$$

изъ этого послѣдняго уравненія получимъ значенія y_0 и Y . Что касается предѣловъ x_0 и X интегрированія, относяща-

госа къ x , то они суть абсциссы двухъ точекъ поверхности тѣла, гдѣ касательная плоскость параллельна плоскости yz , и мы имѣемъ для этихъ точекъ три уравненія

$$F(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

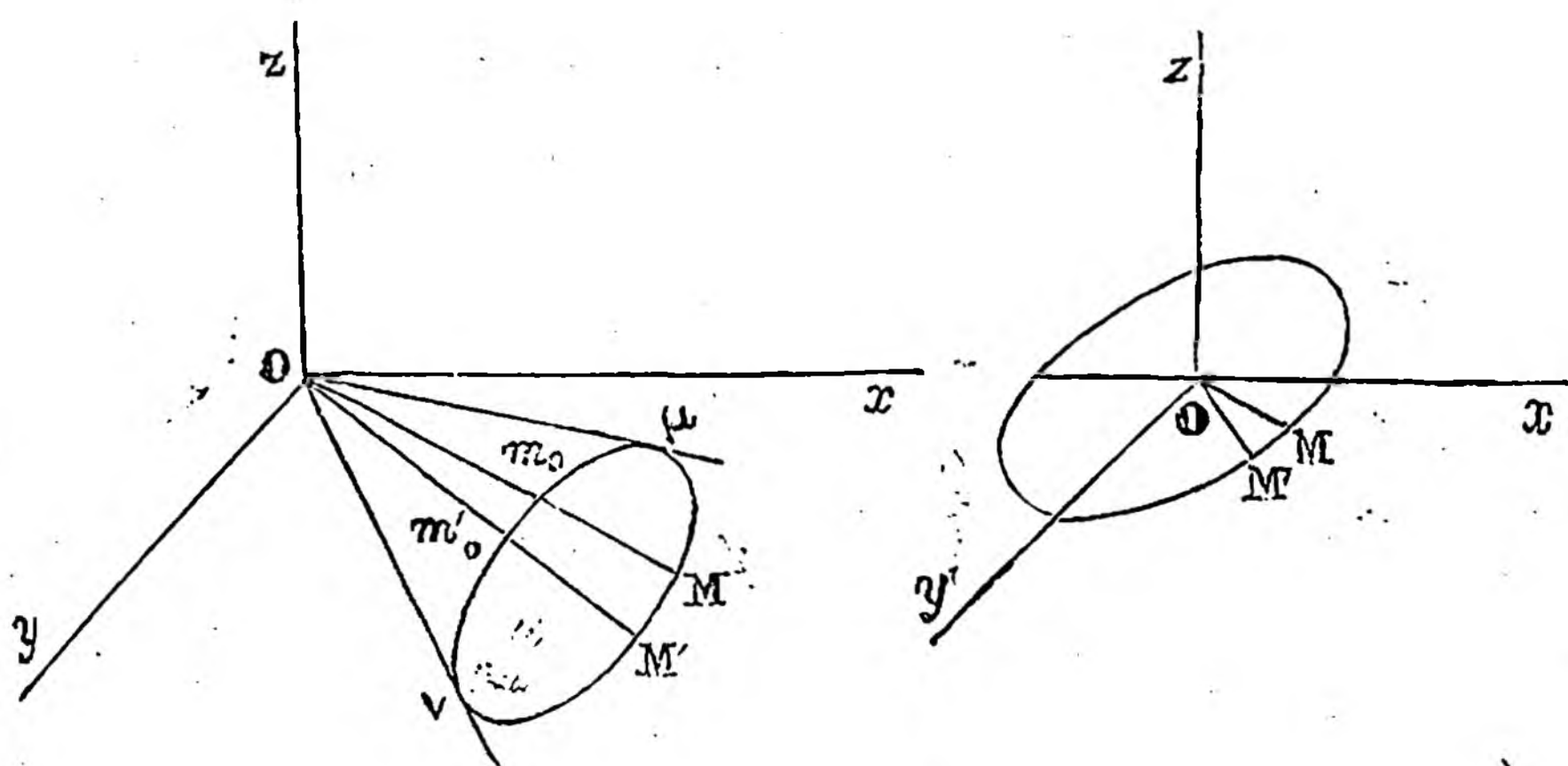
584. Предположимъ, что элементы α § 581 опредѣляются системой окружностей, имѣющихъ центромъ начало координатъ, и радіусами, выходящими изъ этого начала. Пусть ρ и $\rho + \Delta\rho$ радіусы двухъ безконечно-близкихъ окружностей, ω , $\omega + \Delta\omega$ углы двухъ безконечно-близкихъ радіусовъ; будемъ имѣть

$$\alpha = \frac{1}{2} [(\rho + \Delta\rho)^2 - \rho^2] \Delta\omega,$$

пренебрегая-же $\Delta\rho^2$, можемъ написать

$$V = \lim \sum (Z - z_0) \rho \Delta\rho \Delta\omega.$$

Начнемъ съ того, что возьмемъ предѣлъ суммы элементовъ $(Z - z_0) \rho \Delta\rho \Delta\omega$, предположивъ ω и $\Delta\omega$ постоянными. Если начало координатъ находится внѣ площади P и если



радіусы, выходящіе изъ этого начала, встрѣчаютъ периметръ только въ двухъ точкахъ, то результатъ будетъ $\Delta\omega \int_{\rho_0}^R (Z - z_0) \rho d\rho$ и онъ выразитъ элементъ объема проектированнаго по части $m_0 MM' m'_0$, которую опредѣляютъ въ площади P радіусы, отвѣчающіе угламъ ω , $\omega + \Delta\omega$. Намъ остается взять предѣлъ, къ которому стремится сумма этихъ элементовъ, когда ω

измѣняется между предѣлами ω_0 , Ω , отвѣчающими радіусамъ $O\rho$, $O\nu$, которыми ограничивается площадь P , по степенямъ равнымъ $\Delta\omega$. Такимъ образомъ имѣемъ

$$V = \int_{\omega_0}^{\Omega} d\omega \int_{\rho_0}^R (Z - z_0) \rho d\rho.$$

Если начало координатъ находится внутри площади P , то очевидно, что первое интегрированіе должно быть произведено отъ нуля до значенія R , отвѣчающаго контуру площади P , и что предѣлы втораго интегрированія будутъ 0 и 2π . Такимъ образомъ имѣемъ

$$V = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R (Z - z_0) \rho d\rho.$$

585. П р и м ѣ р ъ I. — Я возьму для перваго примѣра предыдущей теоріи задачу, рѣшенную уже нами въ § 575. Надлежитъ опредѣлить объемъ V , заключающійся между поверхностями, которыхъ уравненія въ прямоугольныхъ координатахъ суть

$$az = xy, \quad x + y + z = a, \quad z = 0.$$

Площадь P очевидно здѣсь есть площадь прямоугольнаго треугольника, образованнаго осью x , осью y и слѣдомъ плоскости $x + y + z = a$ на плоскость xy ; этотъ слѣдъ имѣетъ уравненіемъ $x + y = a$, и мы имѣемъ

$$y_0 = 0, \quad Y = a - x, \quad x_0 = 0, \quad X = a.$$

Ордината z_0 есть нуль, это значеніе даетъ третье изъ предыдущихъ уравненій; два другія даютъ

$$z = \frac{xy}{a}, \quad z = a - x - y,$$

и самое меньшее изъ этихъ двухъ значеній z очевидно должно быть взято за Z въ формулѣ

$$V = \int_0^a dx \int_0^{a-x} Z dy.$$

Такимъ образомъ имѣемъ $Z = \frac{xy}{a}$, когда

$$\frac{xy}{a} < a - x - y \text{ или } y < \frac{a(a-x)}{a+x},$$

и напротивъ, $Z = a - x - y$, когда

$$\frac{xy}{a} > a - x - y \text{ или } y > \frac{a(a-x)}{a+x},$$

слѣдовательно

$$\begin{aligned} \int_0^{a-x} Z dy &= \int_{\frac{a(a-x)}{a+x}}^{\frac{a(a-x)}{a+x}} \frac{xy}{a} dy + \int_{\frac{a(a-x)}{a+x}}^{a-x} (a-x-y) dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{ax(a-x)^2}{(a+x)^2} + \frac{1}{2} \frac{x^2(a-x)^2}{(a+x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x(a-x)^2}{a+x}, \end{aligned}$$

и

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{x(a-x)^2}{a+x} dx = \left(\frac{17}{12} - \log 4 \right) a^3,$$

какъ мы уже нашли въ § 575. Мы видимъ, что объемъ Z составляется изъ двухъ частей, изъ которыхъ одна ограничивается даннымъ параболоидомъ, другая — данной плоскостію.

586. ПРИМѢРЪ II.—Данъ цилиндръ, котораго уравненіе въ прямоугольныхъ координатахъ есть $y^2 + x^2 - Rx = 0$; отыскивается объемъ части, заключенной между плоскостію $x y$ и шаромъ, котораго уравненіе есть $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Если вмѣсто x и y выведемъ полярныя координаты ρ и ω , то уравненіе шара будетъ

$$z^2 = R^2 - \rho^2,$$

и уравненіе слѣда цилиндра будетъ

$$\rho = R \cos \omega.$$

Поэтому выраженіе искомаго объема, взявъ сначала только половину его, а потомъ удвоивъ, будетъ

$$V = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{R \cos \omega} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho;$$

интеграль $\int \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho$ равенъ

$$-\frac{1}{3} (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} + \text{const.};$$

поэтому

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \omega) d\omega \\ &= \frac{2}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \omega + \sin \omega \cos^2 \omega) d\omega; \end{aligned}$$

имѣемъ

$$\int (1 - \sin \omega + \sin \omega \cos^2 \omega) d\omega = \omega + \cos \omega - \frac{1}{3} \cos^3 \omega + \text{const.};$$

поэтому

$$V = \frac{1}{3} \pi R^3 - \frac{4}{9} R^3.$$

Излишекъ половины шара $\frac{2}{3} \pi R^3$ надъ частію $2V$ неопре-
дѣленнаго цилиндра, заключенной внутри его, поэтому ра-
венъ $\frac{8}{9} R^3$.

0 приложеніи предъидущихъ формулъ къ различнымъ вопросамъ.

587. Разсмотрѣніе объемовъ можетъ быть употреблено съ выгодой въ рѣшеніи разныхъ вопросовъ; мы это видимъ въ примѣрѣ § 582, гдѣ мы естественно встрѣтились съ новымъ и очень простымъ доказательствомъ правила интегрированія подъ знакомъ \int , прежде уже изложеннымъ; мы дадимъ здѣсь два другіе примѣра.

Какъ на первый примѣръ, мы укажемъ на дѣйствіе, которое употреблялъ Пуассонъ для опредѣленія значенія опредѣленнаго интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

которымъ мы уже занимались въ § 497 и который есть ничто иное, какъ Эйлеровъ интегралъ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Если умножимъ предыдущій интегралъ на

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy,$$

то будемъ имѣть произведеніе, равное $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)$, которое есть ничто иное, какъ двойной интегралъ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy.$$

Этотъ двойной интегралъ выражаетъ неопредѣленный объемъ, заключающійся между поверхностію, которой уравненіе въ прямоугольныхъ координатахъ есть $z = e^{-x^2-y^2}$, и плоскостію xy . Если же вмѣсто координатъ x, y поставимъ полярныя координаты ρ, ω , то уравненіе поверхности будетъ $z = e^{-\rho^2}$, и рассматриваемый нами объемъ будетъ имѣть выраженіемъ

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho d\rho.$$

Интегралъ, относящійся къ ρ , не зависитъ отъ ω ; поэтому можно написать

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{2\pi} d\omega \times \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho d\rho;$$

первый множитель имѣетъ значеніе 2π , второй равенъ $\frac{1}{2}$; поэтому имѣемъ

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

какъ это мы уже нашли посредствомъ другихъ разсмотрѣній.

588. Какъ для втораго примѣра, мы намѣреваемся доказать любопытную формулу, которую Леженъ-Диришле (Lejeune-Dirichlet) употреблялъ въ своихъ «Мемуарахъ»; эта формула слѣдующая

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx;$$

гдѣ $f(x, y)$ означаетъ какую-нибудь функцію, остающуюся конечной между предѣлами интегрированій. Поэтому здѣсь дѣло идетъ о двойномъ интегралѣ, въ которомъ интегрированіе относительно y должно быть произведено между предѣлами, не зависящими оба отъ другой переменнѣй, и гдѣ можно однако нарушить порядокъ двухъ интегрированій. Чтобы доказать формулу Диришле, достаточно разсматривать x , y и $f(x, y)$ какъ три прямоугольныя координаты поверхности; въ этомъ случаѣ мы видимъ, что каждый изъ двухъ двойныхъ интеграловъ выражаетъ объемъ, заключающійся между поверхностію, о которой мы только-что говорили, плоскостію xy и тремя плоскостями, перпендикулярными къ этой послѣдней, которыхъ уравненія суть $y=0$, $x=a$, $y=x$.

О площади кривыхъ поверхностей.

589. Прямую линію можно сравнивать только съ другой прямой линіей или съ суммою такихъ линій; также въ «Дифференціальномъ исчисленіи» мы должны были съ точностію опредѣлить прямолинейную длину, которую называемъ *длиной дуги кривой*. Мы употребимъ здѣсь аналогичныя разсмотрѣнія для опредѣленія того, что мы подразумеваемъ подъ *площадью* опредѣленной части кривой поверхности.

Можно всегда предположить, что часть кривой поверхности, о которой идетъ рѣчь, ограничена контуромъ, потому что, если бы противное имѣло мѣсто и если бы былъ вопросъ о цѣлой поверхности тѣла, мы имѣли бы случай безконечно-малаго контура; сверхъ того ничто намъ не мѣшаетъ раздѣлить поверхность на двѣ и на большее число частей; то, что мы будемъ говорить о каждой части, прилагается естественно къ цѣлой поверхности, которая есть сумма этихъ частей.

Пусть часть кривой поверхности ограничена контуромъ C ; площадью этой поверхности мы назовемъ предѣлъ S , къ которому стремится площадь вписанной многогранной поверхности, образованной изъ треугольныхъ граней и ограниченной многоугольнымъ контуромъ Γ , имѣющимъ предѣломъ контуръ C .

Нужно доказать, что существует предѣлъ S и что онъ не зависитъ отъ закона, по которому возрастаетъ число граней вписанной многогранной поверхности.

Мы отнесемъ поверхность къ тремъ прямоугольнымъ осямъ и выберемъ xu такъ, чтобы она не была перпендикулярна ни къ одной изъ касательныхъ плоскостей, проведенныхъ къ поверхности черезъ точки, расположенныя на контурѣ C или внутри этого контура; можно всегда поступить такимъ образомъ, раздѣливъ, если это необходимо, часть рассматриваемой поверхности на нѣсколько частей и рассматривая цѣлую поверхность, какъ равную суммѣ площадей частей. Теперь, пусть будетъ C' проэкція контура C на плоскость xu ; впишемъ въ контурѣ C' многоугольникъ Γ' , котораго всѣ стороны бесконечно-малы, и раздѣлимъ этотъ многоугольникъ на треугольные элементы α , которыхъ всѣ три стороны бесконечно-малы. Ребра треугольной призмы, имѣющей основаніемъ α и которой ребра параллельны оси z , встрѣтятъ кривую поверхность въ трехъ точкахъ; если эти точки соединимъ между собой, то получимъ треугольникъ, который будетъ одною изъ граней многогранной поверхности, которую мы желали вписать; площадь этого треугольника будетъ равна $\frac{\alpha}{\cos \theta}$, гдѣ θ есть уголъ, образуемый плоскостію треугольника съ плоскостію xu . На основаніи этого, если означимъ черезъ P цѣлую площадь вписанной многогранной поверхности, будемъ имѣть

$$P = \sum \frac{\alpha}{\cos \theta}.$$

Но если назовемъ черезъ ζ уголъ, образуемый съ плоскостію касательной плоскостію, проведенной къ поверхности черезъ одну изъ вершинъ вписаннаго треугольника, котораго площадь есть $\frac{\alpha}{\cos \theta}$, то очевидно будетъ имѣть

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \zeta} (1 + \varepsilon),$$

гдѣ ε есть бесконечно-малая; поэтому можно написать

$$(1) \quad P = \sum \frac{\alpha}{\cos \zeta} + \sum \varepsilon \frac{\alpha}{\cos \zeta}.$$

Ордината z нашей поверхности есть определенная функция переменных x и y ; $\cos \zeta$ есть также функция тѣхъ же двухъ переменныхъ. Рассмотримъ въ этомъ случаѣ поверхность, которой ордината Z имѣетъ значеніемъ

$$Z = \frac{1}{\cos \zeta};$$

означимъ сверхъ того черезъ V объемъ цилиндра, параллельнаго оси z и имѣющаго основаніемъ C' , ограниченный этой поверхностію и плоскостію xy ; будемъ имѣть (§ 581)

$$(2) \quad V = \lim \sum Z \alpha = \lim \sum \frac{\alpha}{\cos \zeta}.$$

Поэтому первая изъ суммъ формулы (1) имѣетъ предѣломъ V ; отсюда слѣдуетъ (§ 8), что вторая сумма имѣетъ предѣломъ нуль, и поэтому мы имѣемъ

$$(3) \quad \lim P = V \quad \text{или} \quad S = V,$$

что и доказываетъ изложенное предложеніе.

590. Формула (2) существуетъ (§ 581), какого бы вида ни были бесконечно-малыя площади α ; поэтому для всякаго разложенія площади C' на бесконечно-малые элементы α будемъ имѣть

$$(4) \quad S = \lim \sum \frac{\alpha}{\cos \zeta}.$$

Пусть будутъ ζ_0 и ζ_1 самое большое и самое меньшее изъ значеній ζ для различныхъ точекъ, расположенныхъ внутри контура C ; предъидущая формула даетъ

$$S = \frac{1}{\cos \zeta'} \lim \sum \alpha = \frac{A}{\cos \zeta'},$$

гдѣ ζ' есть уголъ, заключающійся между ζ_0 и ζ_1 , и A площадь, ограниченная контуромъ C' . Предположимъ, что площадь A вездѣ приводится къ бесконечно-малому элементу α ; S также приводится къ бесконечно-малому элементу σ , и мы будемъ имѣть

$$\sigma = \frac{\alpha}{\cos \zeta'}.$$

Пусть будет ζ уголъ, образуемый съ плоскостію xu касательной въ какой-нибудь точкѣ элемента σ ; будемъ имѣть

$$\frac{1}{\cos \zeta'} = \frac{1}{\cos \zeta} (1 + \eta),$$

гдѣ η есть безконечно-малая; поэтому

$$(5) \quad \sigma = \frac{\alpha}{\cos \zeta} (1 + \eta).$$

Нужно замѣтить, что формула (4) существуетъ и тогда, когда касательная плоскость къ данной поверхности въ нѣкоторыхъ точкахъ контура C перпендикулярна къ плоскости xu ; въ самомъ дѣлѣ, это обстоятельство болѣе не будетъ имѣть мѣста, если вмѣсто контура C возьмемъ другой безконечно близкій контуръ C_0 , надлежащимъ образомъ выбранный; означимъ тогда черезъ S_0 площадь, заключающуюся въ новомъ контурѣ, и черезъ V_0 объемъ, опредѣленный такъ, какъ это было показано въ § 589, будемъ имѣть

$$S_0 = V_0;$$

это равенство существуетъ, когда контуръ C_0 измѣняется и стремится къ предѣлу C ; сверхъ того S_0 стремится тогда къ предѣлу S ; поэтому, перейдя къ предѣлу, получимъ равенство (3). Какая бы ни была площадь, ограниченная контуромъ C , всегда можно ее раздѣлить на такія части, чтобы касательная плоскость была перпендикулярна къ плоскости xu только для точекъ, расположенныхъ на частныхъ контурахъ; слѣдовательно, формула (4) относится ко всѣмъ случаямъ.

591. Приложимъ предъидущее къ случаю поверхности, опредѣляемой уравненіемъ въ прямоугольныхъ координатахъ x, y, z . Пусть будетъ

$$(6) \quad dz = p dx + q dy,$$

гдѣ p и q данныя функціи отъ x и отъ y ; будемъ имѣть (§ 254)

$$\frac{1}{\cos \zeta} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Предположимъ, что всегда возможно исполнить, что контуръ C' проекціи площади S , которую нужно вычислить, встрѣчается только въ двухъ точкахъ линіями, параллельными y ; въ этомъ случаѣ площадь S , равная объему V , будетъ имѣть выраженіемъ (§ 582)

$$(7) \quad S = \int_{x_0}^X dx \int_{y_0}^Y \sqrt{1 + p^2 + q^2} dy$$

гдѣ y_0 и Y означаютъ ординаты y контура C' , отвѣчающія абсциссѣ \bar{x} ; x_0 и X суть абсциссы, отвѣчающія ординатамъ, ограничивающимъ контуръ. Также можно написать

$$(8) \quad S = \int_{y_0}^Y dy \int_{x_0}^X \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx;$$

но здѣсь x_0 и X означаютъ абсциссы двухъ точекъ контура, отвѣчающихъ одной и той же ординатѣ y , между тѣмъ какъ y_0 и Y ординаты, соответствующія абсциссамъ, ограничивающимъ контуръ C' .

592. Иногда бываетъ выгодно координаты x, y замѣнить полярными координатами ρ, ω . Имѣемъ

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega,$$

и мы можемъ взять $\rho \Delta \rho \Delta \omega$ за элементъ α (§ 584). Въ этомъ случаѣ, если начало координатъ находится внѣ контура C' и если каждый радіусъ ρ встрѣчаетъ контуръ только въ двухъ точкахъ, будемъ имѣть

$$(9) \quad S = \int_{\omega_0}^{\Omega} d\omega \int_{\rho_0}^R \frac{\rho d\rho}{\cos \zeta},$$

гдѣ ρ_0 и R радіусы точекъ контура C' , отвѣчающіе одному и тому же значенію ω , а ω_0, Ω означаютъ значенія ω , отвѣчающія радіусамъ, ограничивающимъ контуръ. Эта формула прилагается еще къ тому случаю, когда контуръ C' образованъ изъ двухъ частныхъ контуровъ, внутреннихъ одинъ по отношенію другому, причемъ начало находится внутри самаго

меньшаго контура и поверхность S имѣетъ проэкціей площадь, заключающуюся между обоими контурами. Въ этомъ случаѣ очевидно имѣемъ $\omega_0 = 0$, $\Omega = 2\pi$ и

$$(10) \quad S = \int_0^{2\pi} d\omega \int_{\rho_0}^R \frac{\rho d\rho}{\cos \zeta}.$$

Если самый меньшій изъ двухъ контуровъ, о которыхъ только-что говорили, приводится къ началу координатъ, то $\rho_0 = 0$, и формула (10) обращается въ

$$(11) \quad S = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\cos \zeta}.$$

Косинусъ угла ζ легко выражается въ функціи частныхъ производныхъ отъ z , относительно ρ и ω . Имѣемъ

$$dx = d\rho \cos \omega - \rho \sin \omega d\omega, \quad dy = d\rho \sin \omega + \rho \cos \omega d\omega;$$

въ этомъ случаѣ формула (6) даетъ

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = p \cos \omega + q \sin \omega, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \omega} = -p \sin \omega + q \cos \omega;$$

возвысивъ въ квадратъ и сложивъ, получимъ

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2 = p^2 + q^2,$$

слѣдовательно

$$\frac{\rho}{\cos \zeta} = \sqrt{\rho^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2}.$$

Поэтому имѣемъ

$$(12) \quad S = \iint \sqrt{\rho^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2} d\rho d\omega,$$

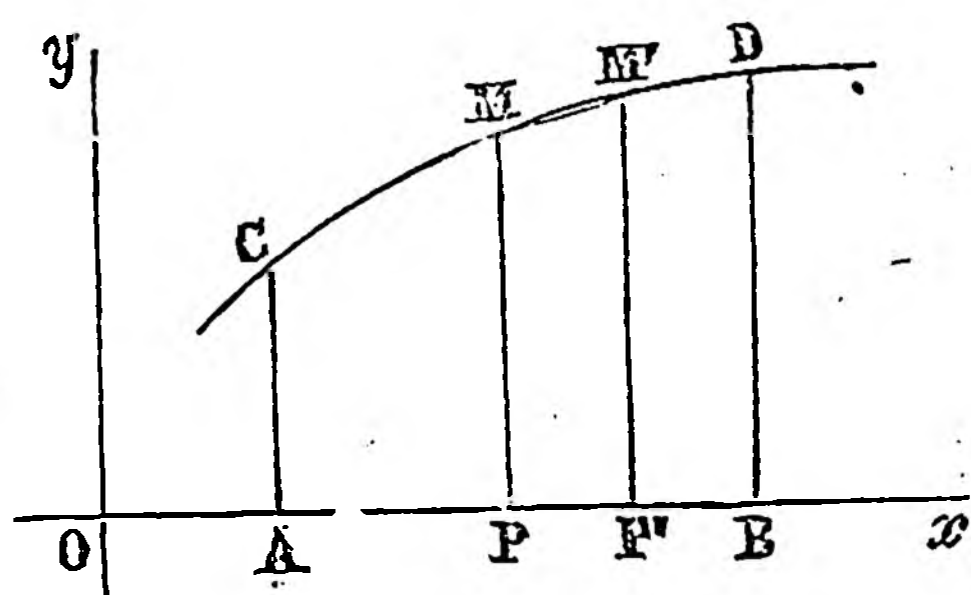
гдѣ предѣлы интегрированія не указаны для того, чтобы охватить всѣ случаи.

Случай поверхностей вращенія.

593. Въ случаѣ поверхностей вращенія, двойной интегралъ, выражающій площадь зоны, заключенной между двумя

плоскостями, перпендикулярными къ оси, непосредственно приводится къ простому интегралу.

Пусть будет CMD кривая, отнесенная къ двумъ прямоугольнымъ осямъ Ox , Oy , расположеннымъ въ одной плоскости, и предположимъ, что отыскивается площадь S зоны, образованной дугой CD , обращающейся около оси x . Разсмотримъ сначала случай, гдѣ ордината y кривой постоянно возрастаетъ или убываетъ, когда переходимъ отъ одного конца дуги CD къ дру-



гому; искомая площадь S будетъ имѣть проэціей на плоскость, перпендикулярную къ Ox , поверхность, заключающуюся между двумя окружностями, описанными изъ начала какъ изъ центра ординатами $CA = y_0$, $DB = Y$ крайнихъ точекъ дуги. Поэтому здѣсь можно приложить формулу (10) § 592, написавъ y вмѣсто ρ и взявъ для ζ уголъ между плоскостію касательной къ поверхности и плоскостію перпендикулярной къ Ox ; такимъ образомъ имѣемъ

$$S = \int_0^{2\pi} d\omega \int_{y_0}^Y \frac{y dy}{\cos \zeta}.$$

Но по природѣ поверхности, ζ не зависитъ отъ ω ; поэтому множитель $\int_{y_0}^Y \frac{y dy}{\cos \zeta}$ можно вывести изъ-подъ знака \int , относящагося къ ω , и мы получимъ

$$S = \int_0^{2\pi} d\omega \times \int_{y_0}^Y \frac{y dy}{\cos \zeta} = 2\pi \int_{y_0}^Y \frac{y dy}{\cos \zeta},$$

касательная плоскость поверхности вращенія перпендикулярна къ плоскости меридіанальной кривой, поэтому ζ есть уголъ, образованный касательной этого меридіана съ осью y ; вслѣдствіе этого $\cos \zeta = \pm \frac{dy}{ds}$, гдѣ ds есть дифференціалъ дуги кривой.

Такимъ образомъ имѣемъ

$$S = \pm 2\pi \int_{y_0}^Y y \frac{ds}{dy} dy,$$

гдѣ знакъ \pm долженъ быть замѣненъ знакомъ $Y - y_0$; если x_0 и $X > x_0$ означаютъ абсциссы, отвѣчающія ординатамъ y_0 , Y , то можно будетъ также написать

$$S = 2\pi \int_{x_0}^X y \frac{ds}{dx} dx.$$

Очевидно, что эта послѣдняя формула существуетъ для какой бы то ни было дуги кривой CD , потому что дугу CD всегда можно раздѣлить на такія части, чтобы ордината отъ одного конца до другаго каждой части измѣнялась въ одномъ и томъ же смыслѣ. Наша формула, прилагающаяся къ каждой части, прилагается также къ ихъ суммѣ.

594. Можно непосредственно вывести формулу, которую мы только-что получили. Дѣйствительно, впишемъ въ дугу CD многоугольную линію, которой стороны безконечно-малы. Каждая изъ сторонъ MM' опишетъ усѣченный конусъ; впишемъ въ каждый усѣченный конусъ многогранную поверхность, образованную изъ четырехугольныхъ граней, которыхъ двѣ стороны суть безконечно-близкія ребра усѣченнаго конуса; если каждая изъ этихъ граней будетъ раздѣлена по діагонали на треугольники, то мы будемъ имѣть многогранную поверхность, которая будетъ сразу вписана въ данную поверхность вращенія и въ поверхность, составленную изъ вписанныхъ усѣченныхъ конусовъ. Отсюда слѣдуетъ, что искомая поверхность S равна предѣлу суммы поверхностей усѣченныхъ конусовъ. Но, если x, y означаютъ координаты точки M , $x + \Delta x, y + \Delta y$ координаты точки M' , то поверхность, образованная линіей MM' , будетъ

$$2\pi \left(y + \frac{\Delta y}{2} \right) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

или

$$2\pi y \frac{ds}{dx} \Delta x (1 + \epsilon),$$

гдѣ s означаетъ, дугу кривой и ϵ бесконечно-малую. На основаніи этого имѣемъ

$$S = \lim \sum 2\pi y \frac{ds}{dx} \Delta x$$

или

$$S = 2\pi \int_{x_0}^x y \frac{ds}{dx} dx.$$

595. ПЛОЩАДЬ ЭЛЛИпсоида вращенія. — Отыщемъ площадь зоны эллипсоида вращенія. Пусть будетъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

уравненіе эллипса, который образываетъ поверхность, вращаясь около оси x ; имѣемъ

$$y \frac{ds}{dx} = \frac{b}{a^2} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}.$$

Площадь, образованная дугой, заключающейся между концомъ полу-оси b и точкой, отвѣчающей абсциссѣ x , будетъ

$$S = 2\pi \frac{b}{a^2} \int_0^x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} dx;$$

слѣдуетъ различать случаи $a > b$ и $a < b$.

Если $a > b$, то эллипсоидъ произошелъ отъ вращенія во-кругъ большой оси; имѣемъ

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} dx \\ &= x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} + \frac{a^4}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2}; \end{aligned}$$

поэтому

$$S = \frac{\pi b x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2} + \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2}.$$

Если желаемъ найти цѣлую площадь эллипсоида, то нужно сдѣлать $x = a$ и удвоить потомъ результатъ; такимъ обра-

зомъ получимъ

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a}$$

или, положивъ $b = a \cos \frac{\gamma}{2}$,

$$S = 2\pi b^2 \left(1 + \frac{\gamma}{\sin \gamma}\right).$$

Если $b = a$, $\gamma = 0$, эллипсоидъ приводится къ шару, и мы снова находимъ извѣстную формулу $S = 4\pi a^2$.

Предположимъ теперь $a < b$; въ этомъ случаѣ эллипсоидъ произошелъ отъ вращенія вокругъ малой оси, и выраженіе S есть

$$S = \frac{2\pi b}{a^2} \int_0^x \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2} dx$$

или

$$S = \frac{\pi b x \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}}{a^2} + \frac{\pi b a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{x \sqrt{b^2 - a^2} + \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}}{a^2};$$

сдѣлавъ въ этой формулѣ $x = a$ и умноживъ ее потомъ на 2, получимъ цѣлую поверхность эллипсоида, именно

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a};$$

если положимъ

$$b = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{\gamma}{2}} + e^{-\frac{\gamma}{2}} \right).$$

то предыдущая формула обратится въ

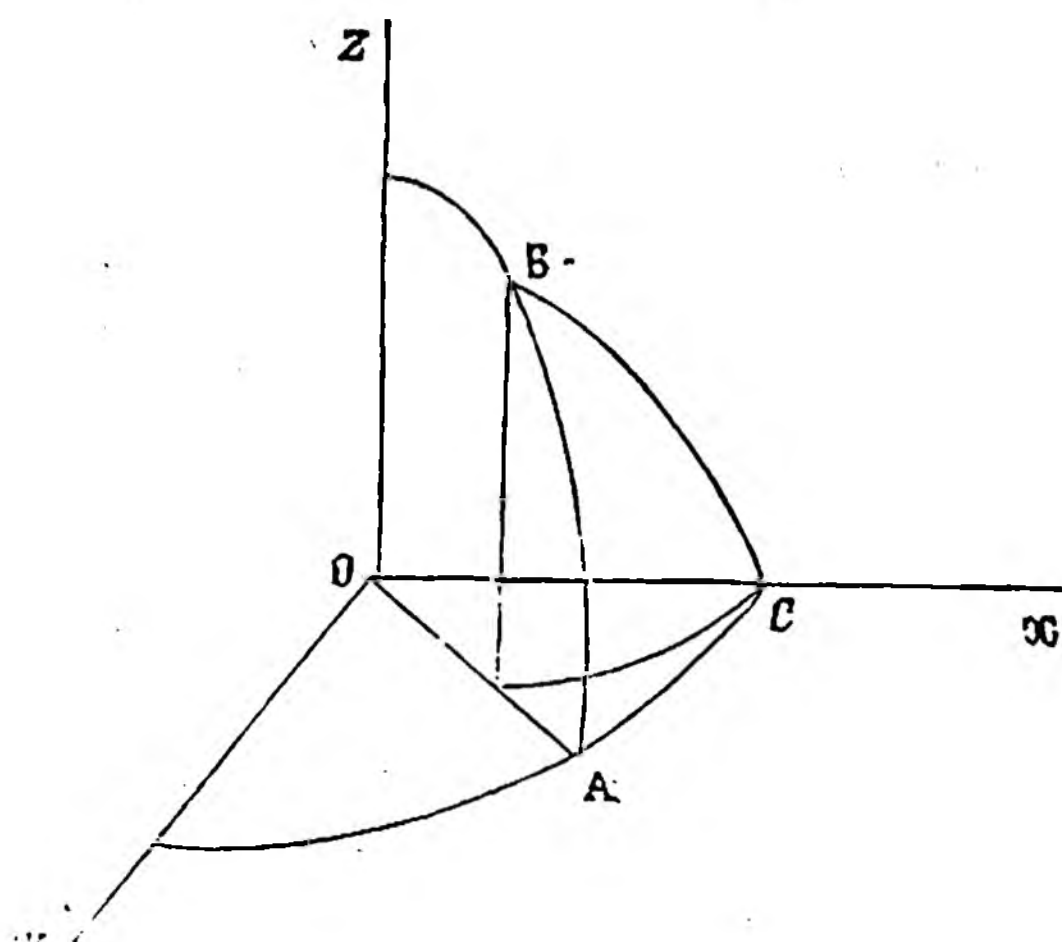
$$S = 2\pi b^2 \left[1 + \frac{\gamma}{\frac{1}{2}(e^{\gamma} + e^{-\gamma})} \right],$$

это же для $b = a$ или $\gamma = 0$ обращается въ $4\pi a^2$, въ выраженіе, относящееся къ шару.

Приложенія способа опредѣленія площади какой-нибудь кривой поверхности.

596. **Задача I.** — Найти площадь сферическаго треугольника.

Всякій сферическій треугольникъ дѣлится дугой большаго круга, проведенной перпендикулярно къ противоположной



сторонѣ, на два прямоугольные треугольника, поэтому намъ достаточно разобрать случай прямоугольнаго треугольника.

Пусть будетъ сферическій треугольникъ ABC, прямоугольный въ A, который мы отнесемъ къ тремъ прямоугольнымъ осямъ, проходящимъ черезъ центръ шара; мы возьмемъ за плоскость xu плоскость стороны AC и заставимъ ось x пройти черезъ вершину C. Линія OA есть слѣдъ плоскости стороны AB на плоскость xu ; если же изъ вершины B опустимъ перпендикуляръ BR на OA, то дуга круга будетъ проектироваться по дугѣ эллипса CR; поэтому надлежитъ найти площадь части шара, проектирующейя внутри криволинейнаго треугольника ACR.

Уравненіе шара есть

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

уравненіе же плоскости стороны BC есть

$$z = y \operatorname{tang} C,$$

гдѣ C есть уголъ въ треугольникѣ при вершинѣ того-же названія. Исключивъ z изъ двухъ предыдущихъ уравненій, получимъ уравненіе эллипса CR, именно

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 C} = R^2.$$

откуда, замѣнивъ x и y значеніями $\rho_0 \cos \omega$ и $\rho_0 \sin \omega$, находимъ

$$\rho_0 = \frac{R \cos C}{\sqrt{1 - \sin^2 C \cos^2 \omega}}.$$

Косинусъ угла, образуемаго касательной плоскостію шара съ плоскостію xy , есть $\frac{z}{R}$ или $\frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{R}$ и элементъ сферической поверхности есть $\frac{R \rho d\rho d\omega}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}$. Интегрирование относительно ρ должно быть произведено отъ значенія ρ_0 , соотвѣтствующаго эллипсу, до $\rho = R$; интегрирование относительно ω должно быть произведено отъ $\omega = 0$ до $\omega = \frac{b}{R}$, гдѣ b есть длина стороны AC ; такимъ образомъ выраженіе искомой площади S есть

$$S = \int_0^{\frac{b}{R}} d\omega \int_{\rho_0}^R \frac{R \rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}.$$

Имѣемъ

$$\int_{\rho_0}^R \frac{R \rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = R \sqrt{R^2 - \rho_0^2} = \frac{R^2 \sin C \sin \omega}{\sqrt{1 - \sin^2 C \cos^2 \omega}},$$

поэтому

$$S = \int_0^{\frac{b}{R}} \frac{R^2 \sin C \sin \omega d\omega}{\sqrt{1 - \sin^2 C \cos^2 \omega}}.$$

Неопредѣленный интеграль дифференціала подъ знакомъ \int есть $-R^2 \arcsin(\sin C \cos \omega) + \text{const}$; поэтому имѣемъ

$$S = R^2 \left[C - \arcsin \left(\sin C \cos \frac{b}{R} \right) \right];$$

но на основаніи формулъ Сферической тригонометріи, $\sin C \cos \frac{b}{R}$ равняется $\cos B$ или $\sin \left(\frac{\pi}{2} - B \right)$ и слѣдовательно

$$S = R^2 \left(B + C - \frac{\pi}{2} \right),$$

это же есть извѣстная формула.

597. ЗАДАЧА II. — Данъ шаръ, имѣющій въ прямоугольныхъ координатахъ уравненіемъ

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

найти площадь части этого шара, проектирующейся на плоскость $xу$, внутри кривой, уравненіе которой въ полярныхъ координатахъ есть

$$\rho = \sqrt{\frac{3}{2}(1 - \tan^2 \omega)}.$$

Элементъ сферической поверхности, какъ въ предыдущей задачѣ, на основаніи того, что $R = 1$, есть

$$\frac{\rho \, d\rho \, d\omega}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

Данная кривая симметрична относительно осей x и y ; поэтому достаточно опредѣлить сферическую площадь, проектирующуюся на одну изъ четвертей, ту, которая отвѣчаетъ значеніямъ ω , заключающимся между 0 и $\frac{\pi}{4}$. Радиусъ-векторъ этой кривой для значеній ω , заключающихся между 0 и $\frac{\pi}{6}$, больше 1, но онъ меньше 1 для значеній ω , заключающихся между $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$; поэтому площадь, которую мы желаемъ вычислить, разлагается на двѣ части, именно на ту, которая проектируется на круговой секторъ, уголъ котораго есть $\frac{\pi}{6}$, и на ту, которая проектируется на сегментъ данной кривой, которой хорда образуетъ съ осью x уголъ $\frac{\pi}{6}$. Для первой части интегрированія должны быть произведены отъ $\rho = 0$ до $\rho = 1$ и отъ $\omega = 0$ до $\omega = \frac{\pi}{6}$; для второй части интегрированіе относительно ρ должно быть произведено отъ $\rho = 0$ до $\rho = \sqrt{\frac{3}{2}(1 - \tan^2 \omega)}$ и интегрированіе относительно ω отъ $\omega = \frac{\pi}{6}$ до $\omega = \frac{\pi}{4}$. Такимъ образомъ имѣемъ

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\omega \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\omega \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}(1-\tan^2 \omega)}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{3}{2} \tan^2 \omega - \frac{1}{2}} d\omega;$$

но

$$\int \sqrt{\frac{3}{2} \tan^2 \omega - \frac{1}{2}} d\omega = \int \frac{\frac{3}{2} \frac{d\omega}{\cos^2 \omega}}{\sqrt{\frac{3}{2} \tan^2 \omega - \frac{1}{2}}} - \int \frac{2 \cos \omega d\omega}{\sqrt{2 \sin^2 \omega - \frac{1}{2}}}.$$

Первый интегралъ имѣетъ значеніемъ

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \log \left(\tan \omega + \sqrt{\tan^2 \omega - \frac{1}{3}} \right) + \text{const.},$$

а второй

$$\sqrt{2} \log \left(\sin \omega + \sqrt{\sin^2 \omega - \frac{1}{4}} \right) + \text{const.};$$

отсюда имѣемъ

$$S = \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \log (\sqrt{2} + 1) - \sqrt{\frac{3}{2}} \log (\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

Общая формула для опредѣленія площади поверхностей.

598. Разсмотримъ сначала случай равной площади, ограниченной контуромъ C , и предположимъ, что уравненія

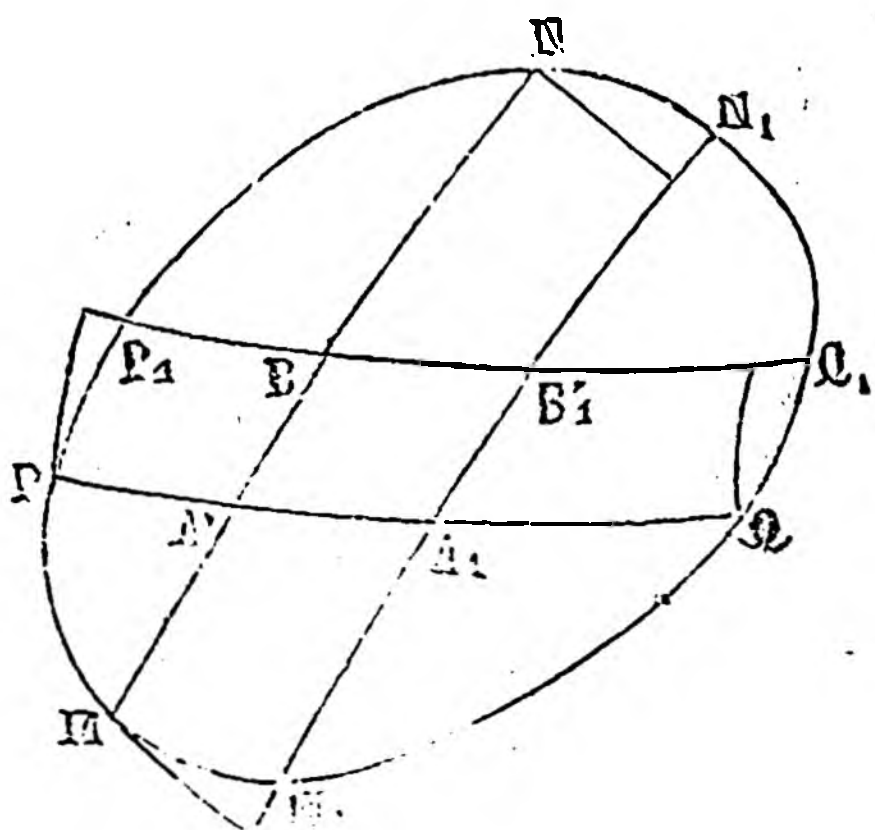
$$(1) \quad u = \alpha, \quad v = \beta,$$

въ которыхъ u и v означаютъ функціи координатъ x и y , α и β два произвольные параметра, выражаютъ два ряда такихъ линій, которыя можно провести черезъ каждую точку, находящуюся внутри контура C ; мы допустимъ, что эти линіи встрѣчаютъ контуръ только въ двухъ точкахъ. Уравненія (1), рѣшенныя относительно x и y , даютъ

$$(2) \quad x = f(\alpha, \beta), \quad y = f_1(\alpha, \beta).$$

Мы получимъ линію перваго ряда, если заставимъ въ

этихъ формулахъ измѣняться β , послѣ того какъ дали α определенное значеніе; точно также измѣненіе α , оставивъ при этомъ параметръ β неизмѣняемымъ, дастъ линію второго ряда. Раздѣлимъ, какъ въ § 581, площадь S по всѣмъ направле-



ніямъ на бесконечно-малыя части линіями α и β ; площадь S будетъ предѣлъ суммы четырехугольниковъ ABA_1B_1 , определяемыхъ линіями, отвѣчающими значеніямъ двухъ параметровъ α , $\alpha + \Delta\alpha$, β , $\beta + \Delta\beta$. Чтобы вычислить площадь четырехугольника ABA_1B_1 , мы предположимъ сначала, что приращенія $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ не независятъ другъ отъ друга, но что ихъ отношеніе остается близкимъ къ постоянному числу, напримѣръ, единицѣ; въ этомъ случаѣ, если $\Delta\alpha$ взято за главную бесконечно-малую, $\Delta\beta$ будетъ перваго порядка. Проведемъ черезъ точку A касательную къ кривой AA_1 , которая получается отъ измѣненія параметра; разстояніе каждой точки этой дуги отъ касательной въ A есть количество втораго порядка, и дуга заключается между двумя линіями, параллельными касательной, разстояніе между которыми втораго порядка. Равнымъ образомъ дуга BB_1 заключается между двумя линіями, параллельными касательной въ B къ этой дугѣ, разстояніе между которыми также втораго порядка. Замѣтимъ теперь, что уголъ касательныхъ въ A и B , будучи перваго порядка относительно $\Delta\beta$, еще перваго порядка относительно $\Delta\alpha$. Сдѣлавъ то же самое относительно дугъ AB , A_1B_1 , получимъ два параллелограмма, между которыми будетъ заключаться площадь ω четырехугольника ABA_1B_1 . Вершины обоихъ параллелограммовъ отстоятъ отъ точекъ A , B , A_1 , B_1 , на количества втораго порядка: ихъ

стороны поэтому отличаются от хордъ AA_1 , AB или от дугъ AA_1 , BB_1 только на количества второго порядка. Означимъ черезъ s_1 и s_2 дуги кривыхъ, отсчитываемыя отъ двухъ опредѣленныхъ началъ, черезъ i уголъ между касательными къ этимъ двумъ кривымъ въ точкѣ A ; площадь четырехугольника ABA_1B_1 можетъ быть выражена формулой

$$(3) \quad \omega = \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \sin i (1 + \varepsilon) d\alpha d\beta,$$

въ которой ε означаетъ количество, уничтожающееся вмѣстѣ съ $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$.

Возвратимся къ тому случаю, когда $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ суть независимыя безконечно-малыя количества. Для каждой системы значеній $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ можно опредѣлить такія два цѣлыя числа p и q , чтобы разность отношеній $\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}$, $\frac{q}{p}$ была меньше даннаго числа, и если сдѣлаемъ $\Delta\alpha = p\Delta'\alpha$, $\Delta\beta = q\Delta'\beta$, то отношеніе $\frac{\Delta'\beta}{\Delta'\alpha}$ будетъ близко къ единицѣ. При помощи линій обѣихъ системъ, отвѣчающихъ измѣненіямъ обоихъ параметровъ равнымъ $\Delta'\alpha$ или $\Delta'\beta$, раздѣлимъ четырехугольникъ ABA_1B_1 на pq четырехугольниковъ, къ каждому изъ которыхъ можно будетъ приложить формулу (3). Когда $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ малы, значеніе $\frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \sin i$, относящееся къ новымъ четырехугольникамъ, мало отличается отъ того, которое отвѣчаетъ точкѣ A ; формула (3) поэтому прилагается къ четырехугольнику ABA_1B_1 , и мы имѣемъ

$$S = \lim \sum \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \sin i d\alpha d\beta,$$

и слѣдовательно, не означая предѣловъ,

$$(4) \quad S = \iint \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \sin i d\alpha d\beta.$$

Если желаемъ начать интегрированіе относительно β , то нужно взять предѣлами значенія β_0 и B , отвѣчающія точкамъ, гдѣ кривая $u = \alpha$ встрѣчаетъ контуръ; интегрируемъ потомъ относительно α между значеніями α_0 , A , отно-

сящими къ тѣмъ кривымъ α , которыя ограничиваютъ контуръ. Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$S = \int_{\alpha_0}^A d\alpha \int_{\beta_0}^B \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \sin i d\alpha d\beta.$$

Предъидущая формула упрощается, когда обѣ системы употребленныхъ кривыхъ образуютъ двойную ортогональную систему. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ имѣемъ $\sin i = 1$.

599. Разсмотримъ теперь часть S' кривой поверхности, ограниченную контуромъ C' . Раздѣлимъ площадь S' по всѣмъ направленіямъ на бесконечно-малыя части линіями, опредѣляемыми уравненіями

$$(5) \quad u = \alpha, \quad v = \beta,$$

въ которыхъ u и v суть функціи координатъ x, y, z , а α и β два произвольные параметра. Уравненія (5), соединенныя съ уравненіемъ поверхности, позволяютъ выразить x, y, z въ функціи α и β ; пусть

$$(6) \quad x = f(\alpha, \beta), \quad y = f_1(\alpha, \beta), \quad z = f_2(\alpha, \beta).$$

Проектируемъ контуръ C' и линіи, дѣлящія площадь S' , на плоскость xy . Предположимъ, что чертежъ, который намъ только-что служилъ для случая равныхъ площадей, изображаетъ эту проекцію, и означимъ черезъ $A', A'_1, M', M'_1, \dots$ точки поверхности, проектирующіяся въ A, A_1, M, M_1, \dots . Четыреугольникъ ABA_1B_1 есть проекція элемента ω' поверхности, и, если означимъ черезъ ζ уголъ касательной плоскости въ A съ плоскостью xy , имѣемъ

$$\omega' = \frac{\omega}{\cos \zeta} (1 + \varepsilon') = \frac{1}{\cos \zeta} \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \sin i (1 + \eta) d\alpha d\beta,$$

гдѣ η уничтожается вмѣстѣ съ $d\alpha$ и $d\beta$. Означимъ черезъ s'_1, s'_2 дуги, проектирующіяся по s_1 и s_2 , отложимъ на касательныхъ въ A' къ этимъ дугамъ линіи равныя, $\frac{ds'_1}{d\alpha}, \frac{ds'_2}{d\beta}$, и построимъ параллелограммъ, имѣющій смежными сторонами эти двѣ прямыя. Параллелограммъ проектируется на плоскость xy по параллелограмму, котораго обѣ смежныя стороны

суть касательныя въ A къ дугамъ s_1, s'_1 ; сверхъ того проэк-
 ции линій $\frac{ds'_1}{d\alpha}, \frac{ds'_2}{d\beta}$ равны $\frac{ds_1}{d\alpha}, \frac{ds_2}{d\beta}$. Проекція параллело-
 грамма касательной плоскости имѣетъ поэтому мѣрой
 $\frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \sin i$, и $\frac{1}{\cos \zeta} \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \sin i$ есть мѣра параллелограмма
 касательной плоскости. Но этотъ послѣдній параллелограммъ
 имѣетъ также мѣрой $\frac{ds'_1}{d\alpha} \frac{ds'_2}{d\beta} \sin i'$; отсюда слѣдуетъ, что

$$(7) \quad \omega' = \frac{ds'_1}{d\alpha} \frac{ds'_2}{d\beta} \sin i' (1 + \eta) d\alpha d\beta,$$

и слѣдовательно, какъ и въ предъидущемъ параграфѣ,

$$S = \iint \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \sin i d\alpha d\beta,$$

гдѣ S означаетъ теперь площадь кривой поверхности,
 s_1, s_2 дуги кривыхъ, проведенныхъ на этой поверхности,
 и i уголъ между этими кривыми.

Общая формула для опредѣленія объемовъ.

600. Формула, посредствомъ которой мы опредѣляли
 въ § 582 объемъ тѣлъ, въ предположеніи прямоугольныхъ
 координатъ, есть

$$V = \int_{x_0}^X dx \int_{y_0}^Y (Z - z_0) dy;$$

такъ какъ $Z - z_0$ есть интегралъ дифференціала dz между
 предѣлами z_0 и Z , то можно также написать

$$V = \int_{x_0}^X dx \int_{y_0}^Y dy \int_{z_0}^Z dz$$

или просто

$$V = \iiint dx dy dz,$$

когда невыгодно дѣлать очевидными предѣлы интегриро-
 ванія. Предъидущее выраженіе V есть *тройной интегралъ*; оно
 соотвѣтствуетъ выраженію

$$V = \lim \sum \Delta x \Delta y \Delta z,$$

которое показываетъ, что объемъ V есть предѣлъ, къ которому стремится сумма бесконечно-малыхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ $\Delta x \Delta y \Delta z$, содержащихся въ тѣлѣ и опредѣляемыхъ тремя системами плоскостей, параллельныхъ плоскостямъ координатъ.

Если вмѣсто прямоугольныхъ координатъ желаемъ употребить прямолинейныя косоугольныя координаты, то пусть будутъ a, b, c углы между осями Oy и Oz , Oz и Ox , Ox и Oy ; положимъ сверхъ того

$$k = \sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c};$$

косоугольный параллелепипедъ, котораго смежныя стороны суть $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, будетъ имѣть объемомъ $k \Delta x \Delta y \Delta z$, и мы вмѣсто предъидущихъ формулъ будемъ имѣть

$$V = k \lim \sum \Delta x \Delta y \Delta z$$

и

$$V = k \iiint dx dy dz.$$

601. Разсмотримъ вообще систему трехъ видовъ поверхностей, имѣющихъ уравненіями

$$u = \alpha, \quad v = \beta, \quad w = \gamma,$$

гдѣ u, v, w означаютъ данныя функціи трехъ прямоугольныхъ координатъ, а α, β, γ суть произвольные параметры.

Если въ каждой системѣ поверхностей возьмемъ двѣ поверхности, отвѣчающія соответственно параметрамъ α и $\alpha + \Delta\alpha$, β и $\beta + \Delta\beta$, γ и $\gamma + \Delta\gamma$, то опредѣлимъ тѣло, которое можно назвать бесконечно-малымъ *параллелепипедомъ*, потому что двѣ плоскости, касательныя къ одной сторонѣ или къ двумъ противоположнымъ, образуютъ между собой бесконечно-малый уголъ.

Означимъ черезъ s_1, s_2, s_3 дуги криволинейныхъ реберъ, проходящихъ черезъ точку встрѣчи поверхностей α, β, γ ,

причемъ дуга s_1 лежитъ на линіи встрѣчи поверхностей β и γ , дуга s_2 на линіи встрѣчи поверхностей γ и α , дуга s_3 на линіи встрѣчи поверхностей α и β ; пусть наконецъ будутъ a, b, c углы, образуемые касательными къ двумъ изъ этихъ кривыхъ. Разсмотрѣніе разстояній точекъ кривой грани параллелепипеда отъ касательной плоскости въ одной изъ точекъ этой грани позволяетъ легко доказать, посредствомъ разсужденія, аналогичнаго тому, которое служило намъ къ вычисленію площади бесконечно-малаго криволинейнаго четырехугольника, что мѣра разсмотрѣннаго бесконечно-малаго параллелепипеда есть

$$k \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \frac{ds_3}{d\gamma} (1 + \varepsilon) d\alpha d\beta d\gamma,$$

гдѣ ε есть количество, уничтожающееся вмѣстѣ съ тремя приращеніями $d\alpha, d\beta, d\gamma$.

Теперь пусть U какой-нибудь опредѣленный объемъ; очевидно, что этотъ объемъ будетъ равенъ предѣлу суммы бесконечно-малыхъ криволинейныхъ параллелепипедовъ, содержащихся въ этомъ тѣлѣ и опредѣляемыхъ тремя системами поверхностей, о которыхъ мы говорили. Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$V = \lim \sum k \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \frac{ds_3}{d\gamma} d\alpha d\beta d\gamma$$

или

$$V = \iiint k \frac{ds_1}{d\alpha} \frac{ds_2}{d\beta} \frac{ds_3}{d\gamma} d\alpha d\beta d\gamma.$$

Предѣлы интегрированій опредѣлятся безъ труда, какъ и въ предыдущихъ разобранныхъ случаяхъ, если поверхность разсматриваемаго тѣла встрѣчается только въ двухъ точкахъ кривыми пересѣченія координатныхъ поверхностей; когда противное будетъ имѣть мѣсто, то надо будетъ раздѣлить тѣло на нѣсколько частей, которыя вычисляются отдѣльно.

Предыдущая формула упрощается, когда координатныя поверхности суть ортогональныя, потому что количество k ,

которое вообще есть функція переменныхъ α , β , γ , обращается въ этомъ случаѣ въ единицу.

Частный случай полярныхъ координатъ.

602. Въ случаѣ полярныхъ координатъ точки поверхности опредѣляются тремя системами ортогональныхъ поверхностей. Построимъ сперва три прямоугольныя оси Ox , Oy , Oz ; первая система состоитъ изъ шаровъ, имѣющихъ центромъ начало и радіусъ которыхъ мы означимъ черезъ r ; вторая образуется конусами вращенія вокругъ оси z , которыхъ образующій уголъ мы обозначимъ черезъ θ ; наконецъ третья система составитъ изъ плоскостей, проходящихъ черезъ ось z и образующихъ съ плоскостію zx уголъ ψ .

Радіусъ r измѣняется отъ 0 до $+\infty$; уголъ θ , образуемый направлениемъ радіуса r съ положительной частью оси, измѣняется отъ 0 до 180 градусовъ; наконецъ уголъ ψ равенъ углу, образуемому проэкціей радіуса r на плоскость xy съ осью x ; онъ отсчитывается отъ положительной части оси x къ положительной части оси y , и измѣняется отъ 0 до 360 градусовъ.

Каждый шаръ пересѣкается координатными поверхностями двухъ другихъ системъ, по двумъ системамъ ортогональныхъ линій, именно по системѣ параллелей и системѣ меридіановъ, и онъ тогда раздѣляется на безконечно-малые прямоугольники, имѣющіе сторонами дуги круга, отвѣчающія центральнымъ угламъ, равнымъ $d\theta$ и $d\psi$; радіусы этихъ дугъ сверхъ того соотвѣтственно равны r и $r \sin \theta$, откуда слѣдуетъ, что стороны нашего прямоугольника суть $r d\theta$, $r \sin \theta d\psi$. Этотъ прямоугольникъ есть основаніе одного изъ криволинейныхъ параллелепипедовъ, опредѣляемыхъ тремя разсмотрѣнными поверхностями; что касается третьяго измѣренія этого элемента, то оно очевидно есть dr . На основаніи этого, объемъ тѣла будетъ опредѣляться слѣдующей формулой:

$$V = \iiint r^2 dr \sin \theta d\theta d\psi.$$

Предположимъ, что начало находится внѣ тѣла и

означимъ черезъ r_0 , R значенія r при входѣ и выходѣ изъ тѣла; интегрированіе относительно r должно быть произведено между предѣлами r_0 , R ; но $\int r^2 dr = \frac{1}{3} r^3 + \text{const.}$; поэтому

$$V = \frac{1}{3} \int \int (R^3 - r_0^3) \sin \theta d\theta d\psi.$$

Интегрированіе относительно θ должно быть произведено между значеніями θ_0 , Θ , отвѣчающими предѣламъ тѣла и которыя суть функціи ψ ; наконецъ, интегрированіе относительно ψ должно быть произведено между значеніями ψ_0 , Ψ , отвѣчающими двумъ плоскостямъ, между которыми заключается тѣло; такимъ образомъ мы можемъ написать

$$V = \frac{1}{3} \int_{\psi_0}^{\Psi} d\psi \int_{\theta_0}^{\Theta} (R^3 - r_0^3) \sin \theta d\theta.$$

Предположимъ теперь, что начало координатъ находится внутри тѣла. Въ этомъ случаѣ интегралъ, относящійся къ r , долженъ начаться отъ нуля, и интегралы, относящіеся къ θ и ψ , должны быть взяты, первый между 0 и π , второй между 0 и 2π . Поэтому имѣемъ

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} R^3 \sin \theta d\theta.$$

603. Мы только-что показали, что каждый шаръ радіуса r раздѣляется на бесконечно-малые прямоугольники ω , которыхъ стороны равны $r d\theta$, $r \sin \theta d\psi$; поэтому имѣемъ

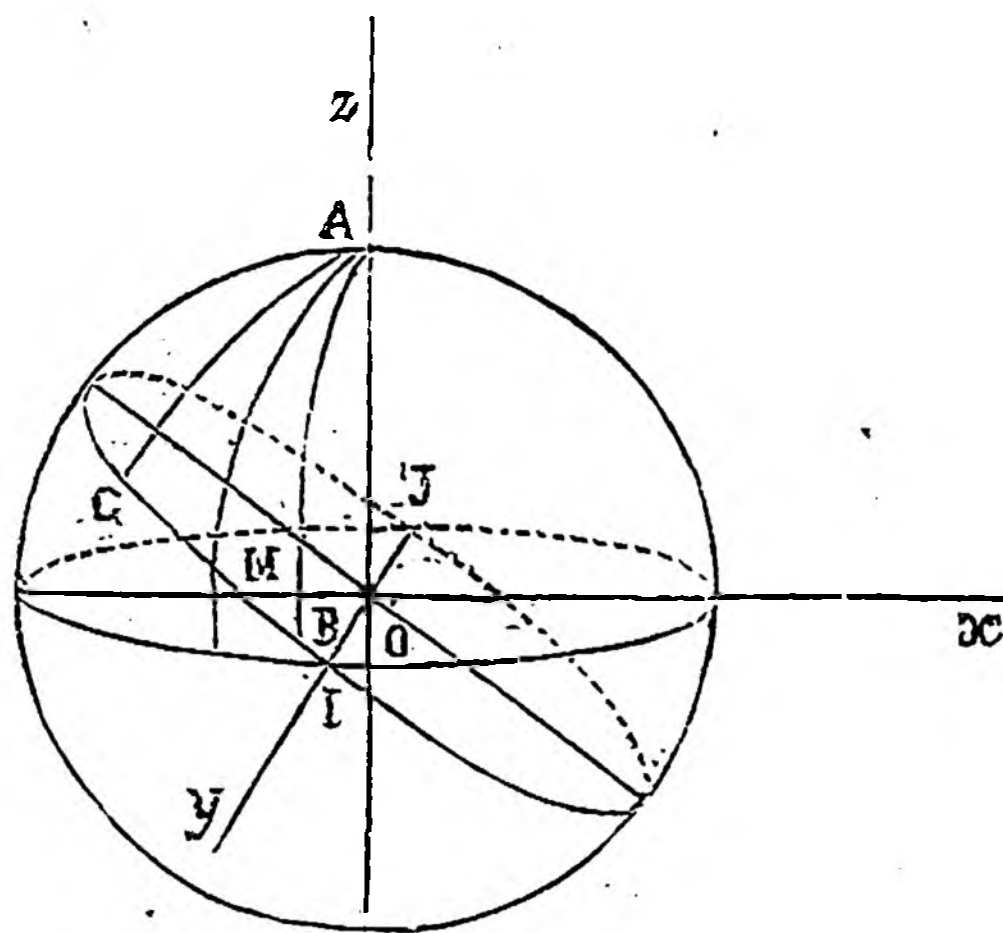
$$\omega = r^2 \sin \theta d\theta d\psi (1 + \varepsilon),$$

гдѣ ε бесконечно-малая, и площадь части шара можетъ быть опредѣлена формулой

$$S = r^2 \iint \sin \theta d\theta d\psi.$$

Предположимъ, на примѣръ, что мы желаемъ найти площадь сферическаго треугольника посредствомъ предыдущей формулы. Пусть A , B , C углы этого треугольника, котораго вершины будутъ означены тѣми же буквами; я возьму

за ось z радиусъ OA шара; далѣе, проведя большой кругъ перпендикулярно къ OA , пересѣкающій въ двухъ точкахъ I и J большой кругъ, къ которому принадлежитъ сторона BC ,



я возьму радиусъ OI за ось y ; ось x должна быть перпендикулярна къ OA и къ OI ; я выберу такое направленіе, чтобы значеніе ψ , относящееся къ C , превышало то, которое относится къ B , предположивъ, что ψ возрастаетъ, когда переходимъ отъ оси x къ оси y . Теперь рассмотримъ точку M , двигающуюся по сторонѣ BC отъ B къ C , и проведемъ дугу большого круга AM , которая, продолженная, если надо, пересѣчетъ въ N большой кругъ, расположенный въ плоскости xy . Если означимъ черезъ ψ_0 значеніе ψ , относящееся къ точкѣ B , и если радиусъ шара примемъ равнымъ единицѣ, то площадь T сферическаго треугольника будетъ дана формулой

$$T = \int_{\psi_0}^{\psi_0+A} d\psi \int_0^{AM} \sin \theta d\theta = \int_{\psi_0}^{\psi_0+A} (1 - \cos AM) d\psi,$$

или, по причинѣ равенства $\cos AM = \sin MN$,

$$T = \int_{\psi_0}^{\psi_0+A} d\psi - \int_{\psi_0}^{\psi_0+A} \sin MN d\psi = A - \int_{\psi_0}^{\psi_0+A} \sin MN d\psi.$$

Но въ сферическомъ прямоугольномъ треугольникѣ MNI имѣемъ

$$\sin MN = \frac{\sin I \cos \psi}{\sin M}, \quad \cos M = \sin I \sin \psi;$$

дифференцирование послѣдней формулы даетъ

$$d\psi = - \frac{\sin M}{\sin I \cos \psi} dM, \quad \text{откуда} \quad \sin MN d\psi = - dM;$$

поэтому будемъ имѣть

$$T = A + \int_{\psi_0}^{\psi_0+A} \frac{dM}{d\psi} d\psi;$$

наконецъ, такъ какъ имѣемъ $M = \pi - B$ для $\psi = \psi_0$ и $M = C$ для $\psi = \psi_0 + A$, будемъ имѣть

$$T = A + B + C - \pi,$$

это же есть извѣстная формула.

604. Разсмотримъ теперь какую-нибудь кривую поверхность, которой точка M имѣетъ координатами r, θ, ψ , и построимъ шаръ радиуса r , имѣющій центромъ начало координатъ. Конусъ, имѣющій вершиной это начало и основаніемъ элементъ ω шара, опредѣлитъ на кривой поверхности элементъ σ , котораго ω будетъ коническая проэкція на шаръ r . Пусть σ', ω' ортогональныя проэкціи элементовъ σ и ω на касательную плоскость въ M къ шару. Заставимъ обращаться плоскость вокругъ OM ; слѣдъ ω , помѣщенный на касательную плоскость, опредѣлитъ два радиуса-вектора, выходящихъ изъ неподвижной точки M , контуровъ σ' и ω' . Нетрудно видѣть, что отношеніе этихъ радиусовъ-векторовъ стремится къ единицѣ, когда элементъ σ дѣлается бесконечно-малымъ; отсюда слѣдуетъ, что проэкція σ на касательную плоскость въ M отличается отъ ω только на количество бесконечно-малое относительно этой проэкціи, и мы можемъ взять

$$\sigma = \frac{\omega}{\cos \zeta} = \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\psi}{\cos \zeta},$$

гдѣ ζ есть уголъ, образуемый радиусомъ r съ нормальной поверхностью.

Касательныя сторонъ $r d\theta$ и $r \sin \theta d\psi$ элемента $d\omega$ образуютъ съ радиусомъ r систему прямоугольныхъ осей, къ которымъ можно отнести рассматриваемую поверхность. Для точки M три координаты равны нулю; сверхъ того, когда двѣ первыя координаты послѣдовательно возрастаютъ отъ $r d\theta$ и отъ $r \sin \theta d\psi$, тогда третья координата принимаетъ приращенія $\frac{dr}{d\theta} d\theta, \frac{dr}{d\psi} d\psi$. Означивъ черезъ p и q отноше-

нія этихъ послѣднихъ приращеній къ приращеніямъ координатъ, которыя ихъ производятъ, получимъ

$$p = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta}, \quad q = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial r}{\partial \psi}.$$

На основаніи формулъ прямоугольныхъ координатъ, относящихся къ нормалямъ, уголъ ζ имѣетъ косинусомъ

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

поэтому имѣемъ

$$\cos \zeta = \frac{r \sin \theta}{\sqrt{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2\right] \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2}},$$

и площадь S части поверхности будетъ опредѣляться формулой

$$S = \iint \sqrt{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2\right] \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2} r \, d\theta \, d\psi.$$

Объ измѣненіи переменныхъ въ кратныхъ интегралахъ.

605. Разысканіе объемовъ, ограниченныхъ кривыми поверхностями, и разысканіе площадей этихъ поверхностей, какъ мы видѣли, приводитъ къ опредѣленію двойныхъ интеграловъ, имѣющихъ въ системѣ прямоугольныхъ координатъ общими выраженіями

$$\iint z \, dx \, dy, \quad \iint dx \, dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Другіе вопросы также приводятъ къ *тройнымъ, четвернымъ* и т. д. интеграламъ; во всѣхъ случаяхъ интегрированіе должно быть распространено на всѣ значенія переменныхъ, удовлетворяющія нѣкоторымъ условіямъ, выражаемымъ посредствомъ одного или нѣсколькихъ неравенствъ. Когда можно произвести интегрированіе относительно одной изъ переменныхъ, тогда кратный интегралъ приводится къ интегралу порядка на единицу ниже, а когда этого сдѣлать

нельзя, тогда иногда можно произвести *упрощение* посредством измѣненія переменныхъ.

Разсмотримъ, наримѣръ, двойной интегралъ

$$(1) \quad U = \iint V \, dx \, dy,$$

въ которомъ V означаетъ данную функцію отъ x и отъ y , и предположимъ, что мы желаемъ замѣнить переменныя x и y двумя новыми переменными u и v , связанными съ первыми посредством данныхъ соотношеній. Какова бы ни была часть плоскости xy , заключающая точки (x, y) , на которыя должно распространиться интегрированіе, интегралъ U составитъ изъ одного или нѣсколькихъ членовъ вида

$$(2) \quad Z = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} V \, dy,$$

гдѣ y_0 и y_1 означаютъ данныя двѣ функціи отъ x , а x_0, x_1 суть постоянныя. Очевидно, можно предположить, что x и y возрастаютъ постоянно отъ низшаго предѣла къ высшему, что приводитъ къ тому, что dx и dy положительныя. Теперь изъ данныхъ уравненій между x, y, u, v можно вывести значеніе y въ функціи x и v ; пусть будетъ

$$y = f(x, v),$$

и рассмотримъ интегралъ $\int_{y_0}^{y_1} V \, dy$, гдѣ x можетъ быть рассматриваемо, какъ постоянный параметръ. Если замѣнимъ въ немъ y черезъ $f(x, v)$, dy черезъ $\frac{\partial f(x, v)}{\partial v} dv$, то получимъ $\int_{v_0}^{v_1} V \frac{\partial f(x, v)}{\partial v} dv$, гдѣ v_0 и v_1 значенія v , отвѣчающія $y = y_0$; $y = y_1$. Мы предположимъ здѣсь, что v измѣняется постоянно въ одномъ смыслѣ, когда y измѣняется отъ y_0 до y_1 , если это будетъ иначе, то мы снова придемъ къ тому же предположенію, раздѣливъ интегралъ относительно y на нѣсколько частей. Такъ какъ dy предполагается положительнымъ, то dv имѣетъ знакъ $\frac{\partial f(x, v)}{\partial v}$; если эта производная отрицательна, то dv мы можемъ сдѣлать положительнымъ,

измѣнивъ предѣлы интегрированія, такъ что будемъ имѣть

$$Z = \int_{x_0}^{x_1} dx \int V \left[\pm \frac{\partial f(x, v)}{\partial v} \right] dv,$$

гдѣ $\pm \frac{\partial f(x, v)}{\partial v}$ означаютъ абсолютное значеніе $\frac{\partial f(x, v)}{\partial v}$, а интеграль относительно v взять между предѣлами v_0 и v_1 или v_1 и v_0 . На основаніи этого, значеніе Z будетъ

$$Z = \iint V \left[\pm \frac{\partial f(x, v)}{\partial v} \right] dx dv.$$

Этотъ результатъ даетъ намъ средство произвести подстановленіе, которое мы имѣли въ виду; дѣйствительно, пусть будетъ

$$x = F(u, v)$$

значеніе x въ u и v ; достаточно dx замѣнить черезъ $\pm \frac{\partial F(x, v)}{\partial u} du$, и мы будемъ имѣть

$$Z = \iint V \left[\pm \frac{\partial f(x, v)}{\partial v} \right] \left[\pm \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \right] du dv,$$

формулу, въ которой интегрированія должны быть распространены на *тѣ же самыя точки*, что въ формулѣ (2).

Но если возьмемъ дифференціалъ уравненія $y = f(x, v)$, рассматривая x и y какъ функціи отъ u и v , то получимъ

$$\frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv = \frac{\partial f(x, v)}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial f(x, v)}{\partial v} dv,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{\partial f(x, v)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u}, \\ \frac{dy}{dv} &= \frac{\partial f(x, v)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f(x, v)}{\partial v}, \end{aligned}$$

и слѣдовательно, по причинѣ $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u}$,

$$\frac{\partial f(x, v)}{\partial v} \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{dy}{dv} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dy}{du}.$$

Вслѣдствіе этого значеніе Z обращается въ

$$Z = \pm \iint V \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{dy}{dv} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dy}{du} \right) du dv,$$

гдѣ функція V выражена въ u и v .

606. Къ тому же результату можно придти, употребивъ разсмотрѣнія, развитыя въ § 598. Интегралъ Z можетъ быть разсматриваемъ, какъ выражающій объемъ, составленный изъ элементарныхъ призмъ $V dx dy$, которыхъ основанія $dx dy$ наполняютъ часть плоскости xy . Два уравненія такихъ, какъ

$$f_1(x, y) = u, \quad f_2(x, y) = v,$$

гдѣ u и v означаютъ два переменныхъ параметра, выражаютъ двѣ системы кривыхъ; двѣ бесконечно-близкія кривыя одной изъ системъ опредѣляютъ съ двумя бесконечно-близкими кривыми другой бесконечно-малый параллелограммъ, котораго площадь будетъ $ds_1 ds_2 \sin i$, гдѣ ds_1 и ds_2 бесконечно-малые элементы кривыхъ u и v , а i уголъ между этими элементами. Объемъ, означенный черезъ Z , очевидно будетъ сумма элементарныхъ объемовъ $V ds_1 ds_2 \sin i$, и мы будемъ имѣть

$$Z = \iint V ds_1 ds_2 \sin i.$$

Но x и y суть функціи отъ u и v ; если идемъ по кривой u , то измѣнится только v , и мы будемъ имѣть

$$dx = \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$

откуда

$$ds_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2} dv;$$

если, напротивъ, идемъ по кривой v , то измѣняется только u , и мы будемъ имѣть

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du.$$

откуда

$$ds_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} du.$$

косинусы угловъ, образованныхъ ds_1 и ds_2 съ осями x и y ,

пропорциональны соотвѣтственно $\frac{\partial x}{\partial v}$ и $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$ и $\frac{\partial y}{\partial u}$, поэтому

$$\begin{aligned}\cos i &= \frac{\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}}, \\ \sin i &= \frac{\pm \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}}.\end{aligned}$$

откуда

$$ds_1 ds_2 \sin i = \pm \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

и слѣдовательно

$$Z = \iint \pm \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}\right) Y du dv,$$

какъ это мы уже нашли.

Напримѣръ, переходъ отъ прямоугольныхъ координатъ x и y къ полярнымъ ρ и ω , связаннымъ съ x и y уравненіями

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega,$$

приведетъ къ формулѣ

$$\iint V dx dy = \iint V_\rho d\rho d\omega;$$

элементы $\rho d\rho d\omega$ состоятъ здѣсь изъ прямоугольниковъ, которыхъ стороны $d\rho$, $\rho d\omega$ суть элементы прямыхъ линій, проведенныхъ черезъ начало, и окружностей, имѣющихъ центромъ это начало.

607. Вообще, если имѣемъ кратный интегралъ порядка n такой, какъ

$$\iiint \dots \int V dx dy \dots dz,$$

и если n переменныхъ x, y, \dots, z замѣняемъ n другими u, v, \dots, w , связанными съ первыми данными соотношеніями,

то будемъ имѣть

$$\int \int \dots \int V \, dx \, dy \dots dz = \int \int \dots \int (\pm D) V \, du \, dv \dots dw,$$

гдѣ D означаетъ детерминантъ

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \dots & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \dots & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \dots & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Эта теорема доказывается посредствомъ того, что предшествовало въ случаѣ двухъ переменныхъ x и y ; поэтому достаточно доказать ее для $n + 1$ переменныхъ, допустивъ, что она имѣетъ мѣсто для n переменныхъ.

Пусть будетъ поэтому интеграль порядка $n + 1$

$$U = \int \int \dots \int \int V \, dx \, dy \dots dz \, ds.$$

и предположимъ, что мы желаемъ переменныя x, y, \dots, z, s замѣнить $n + 1$ переменными u, v, \dots, w, t . Можно начать съ выраженія n переменныхъ x, y, \dots, z въ функции s , и n новыхъ переменныхъ u, v, \dots, w , и тогда интегрированіе относительно s должно быть произведено послѣднимъ. Чрезъ это измѣненіе n переменныхъ, на основаніи нашего допущенія, будемъ имѣть:

$$U = \int \int \dots \int \int (\pm \Delta) V \, ds \, du \, dv \dots dw,$$

гдѣ Δ означаетъ детерминантъ

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \dots & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \dots & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \dots & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix};$$

мы употребляемъ здѣсь букву δ для выраженія частныхъ производныхъ, взятыхъ въ томъ предположеніи, что неза-

зависимыя переменныя суть s и u, v, \dots, w , между тѣмъ какъ мы сохранимъ букву δ для того случая, когда независимыя переменныя суть u, v, \dots, w, t . Взявъ дифференціалъ одной изъ переменныхъ x, y, \dots, z въ этомъ предположеніи, сначала относительно одной изъ переменныхъ u, v, \dots, w , потомъ относительно t , получимъ

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\delta x}{\delta u} + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\delta x}{\delta s} \frac{\partial s}{\partial t},$$

откуда

$$\frac{\delta x}{\delta u} = \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial u}}{\frac{\partial s}{\partial t}},$$

и мы будемъ имѣть подобныя же выраженія для каждой изъ производныхъ, входящихъ въ значеніе детерминанта Δ .

Теперь, въ вычисленіи U , послѣ подстановленія, о которомъ мы только-что говорили, интегрированіе относительно s можетъ быть произведено первымъ, и, на основаніи того, что было сказано вначалѣ, если выразимъ s въ функціи t и u, v, \dots, w , то должны замѣнить ds черезъ $\frac{\partial s}{\partial t} dt$; поэтому будемъ имѣть

$$U = \int \int \dots \int \int \left(\pm \Delta \frac{\partial s}{\partial t} \right) \nabla du dv \dots dw dt,$$

и выраженіе Δ можетъ быть выведено изъ слѣдующаго:

$$D_s = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \dots & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \dots & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \dots & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

замѣнивъ $\frac{\partial x}{\partial u}, \dots$ чрезъ $\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial u}}{\frac{\partial s}{\partial t}}, \dots$

Означимъ черезъ D_x, D_y, \dots, D_z результаты, которые

получимъ, произведя надъ D_s одинъ, два, три, . . . раза круговое подстановленіе, которое состоитъ въ замѣненіи x, y, \dots, z, s соответственно черезъ y, \dots, z, s, x . Такъ какъ детерминантъ измѣнить только знакъ, когда измѣнимъ двѣ параллельныя линіи одну въ другую, то не трудно видѣть, что подстановленіе x, y, \dots, z вмѣсто s измѣнитъ D_s въ $-D_x, -D_y, \dots, -D_z$, если только число n переменныхъ x, y, \dots, z четное, и въ $+D_x, -D_y, \dots, D_z$, если n число нечетное; въ этомъ послѣднемъ случаѣ знаки бываютъ попеременно $+$ и $-$.

Теперь, въ выраженіи D_s замѣнимъ производныя отъ x , т. е. $\frac{\partial x}{\partial u}, \dots$, значеніями

$$\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial u}}{\frac{\partial s}{\partial t}}, \dots;$$

мы получимъ, послѣ того, что было сказано, результатъ

$$D_s + (-1)^n \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_x.$$

Если въ этомъ выраженіи замѣнимъ производныя отъ y ,

т. е. $\frac{\partial y}{\partial u}, \dots$, значеніями $\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial u}}{\frac{\partial s}{\partial t}}, \dots$, то D_x не измѣнится,

потому что этотъ детерминантъ уничтожается, когда подставимъ въ немъ s вмѣсто y ; поэтому будемъ имѣть результатъ

$$D_s + (-1)^n \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_x + \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_y,$$

и нетрудно видѣть, что если замѣнимъ производныя другихъ переменныхъ, до z включительно, тождественными значеніями, то выраженіе D_s наконецъ обратится въ

$$D_s + (-1)^n \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_x + \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_y + \dots + (-1)^n \frac{\frac{\partial z}{\partial t}}{\frac{\partial s}{\partial t}} D_z,$$

слѣдовательно, будемъ имѣть

$$\Delta \frac{\partial s}{\partial t} = D_s \frac{\partial s}{\partial t} \pm D_x \frac{\partial x}{\partial t} + D_y \frac{\partial y}{\partial t} \pm \dots \pm D_z \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Но мы знаемъ, что вторая часть этой формулы равна именно детерминанту

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \dots & \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \dots & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \dots & \frac{\partial z}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} & \dots & \frac{\partial s}{\partial w} & \frac{\partial s}{\partial t} \end{vmatrix};$$

поэтому имѣемъ

$$\Delta \frac{\partial s}{\partial t} = D,$$

и слѣдовательно

$$U = \iiint \dots \iiint (\pm D) V du dv \dots dw dt,$$

это же доказываетъ изложенное предложеніе.

608. Разсмотримъ въ частности кратный интегралъ, относящійся къ вычисленію объемовъ и кривыхъ поверхностей. Для выраженія объемовъ въ прямоугольныхъ координатахъ имѣемъ

$$U = \iiint dx dy dz,$$

и если вмѣсто x, y, z подставимъ три переменныя u, v, w , то получимъ

$$U = \iiint \Delta du dv dw,$$

гдѣ

$$\Delta = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial w} + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial w} + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \frac{\partial y}{\partial w}.$$

Предположимъ, что мы взяли для u, v, w полярныя координаты r, θ, ψ , связанныя съ x, y, z формулами

$$x = r \sin \theta \cos \psi, \quad y = r \sin \theta \sin \psi, \quad z = r \cos \theta,$$

будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \sin \theta \cos \psi, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \psi, & \frac{\partial x}{\partial \psi} &= -r \sin \theta \sin \psi. \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta \sin \psi, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta \sin \psi, & \frac{\partial y}{\partial \psi} &= r \sin \theta \cos \psi, \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial z}{\partial \theta} &= -r \sin \theta, & \frac{\partial z}{\partial \psi} &= 0, \end{aligned}$$

это же даетъ

$$\Delta = r^2 \sin \theta;$$

поэтому, для выраженія объема въ полярныхъ координатахъ, будемъ имѣть

$$U = \iiint r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\psi.$$

и если r постоянно возрастаетъ между предѣлами r_0 и R , данными функциями отъ θ и ψ , то мы можемъ написать

$$U = \frac{1}{3} \iint (R^3 - r_0^3) \sin \theta \, d\theta \, d\psi,$$

какъ мы уже это нашли (§ 602).

609. Перейдемъ теперь къ площадямъ кривыхъ поверхностей; когда употребляемъ прямоугольныя координаты x и y , тогда опредѣленіе этихъ площадей зависитъ отъ двойнаго интеграла

$$U = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy,$$

гдѣ p и q означаютъ частныя производныя $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Если вмѣсто x и y поставимъ новыя переменныя u, v , то будемъ имѣть

$$U = \iint \pm \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, du \, dv;$$

но мы имѣемъ

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = p \frac{\partial x}{\partial v} + q \frac{\partial y}{\partial v},$$

откуда

$$p \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right),$$

$$q \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right),$$

подставивъ же эти значенія p и q , получимъ

$$U = \iint \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2} du dv.$$

Предположимъ, что мы взяли для u и v полярныя координаты θ , ψ ; производныя $\frac{\partial x}{\partial \theta}$, $\frac{\partial x}{\partial \psi}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta}$, $\frac{\partial y}{\partial \psi}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}$, $\frac{\partial z}{\partial \psi}$ должны быть здѣсь взяты въ разсмотрѣнн радиуса r какъ функціи отъ θ и ψ ; въ этомъ случаѣ будемъ имѣть

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin \theta \cos \psi + r \cos \theta \cos \psi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin \theta \sin \psi + r \cos \theta \sin \psi, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos \theta - r \sin \theta.$$

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial r}{\partial \psi} \sin \theta \cos \psi - r \sin \theta \sin \psi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial r}{\partial \psi} \sin \theta \sin \psi + r \sin \theta \cos \psi, \quad \frac{\partial z}{\partial \psi} = \frac{\partial r}{\partial \psi} \cos \theta,$$

откуда

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \sin \theta \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \sin \theta + r \cos \theta \right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \psi} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta \cos \psi \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \cos \theta - r \sin \theta \right) + r \frac{\partial r}{\partial \psi} \sin \psi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \psi} - \frac{\partial z}{\partial \psi} \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta \sin \psi \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \cos \theta - r \sin \theta \right) - r \frac{\partial r}{\partial \psi} \cos \psi.$$

Сумма квадратовъ вторыхъ частей этихъ формулъ равна

$$\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 \right] r^2 \sin^2 \theta + r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \psi} \right)^2;$$

поэтому мы найдемъ формулу для опредѣленія площадей въ

полярныхъ координатахъ, данную уже въ § 604, именно

$$U = \iint \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 \right] \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi} \right)^2} r d\theta d\psi.$$

Объ обобщеніи формулы, относящейся къ теоріи эйлеровыхъ интеграловъ. Приложенія.

610. Мы здѣсь дадимъ замѣчательный примѣръ упрощенія кратнаго интеграла. Этотъ интегралъ слѣдующій:

$$(1) V_n^{(p)} = \int \dots \int x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} (1 - x_1 - \dots - x_n)^{p-1} dx_1 \dots dx_n,$$

гдѣ показатели p, p_1, p_2, \dots, p_n положительны; интегрированіе должно быть распространено на всѣ положительныя значенія n переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющихъ неравенству

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n < 1.$$

Начнемъ съ интегрированія, относительно x_n , дифференціала $x_n^{p_n-1} (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_n)^{p-1} dx_n$, въ которомъ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} нужно разсматривать какъ постоянныя. Предѣлы этого интегрированія суть 0 и $1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}$; положимъ

$$x_n = (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}) t.$$

гдѣ t новая переменная; предѣлы интегрированія относительно t будутъ 0 и 1, и мы будемъ имѣть результатъ

$$(1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1})^{p+p_n-1} \int_0^1 t^{p_n-1} (1-t)^{p-1} dt.$$

Интегралъ относительно t есть ничто иное какъ эйлеровъ интегралъ перваго ряда $B(p_n, p)$; вслѣдствіе этого формула (1) обращается въ

$$(2) \left\{ \begin{aligned} V_n^{(p)} &= B(p_n, p) \\ &\times \int \dots \int x_1^{p_1-1} \dots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} \dots (1 - x_1 - \dots - x_{n-1})^{p+p_n-1} dx_1 \dots dx_{n-1} \end{aligned} \right.$$

гдѣ интегрированіе должно быть распространено на поло-

жительныя значенія $n - 1$ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , удовлетворяющихъ неравенству

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} < 1.$$

На основаніи этого, формула (2) есть ничто иное какъ слѣдующая:

$$(3) \quad V_n^{(p)} = B(p_n, p) V_{n-1}^{(p+p_n)}.$$

Когда $n = 1$, формула (1) приводится къ простому интегралу $\int x_1^{p_1-1} (1-x)^{p-1} dx$, распространенному на значенія x , заключающіяся между 0 и 1; этотъ интегралъ есть ничто иное какъ $B(p_1, p)$. Отсюда слѣдуетъ, что формула (3) существуетъ для $n = 1$, если только символъ V обращается въ единицу, когда нижній индексъ есть нуль. Теперь замѣнимъ въ формулѣ (3) n черезъ 1, 2, 3, ..., n и перемножимъ потомъ полученныя формулы; получимъ

$$V_n^{(p)} = B(p_n, p) B(p_{n-1}, p + p_n) \dots B(p_1, p + p_n + \dots + p_2),$$

или замѣнивъ функціи B ихъ значеніями, выраженными въ Γ , и потомъ упростивъ, получимъ

$$(4) \quad V_n^{(p)} = \frac{\Gamma(p) \Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p + p_1 + p_2 + \dots + p_n)}.$$

Въ случаѣ $p = 1$, интегралъ (1) обращается въ

$$(5) \quad V_n^{(1)} = \int \int \dots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

и онъ распространяется на положительныя значенія переменныхъ, удовлетворяющихъ неравенству $x_1 + x_2 + \dots + x_n < 1$; формула (4), по причинѣ $\Gamma(1) = 1$, обращается въ

$$(6) \quad V_n^{(1)} = \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_n + 1)}.$$

611. Къ предъидущему случаю приводится интегралъ

$$(7) \quad T = \int \int \int \dots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

распространенный на положительныя значенія x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющія неравенству

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\alpha_2} + \dots + \left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} < 1,$$

гдѣ $a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ положительные данные количества. Дѣйствительно, если положимъ

$$\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\alpha_i} = z_i,$$

откуда

$$x_i = a_i z_i^{\frac{1}{\alpha_i}}, \quad dx_i = \frac{a_i}{\alpha_i} z_i^{\frac{1}{\alpha_i} - 1} dz_i,$$

то формула (7) обратится въ

$$T = \frac{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \int \int \dots \int \frac{p_1-1}{z_1^{\alpha_1}} \frac{p_2-1}{z_2^{\alpha_2}} \dots \frac{p_n-1}{z_n^{\alpha_n}} dz_1 dz_2 \dots dz_n$$

и, приложивъ формулу (6),

$$(8) \quad T = \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \Gamma\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \frac{p_2}{\alpha_2} + \dots + \frac{p_n}{\alpha_n} + 1\right)} \frac{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}.$$

Разсмотримъ въ частности тройной интегралъ

$$T = \int \int \int x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dx dy dz,$$

распространенный на всѣ элементы, расположенные въ углѣ образуемомъ положительными направлѣніями трехъ прямоугольныхъ осей и содержащіеся въ эллипсоидѣ, котораго поверхность имѣетъ уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Формула (8), приложенная къ настоящему случаю, дастъ

$$(9) \quad T = \frac{1}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q+r}{2} + 1\right)} a^p b^q c^r.$$

Если сдѣлаемъ $p = q = r = 1$, то формула (9) дастъ объемъ эллипсоида; если предположимъ два изъ трехъ показа-

телей p, q, r равными 1, а третій равнымъ 2, то формула (9) позволитъ опредѣлить координаты *центра тяжести* осьмой части однороднаго эллипсоида; наконецъ также получимъ, въ случаѣ однороднаго эллипсоида, количества, называемыя въ механикѣ *моментами инерции*.

Площадь эллипсоида.

612. Если употребимъ прямоугольныя координаты, то поверхность эллипсоида будетъ имѣть уравненіемъ

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

и формула для опредѣленія поверхности будетъ

$$S = \iint \frac{\sqrt{1 + \frac{c^2 - a^2}{a^2} \frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2 - b^2}{b^2} \frac{y^2}{b^2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx dy.$$

Результатъ интегрированія относительно x или y зависитъ отъ эллиптическихъ функцій; употребленіе полярныхъ координатъ представило бы то-же неудобство; но можно произвести упрощеніе интеграла, взявъ за переменныя такіе углы θ, ψ , чтобы

$$x = a \sin \theta \cos \psi, \quad y = b \sin \theta \sin \psi, \quad z = c \cos \theta,$$

удовлетворяющіе уравненію эллипсоида. Посредствомъ формулъ § 609 найдемъ

$$S = \int \int \sqrt{a^2 b^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta (a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi)} \sin \theta d\theta d\psi,$$

интегрированія производятся отъ $\theta = 0$ до $\theta = \pi$ и отъ $\psi = 0$ до $\psi = 2\pi$. Интегрированіе относительно θ можетъ быть произведено, и тогда выраженіе S приведетъ къ простому интегралу; но интегрированіе, о которомъ мы только-что говорили, вводитъ дуги круга, и результатъ, полученный такимъ образомъ, не имѣетъ той простой формы, которую онъ можетъ принять. Потому-то мы не предпримемъ никакого вычисленія, а употребимъ для рѣшенія вопроса, который мы

имѣемъ въ виду, другой методъ. Способъ, который мы сейчасъ покажемъ, очень замѣчателенъ и онъ можетъ быть употребленъ съ выгодой въ достаточно распространенныхъ случаяхъ.

613. Означимъ черезъ u косинусъ угла, образуемаго касательной плоскостію въ (x, y, z) съ плоскостію xy ; будемъ имѣть

$$u = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

или

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \left(\frac{1}{u^2} - 1\right) \frac{z^2}{c^4} = 0.$$

Если рассматриваемъ u какъ постоянную, то уравненіе (2) представляетъ конусъ втораго порядка, а уравненія (1) и (2), взятые совмѣстно, будутъ принадлежать кривой, которая будетъ геометрическимъ мѣстомъ точекъ эллипсоида, для которыхъ касательная плоскость образуетъ съ плоскостію xy одинъ и тотъ-же уголъ, имѣющій косинусомъ u . Исключивъ z изъ уравненій (1) и (2), будемъ имѣть проекцію этой кривой на плоскость xy ; такимъ образомъ найдемъ

$$(3) \quad \frac{a^2 - (a^2 - c^2) u^2}{a^4 (1 - u^2)} x^2 + \frac{b^2 - (b^2 - c^2) u^2}{b^4 (1 - u^2)} y^2 = 1,$$

уравненіе эллипса, котораго полу-оси соотвѣтственно имѣютъ значенія

$$\frac{a^2 \sqrt{1 - u^2}}{\sqrt{a^2 - (a^2 - c^2) u^2}}, \quad \frac{b^2 \sqrt{1 - u^2}}{\sqrt{b^2 - (b^2 - c^2) u^2}},$$

и котораго цѣлая площадь E , слѣдовательно, будетъ

$$(4) \quad E = \frac{\pi a^2 b^2 (1 - u^2)}{\sqrt{[a^2 - (a^2 - c^2) u^2] [b^2 - (b^2 - c^2) u^2]}}.$$

Теперь пусть dE приращеніе, принимаемое E , когда u увеличивается на du ; часть эллипсоида, расположенная на какой-нибудь сторонѣ плоскости xy и проектирующаяся на поверх-

ность dE , имѣетъ значеніе $\frac{dE}{u}$, и для полученія цѣлой площади S эллипсоида достаточно интегрировать выраженіе $\frac{dE}{u}$ или $\frac{dE}{du} \frac{du}{u}$ отъ $u = 1$ до $u = 0$ и удвоить результатъ; такимъ образомъ, нарушивъ порядокъ предѣловъ и измѣнивъ знакъ интеграла, получимъ

$$(5) \quad S = -2 \int_0^1 \frac{dE}{du} \frac{du}{u}.$$

Намъ не остается ничего болѣе, какъ подставить въ эту формулу значеніе E , полученное изъ уравненія (4), и мы будемъ имѣть площадь эллипсоида, выраженную простымъ интеграломъ; но это выраженіе надлежитъ преобразовать. Для этого мы предположимъ $a > b > c$, причемъ неравенство не исключаетъ равенство, и мы сдѣлаемъ для краткости

$$\frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)} = k^2, \quad c = a \cos \mu,$$

откуда

$$\sqrt{a^2 - c^2} = a \sin \mu, \quad c = b \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu},$$

гдѣ μ уголь, заключающійся между 0 и $\frac{\pi}{2}$; наконецъ, вмѣсто u мы возьмемъ за переменную уголь φ , опредѣляемый формулой

$$u = \frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}} \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sin \mu},$$

и такъ какъ u измѣняется между предѣлами 0 и 1, то уголь φ измѣняется отъ 0 до μ .

На основаніи этого, уравненія (4) и (5) обращаются въ

$$(6) \quad E = \frac{\pi a b \left(1 - \frac{a^2}{a^2 - c^2} \sin^2 \varphi \right)}{\cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

и

$$(7) \quad S = \frac{-2\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \int_0^\mu \frac{dE}{d\varphi} \frac{1}{\sin \varphi} d\varphi.$$

Но посредствомъ уравненія (6) находимъ

$$\frac{dE}{\sin \varphi} = d \frac{E}{\sin \varphi} + \frac{E \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi = d \frac{E}{\sin \varphi} + \pi ab \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \pi ab \frac{a^2}{a^2 - c^2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}};$$

сверхъ того, если возьмемъ дифференціалъ выраженія $\frac{\cos \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi}$, то получимъ

$$d \frac{\cos \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi} = - \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi + \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

и если изъ этого уравненія опредѣлимъ значеніе

$$\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

для подстановленія въ предъидущую формулу, то, принимая во вниманіе значеніе E, получимъ

$$\begin{aligned} & - \frac{2 \sqrt{a^2 - c^2}}{a} \frac{dE}{d\varphi \sin \varphi} d\varphi \\ & = 2 \pi c^2 d \left\{ \frac{\tan \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \mu}}{\tan \mu \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \left[1 + \frac{a^2 (b^2 - c^2)}{c^4} (\sin^2 \varphi - \sin^2 \mu) \right] \right\} \\ & + \frac{2 \pi b}{\sqrt{b^2 - c^2}} \left[(a^2 - c^2) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi + c^2 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right]. \end{aligned}$$

Взявъ интегралъ между предѣлами $\varphi = 0$ и $\varphi = \mu$, получимъ

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} S &= 2 \pi c^2 + \frac{2 \pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \\ &\times \left[(a^2 - c^2) \int_0^\mu \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi + c^2 \int_0^\mu \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Если сдѣлаемъ, согласно означенію Лежандра,

$$(9) \quad \int_0^\mu \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = F(\mu, k), \quad \int_0^\mu \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = E(\mu, k),$$

то найдемъ формулу, данную этимъ знаменитымъ геометромъ, именно

$$(10) \quad S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} [(a^2 - c^2) E(\mu, k) + c^2 F(\mu, k)].$$

Если желаемъ ввести эллиптическій интегралъ второго рода $\int_0^\mu \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$, то тождество

$$\int_0^\mu \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^\mu \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - k^2 \int_0^\mu \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

позволить формулу (8) написать слѣдующимъ способомъ:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} S &= 2\pi c^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \\ &\times \left[\int_0^\mu \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{b^2 - c^2}{b^2} \int \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Въ случаѣ $c = b$ имѣемъ эллипсоидъ вращенія вокругъ малой оси, $k = 0$, а $\mu = \arccos \frac{b}{a}$, и предыдущая формула обращается въ (§ 595)

$$(12) \quad S = 2\pi b^2 + 2\pi \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a}.$$

Если, напротивъ, $a = b$, то мы имѣемъ эллипсоидъ вращенія вокругъ большой оси и $k = 1$, формула (8) дастъ (§ 595)

$$(13) \quad S = 2\pi b^2 + \frac{\pi bc^2}{\sqrt{b^2 - c^2}} \log \frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{b - \sqrt{b^2 - c^2}}.$$

Г Л А В А VI.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОБЫКНОВЕННЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

О дифференціальныхъ уравненіяхъ.

614. Всякое уравненіе, содержащее нѣсколько переменныхъ и въ которое входятъ сверхъ того дифференціалы или частныя производныя какого-нибудь порядка, вообще называется *дифференціальнымъ уравненіемъ*.

Если переменныя, входящія въ дифференціальное уравненіе, зависятъ только отъ одной изъ нихъ, то такое уравненіе есть *обыкновенное дифференціальное уравненіе*.

Напротивъ, когда переменныя дифференціальнаго уравненія зависятъ отъ нѣсколькихъ изъ нихъ, то такое уравненіе называется *уравненіемъ въ частныхъ производныхъ* или *въ полныхъ дифференціалахъ*, смотря по тому, содержатъ-ли они, съ переменными, частныя производныя или полныя дифференціалы тѣхъ изъ этихъ переменныхъ, которыя рассматриваются какъ зависимыя.

Въ этой главѣ мы будемъ заниматься только обыкновенными дифференціальными уравненіями. Такое уравненіе, на основаніи того, что мы сказали, можетъ содержать одну независимую переменную, одну или нѣсколько зависимыхъ переменныхъ и нѣкоторыя производныя этихъ послѣднихъ переменныхъ. Самый высшій порядокъ этихъ производныхъ есть *порядокъ* дифференціальнаго уравненія.

Дифференціальныя уравненія, которые мы будемъ разсматривать бывають вообще въ томъ числѣ, какъ и зависимыя переменныя. Когда это число превышаетъ единицу, то они составляютъ то, что мы называемъ (§ 53) *системою совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій*.

615. Если дано дифференціальное уравненіе какого-нибудь порядка или система такихъ уравненій, всегда можно ее замѣнить системой дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, введя новыя переменныя и увеличивъ число уравненій, такъ, какъ мы уже сказали въ § 70. Дѣйствительно, если означимъ черезъ x независимую переменную, черезъ y одну изъ другихъ переменныхъ и черезъ m самый высшій порядокъ производныхъ отъ y , входящихъ въ данное уравненіе, то положимъ

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \quad \dots, \quad \frac{dy^{(m-2)}}{dx} = y^{(m-1)},$$

и соединимъ эти дифференціальныя уравненія съ данными, написавъ сперва въ этихъ

$$y', y'', \dots, y^{(m-2)}, y^{(m-1)}, \frac{dy^{(m-1)}}{dx}$$

вмѣсто

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}, \frac{d^m y}{dx^m},$$

Равнымъ образомъ, если n есть самый высшій порядокъ производныхъ другой переменной z , входящихъ въ систему, то введемъ въ эту систему новыя уравненія

$$\frac{dz}{dx} = z', \quad \frac{dz'}{dx} = z'', \quad \dots, \quad \frac{dz^{(n-2)}}{dx} = z^{(n-1)}.$$

написавъ сперва

$$z', z'', \dots, z^{(n-1)}, \frac{dz^{(n-1)}}{dx}$$

вмѣсто

$$\frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}, \frac{d^n z}{dx^n},$$

и такимъ образомъ далѣе. Очевидно, что, поступая такимъ образомъ далѣе, мы получимъ систему равнозначущую данной и въ которой не будетъ ни одного уравненія порядка выше перваго.

616. Теперь рассмотримъ систему n разныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, въ которыя входятъ вмѣстѣ съ независимой переменнѣй x , n другихъ переменныхъ y, z, \dots, u, v и производныя $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$. Могутъ представиться два случая: или n данныхъ уравненій опредѣляютъ значенія n производныхъ $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$, которыя будутъ такимъ образомъ данными функциями переменныхъ x, y, z, \dots, u, v ; или можно будетъ, посредствомъ соединенія данныхъ уравненій, образовать извѣстное число i уравненій, содержащихъ только однѣ переменныя x, y, z, \dots, u, v , которыя и можно будетъ взять вмѣсто i уравненій системы. Второ́й случай, какъ мы видимъ, есть тотъ, когда система состоитъ изъ $n - i$ дифференціальныхъ уравненій, соединенныхъ съ i уравненіями между однѣми переменными; этотъ случай можно привести къ первому посредствомъ исключенія i переменныхъ. Дѣйствительно, i уравненій между x, y, z, \dots, u, v опредѣляютъ i переменныхъ y, z, \dots, u, v въ функціи другихъ; если ихъ значенія подставимъ въ $n - i$ остальныхъ уравненій, то получимъ систему $n - i$ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка между переменнѣй x и $n - i$ другими переменными.

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ случаи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій приводятся къ случаю нѣкотораго числа n дифференціальныхъ уравненій перваго порядка между $n + 1$ переменными, опредѣляющихъ значенія производныхъ отъ n зависимыхъ переменныхъ въ функціи всѣхъ переменныхъ. Если здѣсь отбросимъ трудности исключенія, то уравненія системы будутъ имѣть видъ

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z, \dots, u, v),$$

$$\frac{dz}{dx} = f_1(x, y, z, \dots, u, v),$$

.....,

$$\frac{du}{dx} = f_{n-2}(x, y, z, \dots, u, v),$$

$$\frac{dv}{dx} = f_{n-1}(x, y, z, \dots, u, v),$$

гдѣ f, f_1, \dots, f_{n-1} опредѣленные функции x, y, z, \dots, u, v .

Въ томъ случаѣ, когда число переменныхъ есть 2, система приводится къ одному дифференціальному уравненію

$$\frac{dy}{dx} = f(x, z).$$

Объ интегральныхъ уравненіяхъ.

617. Пусть

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

дифференціальное уравненіе перваго порядка между переменными x и y . Дальше будетъ доказано, что, если функция $f(x, y)$ остается непрерывной для значеній x и y , заключенныхъ между извѣстными предѣлами, и если x_0 и y_0 означаютъ значенія, выбранныя по произволу между предѣлами, о которыхъ мы только-что говорили, существуетъ такая функция $F(x, x_0, y_0)$, которая для $x = x_0$ обращается въ y_0 и которая обладаетъ еще тѣмъ свойствомъ, что уравненіе (1) удовлетворяется, когда положимъ

$$(2) \quad y = F(x, x_0, y_0);$$

мы увидимъ далѣе, сверхъ того, что существуетъ только одна функция $F(x, x_0, y_0)$, обладающая этимъ свойствомъ.

Уравненіе (2) называется *общимъ интеграломъ* уравненія (1); здѣсь можно разсматривать x_0 какъ какое-нибудь опредѣленное значеніе, и y_0 какъ произвольную постоянную.

Если какимъ-нибудь способомъ получили уравненіе

$$(3) \quad \Phi(x, y, C) = 0$$

между переменными x, y и произвольной постоянной C такое, что мы можем изъ него вывести значеніе y , удовлетворяющее уравненію (1), то уравненіе (3) будетъ тождественно съ общимъ интеграломъ, потому что можно будетъ такъ опредѣлить постоянную C , чтобы

$$\Phi(x_0, y_0, C) = 0,$$

и слѣдовательно, значеніе y , выведенное изъ уравненія (3), обратится для $x = x_0$ въ y_0 .

Такъ какъ уравненіе (1) должно быть тождествомъ, когда замѣняемъ въ немъ y и $\frac{dy}{dx}$ значеніями, полученными изъ уравненій

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

то очевидно, что оно происходитъ отъ исключенія постоянной C изъ этихъ же уравненій, откуда слѣдуетъ, что дифференціальныя уравненія перваго порядка имѣютъ всѣ одно и то же начало (§ 51).

618. Разсмотримъ теперь какую-нибудь систему n дифференціальныхъ уравненій перваго порядка между $n+1$ переменныхъ x, y, z, \dots, u, v , именно:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z, \dots, u, v), \\ \frac{dz}{dx} = f_1(x, y, z, \dots, u, v), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dv}{dx} = f_{n-1}(x, y, z, \dots, u, v). \end{cases}$$

Если вторыя части этихъ уравненій суть непрерывныя функции, когда переменныя заключаются между извѣстными предѣлами, и если $x_0, y_0, z_0, \dots, u_0, v_0$ означаютъ произвольныя количества, соотвѣтственно заключенныя между тѣми же предѣлами, то существуетъ, какъ мы увидимъ далѣе, система функций F, F_1, \dots, F_{n-1} переменной x и количествъ $x_0, y_0, z_0, \dots, u_0, v_0$, обращающихся для $x = x_0$

соотвѣтственно въ $y_0, z_0, \dots, u_0, v_0$ и обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что уравненія системы (1) удовлетворяются, когда сдѣлаемъ

$$(2) \quad \begin{cases} y = F(x, x_0, y_0, z_0, \dots, u_0, v_0), \\ z = F_1(x, x_0, y_0, z_0, \dots, u_0, v_0), \\ \dots\dots\dots \\ v = F_{n-1}(x, x_0, y_0, z_0, \dots, u_0, v_0); \end{cases}$$

сверхъ того система функцій F, F_1, \dots, F_{n-1} единственная.

Система (2) составляетъ *систему общихъ интеграловъ*, уравненій (1) или *интегральную систему* системы (1); для x_0 можно брать определенное значеніе, выбранное по произволу; $y_0, z_0, \dots, u_0, v_0$ суть n произвольныя постоянныя.

Если получили какимъ-нибудь способомъ систему n уравненій между переменными x, y, z, \dots, u, v и n произвольными постоянными $C, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$, именно

$$(3) \quad \begin{cases} \Phi(x, y, z, \dots, u, v, C, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0, \\ \Phi_1(x, y, z, \dots, u, v, C, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_{n-1}(x, y, z, \dots, u, v, C, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0, \end{cases}$$

и если можемъ опредѣлить изъ этихъ уравненій значенія y, z, \dots, u, v , способныя удовлетворять уравненіямъ (1), то система (3) будетъ тождественна интегральной системѣ, если только мы можемъ дать постояннымъ C, C_1, \dots, C_{n-1} такія значенія, чтобы y, z, \dots, u, v , когда дѣлаемъ $x = x_0$, приводились къ произвольнымъ значеніямъ $y_0, z_0, \dots, u_0, v_0$.

Очевидно, что это послѣднее условіе будетъ выполнено, если уравненія (3) опредѣлятъ для C, C_1, \dots, C_{n-1} опредѣленные значенія функции переменныхъ x, y, z, \dots, u, v , именно

$$(4) \quad \begin{cases} C = \Psi(x, y, z, \dots, u, v), \\ C_1 = \Psi_1(x, y, z, \dots, u, v), \\ \dots\dots\dots \\ C_{n-1} = \Psi_{n-1}(x, y, z, \dots, u, v). \end{cases}$$

Система уравненій (4) есть ничто иное, какъ интеграль-

ная система, представленная въ частномъ видѣ; уравненія, составляющія ее, содержатъ только одну произвольную постоянную; каждое изъ этихъ уравненій называется *интеграломъ* системы (1).

Коши первый строго доказалъ существованіе интегральныхъ уравненій, но доказательство, данное имъ этой основной теоремѣ, отличается чрезвычайной сложностію. Эта же теорема была доказана потомъ очень простымъ способомъ, посредствомъ очень различныхъ разсмотрѣній Бріо и Буке. Мы изложимъ здѣсь анализъ, опубликованный этими геометрами въ запискахъ, составляющихъ часть XXXVI-го выпуска *Journal de l'Ecole Polytechnique*; этотъ анализъ основывается на нѣкоторыхъ леммахъ, принадлежащихъ Коши, которыя мы сейчасъ изложимъ.

Предварительныя предложенія.

619. Л Е М М А I. — Пусть x_0 опредѣленная постоянная, $x = x_0 + re^{i\omega\sqrt{-1}}$ переменная, $f(x)$ вполне опредѣленная функция этой переменной, остающаяся непрерывной и имѣющая опредѣленную производную, пока модуль r не превышаетъ предѣла R ; если M означаетъ максимумъ значений, принимаемыхъ модулемъ $f(x)$, когда заставляемъ r измѣняться отъ 0 до R и ω отъ 0 до 2π , то будемъ имѣть

$$\text{mod} \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right]_0 < 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \frac{M}{R^n},$$

гдѣ $\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right]_0$ есть значеніе, принимаемое n -ой производной $f(x)$ для $x = x_0$.

Въ самомъ дѣлѣ имѣемъ (§ 500)

$$\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right]_0 = 1 \cdot 2 \cdot \dots n R^{-n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-n\omega\sqrt{-1}} f(x_0 + Re^{i\omega\sqrt{-1}}) d\omega;$$

такъ какъ модуль дифференціального элемента

$$e^{-n\omega\sqrt{-1}} f(x_0 + Re^{i\omega\sqrt{-1}}) d\omega$$

не превышаетъ $M d\omega$, то очевидно, что модуль интеграла

не может превышать $\int_0^{2\pi} M d\omega$, т. е. $2\pi M$, что и доказывает изложенное предположение.

620. ЛЕММА II. — Пусть x_0, y_0, z_0, \dots — *определенных постоянных*, $x = x_0 + \rho e^{\omega \sqrt{-1}}$, $y = y_0 + \rho' e^{\omega' \sqrt{-1}}$, $z = z_0 + \rho'' e^{\omega'' \sqrt{-1}}$, ... *т переменных*, $f(x, y, z, \dots)$ *определенная функция, остающаяся непрерывной и имьющая определенную производную, относительно каждой переменной, пока модули $\rho, \rho', \rho'', \dots$ не превышают соответственных предельных R, R', R'', \dots ; если M означает максимум значений, принимаемых модулем $f(x, y, z, \dots)$, когда $\rho, \rho', \rho'', \dots$ заставляют изменяться от 0 до R , от 0 до R' , от 0 до R'' , ... , и углы $\omega, \omega', \omega'', \dots$ от 0 до 2π , то будем иметь.*

$$\text{mod} \left(\frac{\partial^{n+n'+n''+\dots} f(x, y, z, \dots)}{\partial x^n \partial y^{n'} \partial z^{n''} \dots} \right)_0 < (1.2 \dots n) (1.2 \dots n') \dots \frac{M}{R^n R'^{n'} R''^{n''} \dots};$$

где индекс 0 показывает, что нужно заместить x, y, z, \dots после дифференцирования через x_0, y_0, z_0, \dots .

В самом деле, если приложимъ къ $f(x, y, z, \dots)$, рассматриваемой какъ функция одной переменной x , формулу, изложенную въ леммѣ I, то будемъ имѣть

$$\frac{R^n}{1.2 \dots n} \frac{\partial^n f(x, y, z, \dots)}{\partial x^n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-n\omega \sqrt{-1}} f(x + R e^{\omega \sqrt{-1}}, y, z, \dots) d\omega,$$

гдѣ x долженъ быть замѣщенъ черезъ x_0 . Взявъ дифференціалъ n' разъ относительно y , получимъ

$$\frac{R^n}{1.2 \dots n'} \frac{\partial^{n+n'} f(x, y, z, \dots)}{\partial x^n \partial y^{n'}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-n\omega \sqrt{-1}} \frac{\partial^{n'} f(x + R e^{\omega \sqrt{-1}}, y, z, \dots)}{\partial y^{n'}} d\omega;$$

сверхъ того, на основаніи формулы, уже употребленной, имѣемъ

$$\begin{aligned} & \frac{R'^{n'}}{1.2 \dots n'} \frac{\partial^{n'} f(x + R e^{\omega \sqrt{-1}}, y, z, \dots)}{\partial y^{n'}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-n'\omega' \sqrt{-1}} f(x + R e^{\omega \sqrt{-1}}, y + R' e^{\omega' \sqrt{-1}}, z, \dots) d\omega', \end{aligned}$$

гдѣ нужно сдѣлать не только $x = x_0$, но еще $y = y_0$; по-

этому будемъ имѣть

$$\frac{R^n}{1.2 \dots n} \frac{R'^{n'}}{1.2 \dots n'} \frac{\partial^{n+n'} f(x, y, z, \dots)}{\partial x^n \partial y^{n'}} \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-(n\omega + n'\omega')\sqrt{-1}} f(x + Re^{\omega\sqrt{-1}}, y + R'e^{\omega'\sqrt{-1}}, z, \dots) d\omega d\omega',$$

гдѣ должны сдѣлать $x = x_0$, $y = y_0$.

Очевидно, что, поступая такимъ образомъ, получимъ формулу

$$\frac{R^n}{1.2 \dots n} \frac{R'^{n'}}{1.2 \dots n'} \frac{R''^{n''}}{1.2 \dots n''} \dots \left[\frac{\partial^{n+n'+n''+\dots} f(x, y, z, \dots)}{\partial x^n \partial y^{n'} \partial z^{n''} \dots} \right]_0 \\ = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} e^{-(n\omega + n'\omega' + n''\omega'' + \dots)\sqrt{-1}} \\ \times f(x_0 + Re^{\omega\sqrt{-1}}, y_0 + R'e^{\omega'\sqrt{-1}}, z_0 + R''e^{\omega''\sqrt{-1}}, \dots) d\omega d\omega' d\omega'' \dots,$$

въ которой вторая часть есть кратный интегралъ порядка m ; едва ли нужно прибавлять, что каждое произведение такое, какъ $1.2 \dots n$, должно обращаться въ единицу, когда $n = 0$.

Теперь каждый элементъ кратнаго интеграла имѣетъ модуль меньше или самое большее равный $M d\omega d\omega' d\omega'' \dots$; поэтому модуль второй части предыдущей формулы не можетъ превышать

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} M d\omega d\omega' d\omega'' \dots,$$

т. е. M , что и доказываетъ изложенное предложеніе.

621. ЛЕММА III. Если условія тѣ же, что и въ предыдущей леммѣ, то всѣ частныя производныя функции

$$\varphi(x, y, z, \dots) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right) \left(1 - \frac{y - y_0}{R'}\right) \left(1 - \frac{z - z_0}{R''}\right) \dots}$$

имѣютъ для $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, . . . значенія, соответственно равныя предѣламъ значеній, данныхъ по леммѣ II модулямъ соответственныхъ частныхъ производныхъ функции $f(x, y, z, \dots)$.

Дѣйствительно, взявъ дифференціалъ функции $\varphi(x, y, z, \dots)$ n разъ относительно x , потомъ n' разъ относительно y , по-

томъ n'' разъ относительно z , потомъ . . . , получимъ

$$\frac{\partial^{n+n'+n''+\dots} \varphi(x, y, z, \dots)}{\partial x^n \partial y^{n'} \partial z^{n''} \dots} \\ = (1 \cdot 2 \dots n) (1 \cdot 2 \dots n') (1 \cdot 2 \dots n'') \dots R^{-n} R'^{-n'} R''^{-n''} \dots \\ \times \frac{M}{\left(1 - \frac{x-x_0}{R}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{y-y_0}{R'}\right)^{n'+1} \left(1 - \frac{z-z_0}{R''}\right)^{n''+1} \dots}$$

сдѣлавъ $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, . . . , получимъ

$$\left[\frac{\partial^{n+n'+n''+\dots} \varphi(x, y, z, \dots)}{\partial x^n \partial y^{n'} \partial z^{n''} \dots} \right]_0 \\ = (1 \cdot 2 \dots n) (1 \cdot 2 \dots n') (1 \cdot 2 \dots n'') \dots \frac{M}{R^n R'^{n'} R''^{n''} \dots}$$

Доказательство существованія общаго интеграла дифференціального уравненія перваго порядка съ двумя переменными.

622. ТЕОРЕМА. — Пусть будутъ x_0 , y_0 два произвольныя, выбранныя по произволу, и

$$x = x_0 + \rho e^{\omega \sqrt{-1}}, \quad y = y_0 + \rho' e^{\omega' \sqrt{-1}}$$

два переменныя; если $f(x, y)$ есть определенная функция отъ x и отъ y , остающаяся непрерывной, пока ρ и ρ' не переходятъ соотвѣтственныхъ предѣловъ R , R' , и если въ то же время производныя $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ — определенные, то существуетъ функция y отъ x , остающаяся непрерывной, пока модуль $x - x_0$ не меньше некотораго предѣла r , обращающаяся въ y_0 для $x = x_0$ и наконецъ удовлетворяющая дифференціальному уравненію

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Всякая функция y отъ x , остающаяся непрерывной для значеній $x - x_0$, которыхъ модуль меньше даннаго количества r и имѣющая определенную производную, разлагается въ сходящійся рядъ, расположенный по цѣлымъ степенямъ $x - x_0$; поэтому имѣемъ (§ 383)

$$(2) \quad y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots,$$

гдѣ $y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \dots$ суть значенія $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ отвѣчающія $x = x_0$

Если такая функція y способна удовлетворить уравненію (1), то коэффициенты $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \dots$ будутъ опредѣлены въ функціи x_0 и y_0 посредствомъ уравненія (1), соединеннаго съ тѣми, которыя получаютъ изъ него посредствомъ дифференцированія, именно:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}, \\ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2y}{dx^2}, \\ \dots \end{cases}$$

Сдѣлавъ $x = x_0, y = y_0$, будемъ имѣть послѣдовательно посредствомъ уравненій (3) значенія $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \dots$; отсюда слѣдуетъ, что функція y , если она существуетъ, единственна.

На основаніи этого, чтобы доказать изложенную теорему, достаточно доказать: 1) что, если коэффициенты $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \dots$ опредѣлены посредствомъ уравненій (3), рядъ, содержащійся во второй части формулы (2), сходящійся, пока модуль $x - x_0$ остается меньше нѣкотораго количества r , для котораго случая рядъ имѣетъ суммой непрерывную функцію (§ 475); 2) что функція y , опредѣленная той же формулой (2), удовлетворяетъ дѣйствительно уравненію (1).

Въ самомъ дѣлѣ, означимъ черезъ M maximum модуля значеній, принимаемыхъ $f(x, y)$, когда заставляемъ ρ измѣняться отъ 0 до R , ρ' отъ 0 до R' и углы ω, ω' отъ 0 до 2π . Положимъ сверхъ того

$$(4) \quad \varphi(x, Y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right) \left(1 - \frac{Y - y_0}{R'}\right)},$$

и рассмотримъ дифференціальное уравненіе

$$(5) \quad \frac{dY}{dx} = \varphi(x, Y).$$

Я говорю, что существуетъ функція Y отъ x , остающаяся непрерывной, пока модуль $x - x_0$ не перейдетъ черезъ извѣстный предѣлъ, обращающаяся въ y_0 для $x = x_0$ и удовлетворяющая уравненію (5). Дѣйствительно, уравненіе (5) можетъ быть написано такъ:

$$\left(1 - \frac{Y - y_0}{R'}\right) \frac{dY}{dx} - \frac{M}{1 - \frac{x - x_0}{R}} = 0,$$

и очевидно, что оно получается отъ дифференцированія уравненія

$$(6) \quad (Y - y_0) - \frac{(Y - y_0)^2}{2R'} + MR \log \left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right) = 0.$$

Это уравненіе (6) второй степени относительно $Y - y_0$; оба его корня дѣлаются равными между собой, когда

$$\log \left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right) = -\frac{R'}{2MR} \quad \text{или} \quad x - x_0 = R \left(1 - e^{-\frac{R'}{2MR}}\right).$$

Если поэтому положимъ

$$r = R \left(1 - e^{-\frac{R'}{2MR}}\right),$$

то тотъ изъ корней Y уравненія (6), который для $x = x_0$ обращается въ y_0 , будетъ оставаться непрерывной функціей отъ x , пока модуль $x - x_0$ будетъ меньше r . Такимъ образомъ, для такихъ значеній x имѣемъ

$$(7) \quad Y = y_0 + \left(\frac{dY}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

Коэффициенты $\left(\frac{dY}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0$, \dots этого разложенія получаются, если сдѣлаемъ $x = x_0$, $Y = y_0$ въ системѣ, образованной изъ уравненія (5) и уравненій, которыя получимъ отъ дифференцированія его, именно:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dY}{dx} = \varphi(x, Y), \\ \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \frac{dY}{dx}, \\ \frac{d^3 Y}{dx^3} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial Y} \frac{dY}{dx} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \frac{d^2 Y}{dx^2}, \\ \dots \end{cases}$$

Сверхъ того, изъ уравненія (4) имѣемъ

$$\frac{R^n}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{R'^{n'}}{1 \cdot 2 \dots n'} \frac{\partial^{n+n'} \varphi}{\partial x^n \partial Y^{n'}} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{Y - y_0}{R'}\right)^{n'+1}},$$

гдѣ произведение $1 \cdot 2 \dots n$ или $1 \cdot 2 \dots n'$ должно обращаться въ единицу, когда n или n' есть нуль; эта формула показываетъ, что всѣ частныя производныя

$$\frac{\partial^{n+n'} \varphi(x, Y)}{\partial x^n \partial Y^{n'}}$$

имѣютъ для $x = x_0$, $Y = y_0$ положительныя значенія; слѣдовательно, вслѣдствіе формулъ (8), количества

$$\left(\frac{dY}{dx} \right)_0, \quad \left(\frac{d^2 Y}{dx^2} \right)_0, \quad \dots$$

также положительныя.

Означимъ черезъ A максимумъ модуля значеній, принимаемыхъ функцией Y , когда модуль ρ переменнѣй $x - x_0$ заставляемъ измѣняться отъ 0 до r и аргументъ ω отъ 0 до 2π ; на основаніи леммы I (§ 619) будемъ имѣть

$$(9) \quad \left(\frac{d^n Y}{dx^n} \right)_0 < 1 \cdot 2 \dots n \frac{A}{r^n}.$$

Сравнимъ теперь между собой двѣ системы уравненій (3) и (8), въ которыхъ мы предположимъ $x = x_0$, $Y = y = y_0$. Первое уравненіе системы (3) и первое системы (8) показываютъ намъ, что на основаніи леммы II (§ 620)

$$\text{mod} \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 < \left(\frac{dY}{dx} \right)_0.$$

Потомъ мы видимъ (лемма III § 621), что модули обоихъ членовъ второй части втораго уравненія (3) соотвѣтственно

меньше членовъ второй части втораго уравненія (8), которые и тотъ и другой положительные; отсюда слѣдуетъ, что

$$\text{mod} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0 < \left(\frac{d^2 Y}{dx^2} \right)_0;$$

поступая такимъ образомъ далѣе, найдемъ, что вообще

$$\text{mod} \left(\frac{d^n y}{dx^n} \right)_0 < \left(\frac{d^n Y}{dx^n} \right)_0,$$

и, по причинѣ неравенства (9),

$$(10) \quad \text{mod} \left(\frac{d^n y}{dx^n} \right)_0 < 1 \cdot 2 \dots n \frac{A}{r^n}$$

или

$$\text{mod} \left[\left(\frac{d^n y}{dx^n} \right)_0 \frac{(x - x_0)^n}{1 \cdot 2 \dots n} \right] < A \times \text{mod} \left(\frac{x - x_0}{r} \right)^n.$$

Если модуль $x - x_0$ меньше r , то геометрическая прогрессія, которой общій членъ есть $A \times \text{mod} \left(\frac{x - x_0}{r} \right)^n$, сходящаяся; поэтому рядъ, образованный изъ модулей членовъ ряда (2), въ томъ же предположеніи, есть сходящійся (§ 97); слѣдовательно, рядъ (2) также сходящійся (§ 363) и онъ имѣетъ суммой опредѣленную и непрерывную функцію y . Нужно замѣтить, что неравенство (10) доказываетъ также сходимость ряда, полученнаго отъ дифференцированія членовъ ряда (2) относительно x ; этотъ послѣдній рядъ имѣетъ суммой $\frac{dy}{dx}$.

Намъ остается доказать, что функція y , опредѣляемая формулой (2), вполне удовлетворяетъ уравненію (1).

Съ одной стороны имѣемъ

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

и съ другой

$$f(x, y) = f_0 + f'_0 \frac{x - x_0}{1} + f''_0 \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

Въ этой формулѣ мы пишемъ f_0 вмѣсто $f(x_0, y_0)$ и мы означаемъ черезъ f'_0, f''_0, \dots значенія, принимаемыя для $x = x_0$,

$y = y_0$ частными f', f'', \dots , получаемыми отъ дѣленія полныхъ дифференціаловъ df, d^2f, \dots соотвѣтственно на dx, dx^2, \dots . Количества f', f'', \dots опредѣляются уравненіями

$$(11) \quad \begin{cases} f' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}, \\ f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2 y}{dx^2}, \\ \dots \end{cases}$$

Чтобы получить f'_0, f''_0, \dots , нужно здѣсь сдѣлать $x = x_0$, $y = y_0$ и замѣнить $\left(\frac{dy}{dx} \right)_0, \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0, \dots$ значеніями, полученными изъ уравненій (3). Но мы видимъ, что вторыя части уравненій (11) и уравненій (3) тождественны между собой, если только не принимать во вниманіе первое уравненіе системы (3); поэтому имѣемъ

$$f'_0 = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0, \quad f''_0 = \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_0, \quad \dots,$$

и, слѣдовательно, функція (2) вполне удовлетворяетъ уравненію (1).

Доказательство существованія интегральной системы дифференціаль-ныхъ уравненій перваго порядка.

623. Бріо и Буке распространили свой анализъ на случай какой угодно системы совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, и они доказали эту новую теорему:

ТЕОРЕМА. — Пусть $x_0, y_0, z_0, \dots, t+1$ постоянныхъ, выбранныхъ по произволу и

$$x = x_0 + \rho e^{\omega \sqrt{-1}}, \quad y = y_0 + \rho' e^{\omega' \sqrt{-1}}, \quad z = z_0 + \rho'' e^{\omega'' \sqrt{-1}}, \quad \dots$$

$t+1$ переменныхъ. Если t функций

$$f(x, y, z, \dots), f_1(x, y, z, \dots), f_2(x, y, z, \dots), \dots$$

остаются непрерывными, пока ρ, ρ', ρ'' не переходятъ чрезъ соотвѣтственные предѣлы R, R', R'', \dots и если они допускаютъ въ то же время опредѣленные производныя относительно

каждой переменной, то существует n функций y, z, \dots переменной x , остающихся непрерывными, пока модуль $x - x_0$ остается меньше некоторого предѣла r , обращающихся для $x = x_0$ соответственно въ y_0, z_0, \dots и удовлетворяющихъ n совместнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z, \dots), \quad \frac{dz}{dx} = f_1(x, y, z, \dots), \dots$$

Означимъ черезъ M, M_1, \dots максимума модулей значеній, принимаемыхъ функціями $f(x, y, z, \dots), f_1(x, y, z, \dots), \dots$ когда измѣняемъ $\rho, \rho', \rho'', \dots$ отъ 0 до R , отъ 0 до R' , отъ 0 до R'' , ... и углы $\omega, \omega', \omega''$ отъ 0 до 2π ; положимъ

$$\varphi(x, Y, Z, \dots) = \frac{1}{\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right) \left(1 - \frac{Y - y_0}{R'}\right) \left(1 - \frac{Z - z_0}{R''}\right) \dots}$$

и рассмотримъ n совместныхъ уравненій

$$(2) \quad \frac{dY}{dx} = M \varphi(x, Y, Z, \dots), \quad \frac{dZ}{dx} = M_1 \varphi(x, Y, Z, \dots), \dots$$

Можно найти функціи Y, Z, \dots , удовлетворяющія уравненіямъ (2) и обращающіяся соотвѣтственно въ y_0, z_0, \dots для $x = x_0$. Дѣйствительно, если положимъ

$$(3) \quad Y - y_0 = MS, \quad Z - z_0 = M_1 S, \quad \dots,$$

потомъ если опредѣлимъ функцію S такъ, чтобы она уничтожалась для $x = x_0$ и чтобы она удовлетворяла уравненію

$$(4) \quad \frac{dS}{dx} = \varphi(x, y_0 + MS, z_0 + M_1 S, \dots),$$

то очевидно, что уравненія (2) сдѣлаются тождественными. Уравненіе (4) можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left(1 - \frac{MS}{R'}\right) \left(1 - \frac{M_1 S}{R''}\right) \dots \frac{dS}{dx} - \frac{1}{1 - \frac{x - x_0}{R}} = 0$$

или

$$\left[1 - \left(\frac{M}{R'} + \dots\right) S + \left(\frac{MM_1}{R'R''} + \dots\right) S^2 - \dots\right] \frac{dS}{dx} - \frac{1}{1 - \frac{x - x_0}{R}} = 0,$$

оно же получается отъ дифференцированія слѣдующаго:

$$(5) \left[S - \left(\frac{M}{R'} + \dots \right) \frac{S^2}{2} + \left(\frac{MM_1}{R'R''} + \dots \right) \frac{S^3}{3} - \dots \right] + R \log \left(1 - \frac{x - x_0}{R} \right) = 0.$$

Пусть r наименьшій изъ модулей, который нужно дать $x - x_0$, чтобы уравненіе (5) имѣло два корня S , равные между собой. Пока модуль $x - x_0$ будетъ меньше r , то тотъ изъ корней S , который уничтожается для $x - x_0$, будетъ непрерывной функціей отъ x , разлагаемой въ сходящійся рядъ, расположенный по цѣлымъ степенямъ $x - x_0$; сверхъ того, если означимъ черезъ A *максимум* модуля этой функціи S для значеній ρ и ω , соотвѣтственно заключенныхъ между 0 и r , 0 и 2π , то будемъ имѣть (§ 619)

$$(6) \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \left(\frac{d^n S}{dx^n} \right)_0 < \frac{A}{r^n}.$$

Наконецъ очевидно, что функціи Y, Z, \dots которыя пропорціональны S , разлагаются въ одно время съ этой функціей въ сходящіеся ряды, расположенные по цѣлымъ степенямъ $x - x_0$.

Теперь, на основаніи леммы III § 621, значенія модулей, которыя принимаютъ функціи $f(x, y, z, \dots)$, $f_1(x, y, z_0), \dots$ для $x = x_0, y = y_0, z = z_0, \dots$, соотвѣтственно меньше значеній производныхъ функцій $M_\varphi(x, Y, Z, \dots)$, $M_1\varphi(x, Y, Z, \dots)$ для $x = x_0, Y = y_0, Z = z_0, \dots$. Слѣдовательно, если сравнимъ систему, образованную изъ уравненій (1) и уравненій, полученныхъ отъ дифференцированія ея съ системой, образованной изъ уравненій (2) и уравненій, полученныхъ отъ дифференцированія ея, то найдемъ, какъ въ § 622, что, значенія

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_0, \left(\frac{dz}{dx} \right)_0, \dots, \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0, \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right)_0, \dots,$$

найденныя изъ первыхъ уравненій, имѣютъ модули соотвѣтственно меньше дѣйствительныхъ и положительныхъ значеній

$$\left(\frac{dY}{dx} \right)_0, \left(\frac{dZ}{dx} \right)_0, \dots, \left(\frac{d^2 Y}{dx^2} \right)_0, \left(\frac{d^2 Z}{dx^2} \right)_0, \dots$$

данныхъ уравненіями второй системы. Поэтому, по причинѣ формулъ (3) и неравенства (6), имѣемъ

$$\begin{aligned} \text{mod} \left[\left(\frac{d^n y}{dx^n} \right)_0 \frac{(x - x_0)^n}{1 \cdot 2 \dots n} \right] &< MA \times \text{mod} \left(\frac{x - x_0}{r} \right)^n, \\ \text{mod} \left[\left(\frac{d^n z}{dx^n} \right)_0 \frac{(x - x_0)^n}{1 \cdot 2 \dots n} \right] &< M_1 A \times \text{mod} \left(\frac{x - x_0}{r} \right)^n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Слѣдовательно, ряды

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots \\ z &= z_0 + \left(\frac{dz}{dx} \right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

сходящіеся, пока $\text{mod} (x - x_0) < r$. Эти ряды опредѣляютъ функціи y, z, \dots , остающіяся непрерывными для значеній x , о которыхъ идетъ рѣчь, и разсужденіе, употребленное въ § 622, доказываетъ, что функціи y, z, \dots дѣйствительно удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ.

624. З а м ѣ ч а н і е. — Очевидно возможно въ предыдущемъ доказательствѣ замѣнить модули R', R'', \dots самымъ малымъ изъ нихъ R , и *maxima* M, M_1, \dots самымъ большимъ изъ нихъ M . Уравненія (4) и (5) въ этомъ случаѣ обратятся въ

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{M}{R} S \right)^m \frac{dS}{dx} - \frac{1}{1 - \frac{x - x_0}{R}} &= 0, \\ \frac{R}{(m+1)M} \left[1 - \left(1 - \frac{M}{R} S \right)^{m+1} \right] + R \log \left(\frac{x - x_0}{R} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Производная относительно S этого послѣдняго уравненія даетъ $1 - \frac{M}{R} S = 0$; поэтому въ случаѣ двухъ равныхъ корней имѣемъ

$$\frac{R}{(m+1)M} + R \log \left(1 - \frac{x - x_0}{R} \right) = 0,$$

откуда

$$x - x_0 = R \left(1 - e^{-\frac{R}{(m+1)MR}} \right),$$

и следовательно, для количества r можно взять

$$r = R \left(1 - e^{\frac{R}{(m+1)MR}} \right).$$

Свойства интеграловъ системы дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

625. Разсмотримъ систему n дифференціальныхъ совмѣстныхъ уравненій между $n + 1$ переменными x, y, z, \dots, v , для которыхъ производныя $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{dv}{dx}$ имѣють опредѣленные значенія. Означимъ черезъ $\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}, \dots, \frac{V}{X}$ эти значенія; дифференціальныя уравненія будутъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{Z}{X}, \quad \dots, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{V}{X},$$

МЫ МОЖЕМЪ ИХЪ СОЕДИНИТЬ ВЪ ОДНУ ФОРМУЛУ; ИМЕННО

$$(1) \quad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \dots = \frac{dv}{V};$$

X, U, Z, \dots, V суть определённые функции переменных x, y, z, \dots, v , исключая одной из них, которая может быть выбрана по произволу.

Такъ какъ существованіе интегральной системы доказано, то предположимъ, какъ въ § 618, что уравненія этой системы рѣшены относительно n постоянныхъ произвольныхъ C, C_1, \dots, C_{n-1} , которыя онѣ содержатъ, и выразимъ ихъ черезъ

[illegible]

Дифференцирование уравнений (2) уничтожает произвольныя C, C_1, \dots, C_{n-1} , и слѣдовательно, уравненія, происшедшія отъ этого дифференцированія, образуютъ систему

равнозначущую системѣ (1). Другими словами, когда для dx, dy, dz, \dots беремъ количества пропорціональныя X, Y, Z, \dots , тождественно имѣемъ

$$(3) \quad d\Psi = 0, \quad d\Psi_1 = 0, \quad \dots, \quad d\Psi_{n-1} = 0.$$

Мы сказали (§ 618), что каждое изъ уравненій (2) называется интеграломъ системы (1); но такъ какъ соединенія которыя можно дѣлать съ этими уравненіями, способны ихъ замѣнить, то мы вообще назовемъ *интеграломъ* системы (1) всякое уравненіе

$$(4) \quad \Pi(x, y, z, \dots, v) = \Gamma,$$

котораго вторая часть есть произвольная постоянная Γ и котораго первая часть есть такая функція Π только однѣхъ переменныхъ x, y, z, \dots , что дифференціалъ $d\Pi$ тождественно обращается въ нуль, когда беремъ для дифференціаловъ dx, dy, dz, \dots , количества пропорціональныя X, Y, Z, \dots .

Очевидно, мы образуемъ такое уравненіе, если приравняемъ постоянной Γ какую-нибудь функцію первыхъ частей уравненій (2), потому что, взявъ дифференціалъ уравненія

$$(5) \quad F(\Psi, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}) = \Gamma,$$

будемъ имѣть

$$\frac{\partial F}{\partial \Psi} d\Psi + \frac{\partial F}{\partial \Psi_1} d\Psi_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial \Psi_{n-1}} d\Psi_{n-1} = 0,$$

это же уравненіе удовлетворяется по причинѣ формулъ (3), имѣющихъ мѣсто, когда предполагаемъ уравненія (1).

Но нетрудно доказать сверхъ того, что, если уравненіе (4) есть интегралъ системы (1), оно необходимо имѣетъ видъ (5). Дѣйствительно, предположимъ, что X не есть нуль; такъ какъ $\Psi, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$ функціи $n+1$ переменныхъ x, y, z, \dots, v , то возможно рассматривать y, z, \dots, v какъ функціи отъ x и отъ $\Psi, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$, потому что, по предположенію, система (2) одинакова съ интегральной системой. Уравненіе (4) приметъ поэтому форму

$$F(x, \Psi, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}) = \Gamma;$$

дифференцирование даетъ

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial \Psi} d\Psi + \frac{\partial F}{\partial \Psi_1} d\Psi_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial \Psi_{n-1}} d\Psi_{n-1} = 0,$$

по причинѣ же уравненій (3) имѣемъ просто

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

это же выражаетъ, что функція F не зависитъ отъ x . Поэтому для системы (1) имѣемъ только n различныхъ интеграловъ,

626. Необходимое и достаточное условіе для того, чтобы уравненіе

$$\Pi(x, y, z, \dots, v) = \text{const.}$$

было интеграломъ системы уравненій

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \dots = \frac{dv}{V},$$

есть то, чтобы въ силу этихъ уравненій тождественно имѣли

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial v} dv = 0;$$

поэтому это условіе есть

$$X \frac{\partial \Pi}{\partial x} + Y \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \dots + V \frac{\partial \Pi}{\partial v} = 0,$$

и мы имѣемъ такое предложеніе:

ТЕОРЕМА I. — Если $\Pi = \text{const.}$ есть интегралъ совместныхъ уравненій

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \dots = \frac{dv}{V},$$

то функція Π удовлетворяетъ тождественно уравненію въ частныхъ производныхъ

$$X \frac{\partial \Pi}{\partial x} + Y \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \dots + V \frac{\partial \Pi}{\partial v} = 0.$$

Обратно, всякая функция Π , удовлетворяющая тождественно уравнению въ частныхъ производныхъ, дастъ, когда ее приравняемъ произвольной постоянной, интегралъ системы совмѣстныхъ уравнений.

На основаніи же того, что мы видѣли въ предъидущемъ параграфѣ, можно высказать такую другую теорему:

Т Е О Р Е М А II. — Если уравненіе въ частныхъ производныхъ

$$X \frac{\partial \Pi}{\partial x} + Y \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \dots + V \frac{\partial \Pi}{\partial v} = 0$$

удовлетворяется, когда беремъ послѣдовательно для Π n различныхъ функций $\Psi, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$, то всякая функция Π , которая удовлетворяетъ тому же уравненію, есть необходимо функция отъ $\Psi, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}$.

Приведеніе системъ дифференціальныхъ уравненій между какимъ-нибудь числомъ переменныхъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ, содержащимъ только двѣ переменныя.

627. Дифференціальное уравненіе какого-нибудь порядка между двумя переменными или, вообще, система n дифференціальныхъ уравненій между $n+1$ переменными приводится, какъ мы видѣли (§ 615) къ системѣ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка. Нетрудно доказать, что, обратно, такая система можетъ быть приведена къ дифференціальнымъ уравненіямъ, содержащимъ только двѣ переменныя.

Пусть будутъ n дифференціальныхъ уравненій

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = Y, \quad \frac{dz}{dx} = Z, \quad \dots, \quad \frac{dv}{dx} = V,$$

гдѣ Y, Z, \dots, V означаютъ данныя функціи $n+1$ переменныхъ x, y, z, \dots, v . Интегральная система содержитъ n произвольныхъ постоянныхъ, и мы можемъ предположить, что уравненія этой системы рѣшены относительно y, z, \dots, v . Рассмотримъ въ частности уравненіе, опредѣляющее y въ функціи x и произвольныхъ; если въ это уравненіе

входятъ n произвольныхъ, то нужно будетъ, для исключенія ихъ, присоединить къ уравненію, о которомъ мы говоримъ, тѣ, которыя получаются отъ n послѣдовательныхъ дифференцированій; поэтому y въ этомъ случаѣ будетъ зависѣть отъ дифференціального уравненія порядка n . Но если выраженіе y въ x содержитъ только i произвольныхъ, гдѣ $i < n$, то очевидно будетъ достаточно i дифференцированій для исключенія постоянныхъ и, слѣдовательно, y будетъ зависѣть только отъ дифференціального уравненія порядка i .

628. Дифференціальное уравненіе, отъ котораго зависитъ y , можетъ быть получено посредствомъ данныхъ уравненій. Дѣйствительно, взявъ дифференціалъ перваго изъ уравненій (1), получимъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{dz}{dx} + \dots + \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{dv}{dx},$$

или, по причинѣ уравненій (1),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial Y}{\partial x} + Y \frac{\partial Y}{\partial y} + Z \frac{\partial Y}{\partial z} + \dots + V \frac{\partial Y}{\partial v};$$

означимъ для краткости вторую часть этого уравненія черезъ Y_1 , получимъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Y_1.$$

Взявъ дифференціалъ этого уравненія и употребивъ уравненія (1), получимъ новое уравненіе

$$\frac{d^3y}{dx^3} = Y_2,$$

гдѣ Y_2 есть извѣстная функція переменныхъ x, y, z, \dots, v . Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы образуемъ систему n уравненій

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = Y, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = Y_1, \quad \dots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = Y_{n-1},$$

которыхъ вторыя части Y, Y_1, \dots, Y_{n-1} суть извѣстныя функціи отъ x, y, z, \dots, v .

Если n уравненій (2) необходимы для исключенія $n - 1$

переменных z, \dots, v , то эти уравнения будутъ определены посредствомъ $n - 1$ первыхъ уравненийъ въ функціи

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

подставивъ же ихъ значенія въ послѣднее уравненіе (2), получимъ дифференціальное уравненіе порядка n

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right).$$

Но можетъ случиться, что достаточно i первыхъ уравненийъ (2) для образованія дифференціального уравненія между x и y . Это дифференціальное уравненіе будетъ, въ этомъ случаѣ, порядка i , и $i - 1$ изъ $n - 1$ переменныхъ z, \dots, v будутъ извѣстны въ функціи $n - i$ другихъ и

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{i-1}y}{dx^{i-1}};$$

въ этомъ случаѣ, если подставимъ значенія этихъ $i - 1$ переменныхъ въ тѣ изъ уравненийъ (1), которыя содержатъ производныя отъ $n - i$ другихъ, то эти послѣднія будутъ опредѣляться системою $n - i$ дифференціальныхъ уравненийъ, аналогичныхъ системѣ (1), съ тою только разницей, что вторыя части будутъ содержать функцію y , опредѣляемую дифференціальнымъ уравненіемъ порядка i , такъ же какъ и $i - 1$ первыхъ производныхъ этой функціи. Поступая съ системою, о которой идетъ рѣчь, такъ, какъ мы поступали съ системою (1), мы сдѣлаемъ новую переменную z зависящей отъ дифференціального уравненія нѣкотораго порядка j , равнаго или меньшаго $n - i$, которое можетъ содержать функцію y и производныя этой функціи только до порядка $i - 1$, потому что производная порядка i выражается производными низшихъ порядковъ. Если число j равно $n - i$, то $n - i - 1$ оставшихся производныхъ будутъ определены въ функціи

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{i-1}y}{dx^{i-1}}, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{j-1}z}{dx^{j-1}};$$

но въ противномъ случаѣ j изъ этихъ переменныхъ могутъ быть только выражены въ функціи предыдущихъ количествъ

и $n - i - j$ оставшихся переменныхъ. Очевидно, продолжая такимъ образомъ далѣе, мы образуемъ систему дифференціальныхъ уравненій, которыхъ порядки будутъ имѣть суммой n ; каждое изъ этихъ уравненій будетъ содержать только одну зависимую переменную, кромѣ тѣхъ, которыя входятъ въ предыдущія уравненія и которыя мы рассматриваемъ, какъ опредѣляемыя этими уравненіями. Что касается переменныхъ, не входящихъ въ дифференціальныя уравненія, о которыхъ идетъ рѣчь, то онѣ опредѣляются въ функціи другихъ переменныхъ и производныхъ отъ этихъ.

629. Чтобы образовать дифференціальное уравненіе, посредствомъ котораго связаны между собой двѣ изъ переменныхъ, входящихъ въ систему совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій, нѣтъ необходимости, чтобы эти уравненія были представлены въ той формѣ, въ которой мы предполагали ихъ въ предыдущемъ параграфѣ. Дифференцированіе и исключеніе приведетъ во всѣхъ случаяхъ къ искомому уравненію.

Рассмотримъ, на примѣръ, два совмѣстныхъ уравненія

$$(1) \quad \begin{cases} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^m y}{dx^m}, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^p z}{dx^p}\right) = 0, \\ F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^q z}{dx^q}\right) = 0, \end{cases}$$

содержащихъ три переменныя x, y, z , изъ которыхъ первая рассматривается какъ независимая. Первое уравненіе, относительно y , порядка m и относительно z — порядка p ; для втораго уравненія порядокъ, относящійся къ y , есть n и порядокъ, относящійся къ z , есть q .

Пусть μ число дифференціальныхъ уравненій, рѣшенныхъ относительно производныхъ, изъ которыхъ составляется дифференціальная система перваго порядка, которую можно замѣнить данной системой (§ 616). На основаніи того, что было сказано въ предыдущемъ параграфѣ, если уравненія (1) опредѣляютъ значенія самой высшей производной отъ y , именно $\frac{d^m y}{dx^m}$ или $\frac{d^n y}{dx^n}$, такъ же какъ самую высшую изъ производныхъ отъ z , именно $\frac{d^p z}{dx^p}$ или $\frac{d^q z}{dx^q}$ въ функціи производ-

ныхъ низшихъ порядковъ и переменныхъ x, y, z , — что очевидно требуетъ того, чтобы разности $m - n, p - q$ не были одного знака, — то число μ будетъ равно самой большей изъ двухъ суммъ $m + q, n + p$; если это не такъ, то μ будетъ меньше этой самой большей суммы.

Теперь, чтобы исключить z , дифференцируемъ данныя уравненія, первое q разъ, второе p разъ; присоединивъ полученныя уравненія къ даннымъ мы, будемъ имѣть систему $p + q + 2$ уравненій. Производныя отъ z будутъ входить въ эту систему до порядка $p + q$, а что касается порядка самой высшей производной отъ y , то онъ будетъ равенъ самому большому изъ чиселъ $m + p, n + p$. Надлежитъ исключить $p + q + 1$ количествъ

$$z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{p+q}z}{dx^{p+q}}$$

изъ $p + q + 2$ уравненій, такимъ образомъ образованныхъ. Если всѣ эти уравненія необходимы для исключенія, то $p + q + 1$ между ними опредѣлятъ значенія $z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{p+q}z}{dx^{p+q}}$, и подстановленіе этихъ величинъ въ послѣднее уравненіе дастъ дифференціальное уравненіе

$$(3) \quad \Phi \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^i y}{dx^i} \right) = 0,$$

котораго порядокъ i будетъ равенъ μ ; въ то же время, какъ мы только-что сказали, будемъ имѣть

$$(4) \quad z = \Psi \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{i-1} y}{dx^{i-1}} \right),$$

гдѣ Ψ есть опредѣленная функція.

Но если $p + q + 2$ уравненій, которыя мы образовали, не должны быть всѣ употреблены для исключенія, то порядокъ i уравненія (3), которое происходитъ отъ этого исключенія, будетъ меньше μ . Въ этомъ случаѣ изъ того, что было сказано въ предъидущемъ параграфѣ, слѣдуетъ, что z не будетъ болѣе опредѣлено въ функціи $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots$; но оно будетъ зависѣть отъ дифференціального уравненія

$$(5) \quad \Pi \left(x, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{\mu-i} z}{dx^{\mu-i}} \right) = 0,$$

порядка $\mu - i$ и въ которое войдетъ, съ $i = 1$ первыми производными, функція y , опредѣляемая уравненіемъ (3).

Объ интегралахъ различныхъ порядковъ дифференціального уравненія какого-нибудь порядка съ двумя переменными.

630. Послѣ того, какъ мы доказали, что всѣ случаи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій приводятся къ системѣ перваго порядка, которой уравненія опредѣляютъ производныя въ функціи переменныхъ, мы показали, что такая система можетъ быть замѣнена, въ свою очередь, однимъ или нѣсколькими дифференціальными уравненіями нѣкотораго порядка, содержащими только двѣ переменныя, но въ которыя входятъ функціи, опредѣляемыя предыдущими уравненіями. Случай дифференціального уравненія какого-нибудь порядка n долженъ быть рассматриваемъ, какъ самый простой; намъ остается представить нѣсколько важныхъ разсмотрѣній по этому предмету.

Пусть будетъ

$$(1) \quad F \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n} \right) = 0$$

дифференціальное уравненіе порядка n между двумя переменными x, y . Если положимъ

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = y'', \quad \dots, \quad \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = y^{(n-1)},$$

то уравненіе (1) опредѣлитъ значеніе $\frac{d^n y}{dx^n}$ или $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$ въ функціи $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$; пусть будетъ Y это значеніе, такъ что имѣемъ

$$(3) \quad \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = Y.$$

Предположимъ, что функція Y выполняетъ условія непрерывности, требуемыя теоріей §§ 622 и § 623; дифференціальная система, образованная изъ совмѣстныхъ уравненій (2) и

(3), допустить интегральную систему, и уравнения этой системы опредѣлять для $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ значенія функции отъ x , которыя для $x = x_0$ обратятся соотвѣтственно въ произвольныя постоянныя $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$. Если означимъ черезъ

$$(4) \quad y = \Phi(x, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$$

то изъ уравненій интегральной системы, которое опредѣляетъ y , то очевидно, что $n-1$ другихъ уравненій этой системы получатся отъ послѣдовательнаго дифференцированія $n-1$ разъ уравненія (4). Это уравненіе (4) называется *общимъ интеграломъ* уравненія (1). И такъ какъ интегральная система совмѣстныхъ уравненій (2) и (3) единственна, то мы видимъ, что:

Если мы нашли какимъ-нибудь способомъ уравненіе

$$(5) \quad f(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

содержащее n постоянныхъ произвольныхъ C_1, C_2, \dots, C_n и изъ котораго можно вывести значеніе y , способное удовлетворить уравненію (1), то уравненіе (5) совпадаетъ съ общимъ интеграломъ этого уравненія (1), если только мы можемъ дать постояннымъ такія значенія, чтобы y и его $n-1$ первыхъ производныхъ принимали данныя произвольныя значенія, когда дадутъ x какое-нибудь значеніе, выбранное по произволу.

Это послѣднее условіе будетъ выполнено, если система, образованная изъ уравненія (5) и тѣхъ, которыя получаютъ изъ него посредствомъ $n-1$ дифференцированій, опредѣляетъ значенія произвольныхъ C_1, C_2, \dots, C_n въ функции

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.$$

631. Мы снова получимъ дифференціальное уравненіе (1), когда исключимъ посредствомъ дифференцированія изъ общаго интеграла (5) произвольныя, которыя оно содержитъ. Предположимъ, что мы желаемъ исключить изъ уравненія (6) только i произвольныхъ, именно

$$C_1, C_2, \dots, C_i;$$

нужно будетъ произвести i дифференцированій, и я говорю, что какимъ бы способомъ я ни сочеталъ дѣйствія дифференцированія и исключенія, полученный результатъ будетъ всегда одинъ и тотъ же. Дѣйствительно, предположимъ, что мы можемъ получить два различныхъ уравненія, не содержащихъ болѣе произвольныхъ C_1, C_2, \dots, C_i . Пусть будутъ

$$\Psi \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^i y}{dx^i}, C_{i+1}, C_{i+2}, \dots, C_n \right) = 0,$$

$$\Psi_1 \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^i y}{dx^i}, C_{i+1}, C_{i+2}, \dots, C_n \right) = 0$$

эти два уравненія. Если они не опредѣляютъ для $\frac{d^i y}{dx^i}$ одного и того же значенія, то можемъ исключить эту производную, и мы получимъ уравненіе самое большее порядка $i - 1$, не тождественное и содержащее $n - i$ произвольныхъ, именно

$$\Pi \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{i-1} y}{dx^{i-1}}, C_{i+1}, C_{i+2}, \dots, C_n \right).$$

Присоединивъ къ этому уравненію тѣ, которыя получаютъ отъ $n - i$ дифференцированій его, будемъ имѣть систему $n - i + 1$ уравненій, изъ которыхъ мы можемъ исключить произвольныя $C_{i+1}, C_{i+2}, \dots, C_n$, и результатъ этого исключенія будетъ не тождественное дифференціальное уравненіе, самое большее порядка $n - 1$ и не содержащее никакой произвольной. Сдѣлавъ $x = x_0$, мы будемъ имѣть соотношеніе между $y_0, \left(\frac{dy}{dx} \right)_0, \dots, \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)_0$, и съ этихъ поръ эти количества не будутъ болѣе произвольными, какъ должно было бы быть.

632. Теперь мы назовемъ *первымъ интеграломъ* или *перваго порядка* дифференціального уравненія порядка n результатъ, полученный отъ исключенія изъ общаго интеграла $n - 1$ произвольныхъ постоянныхъ, которыя оно содержитъ. Число первыхъ интеграловъ, очевидно, равно n ; каждый изъ

этихъ интеграловъ есть дифференціальное уравненіе порядка $n - 1$, содержащее произвольную постоянную. Система n первыхъ интеграловъ составляетъ интегральную систему дифференціальной системы перваго порядка, посредствомъ которой можно замѣнить дифференціальное уравненіе порядка n .

Равнымъ образомъ, мы назовемъ *вторымъ интеграломъ* или *втораго порядка* результатъ, полученный отъ исключенія $n - 2$ произвольныхъ, содержащихся въ общемъ интегралѣ. Число интеграловъ втораго порядка, очевидно, равно числу сочетаній изъ n предметовъ по два, т. е. равно $\frac{n(n-1)}{2}$; каждый изъ этихъ интеграловъ есть дифференціальное уравненіе порядка $n - 2$, содержащее двѣ произвольныхъ постоянныхъ.

Вообще, мы назовемъ *интеграломъ порядка i* дифференціального уравненія порядка n результатъ, полученный отъ исключенія $n - i$ произвольныхъ, содержащихся въ общемъ интегралѣ; число интеграловъ порядка i равно числу сочетаній изъ n предметовъ по i , т. е. равно $\frac{n(n-1) \dots (n-i+1)}{1 \cdot 2 \dots i}$; каждый изъ этихъ интеграловъ есть дифференціальное уравненіе порядка $n - i$, которое содержитъ i произвольныхъ постоянныхъ.

Интегралъ порядка n существуетъ только одинъ, который есть ни что иное, какъ общій интегралъ.

633. Дано дифференціальное уравненіе порядка n

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0;$$

если мы нашли какимъ-нибудь способомъ дифференціальное уравненіе порядка $n - i$

$$\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}}, C_1, C_2, \dots, C_i\right) = 0,$$

содержащее i произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_i и изъ котораго можно получить значеніе $\frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}}$ удовлетворяющее данному уравненію, то можно будетъ послѣднее уравненіе разсматривать какъ интегралъ порядка i , если только

это уравнение, соединенное съ тѣми, которыя получаютъ отъ $i - 1$ дифференцированій, опредѣляетъ значенія произвольныхъ въ функціи $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$.

Въ самомъ дѣлѣ, въ нашемъ предположеніи можно опредѣлить постоянныя такъ, чтобы

$$y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

имѣли для $x = x_0$ произвольныя значенія $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$; потомъ уравненіе порядка $n - i$ допускаетъ общій интегралъ, и новыя постоянныя, которыя онъ содержитъ, могутъ быть выбраны такъ, чтобы $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-i-1}y}{dx^{n-i-1}}$ обращались для $x = x_0$ соотвѣтственно въ $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-i-1)}$. Общій интегралъ, о которомъ идетъ рѣчь, будетъ поэтому въ то же время интеграломъ даннаго уравненія.

Нужно еще обратить вниманіе на слѣдующее предложеніе, которое истекаетъ изъ разсмотрѣній, которыя мы только-что изложили:

Если известно k первыхъ интеграловъ дифференціального уравненія порядка n , то мы получимъ интегралъ порядка k , если исключимъ $k - 1$ самыхъ высшихъ производныхъ неизвѣстной функціи изъ k первыхъ интеграловъ.

Въ частности:

Если известно n первыхъ интеграловъ дифференціального уравненія порядка n , то мы получимъ общій интегралъ, если исключимъ изъ этихъ интеграловъ $n - 1$ производныхъ, которыя они содержатъ.

Опредѣленіе частныхъ интеграловъ и особыя рѣшенія дифференціальныхъ уравненій.

634. Когда даемъ опредѣленныя значенія произвольнымъ постояннымъ, входящимъ въ интегралы дифференціального уравненія или системы такихъ уравненій, то мы получаемъ результаты, которымъ дали названіе *частныхъ интеграловъ*.

Разсмотрѣніе частныхъ интеграловъ очень важно въ нѣкоторыхъ вопросахъ, какъ это мы увидимъ далѣе въ этомъ сочиненіи, но оно не составляетъ предмета, который мы имѣемъ въ виду.

Дифференціальныя уравненія могутъ допустить рѣшенія, не заключающіяся въ ихъ интегралахъ; можно, вообще, получить эти рѣшенія посредствомъ чисто-алгебраическихъ дѣйствій, и имъ дали названіе *особыхъ рѣшеній*.

Теорія, посредствомъ которой мы доказали существованіе интеграловъ, не могла сдѣлать очевиднымъ существованіе особыхъ рѣшеній, потому что эта теорія предполагаетъ непрерывность нѣкоторыхъ функцій, которыя перестаютъ быть непрерывными, когда переменныя, отъ которыхъ онѣ зависятъ, принимаютъ значенія, отвѣчающія особымъ рѣшеніямъ. Мы изложимъ сначала въ томъ, что будетъ слѣдовать, случай дифференціальныхъ уравненій перваго порядка съ двумя переменными; мы покажемъ потомъ, какъ можно приложить тѣ же самыя разсмотрѣнія къ дифференціальнымъ уравненіямъ высшихъ порядковъ.

Объ особомъ рѣшеніи дифференціального уравненія перваго порядка, основанномъ на разсмотрѣніи общаго интеграла.

635. Особое рѣшеніе дифференціального уравненія перваго порядка можетъ быть легко получено, какъ мы сейчасъ увидимъ, посредствомъ общаго интеграла.

Пусть будетъ дифференціальное уравненіе

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

и

$$(2) \quad y = f(x, C)$$

общій интегралъ этого уравненія, гдѣ C произвольная постоянная. Дифференцированіе уравненія (2) даетъ

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(x, C)}{\partial x};$$

Уравненіе (2) будетъ выраженіемъ всѣхъ функцій отъ x , если только C рассматриваемъ какъ неопредѣленную функцію отъ x . Дифференцируемъ уравненіе (2) въ этомъ предположеніи, имѣемъ

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(x, C)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, C)}{\partial C} \frac{dC}{dx}.$$

Но такъ какъ (2) удовлетворяетъ уравненію (1), то для какого угодно x и C тождественно имѣемъ

$$(5) \quad \frac{\partial f(x, C)}{\partial x} = F[x, f(x, C)],$$

и это тождество не должно быть нарушено, когда вмѣсто C подставляемъ какую-нибудь функцію отъ x .

Чтобы (4) также удовлетворяло уравненію (1), нужно, чтобы мы имѣли

$$\frac{\partial f(x, C)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, C)}{\partial C} \frac{dC}{dx} = F[x, f(x, C)],$$

гдѣ C есть нѣкоторая функція отъ x , а такъ какъ уравненіе (5) въ то же время имѣетъ мѣсто, то мы должны имѣть

$$\frac{\partial f(x, C)}{\partial C} \frac{dC}{dx} = 0,$$

которое распадается на два, именно

$$(6) \quad \frac{dC}{dx} = 0$$

и

$$(7) \quad \frac{\partial f(x, C)}{\partial C} = 0.$$

Уравненіе (6) даетъ $C = \text{const.}$ и снова воспроизводитъ общій интегралъ. Уравненіе (7) опредѣляетъ нѣкоторое значеніе C въ функціи x , именно

$$(8) \quad C = \psi(x),$$

которое вообще отвѣчаетъ особому рѣшенію. Это рѣшеніе

$$(9) \quad y = f[x, \psi(x)]$$

можетъ однако заключаться, какъ исключительный случай, въ общемъ интегралѣ; это можетъ случиться въ частности, если $\psi(x)$ обращается въ постоянную. Мы не будемъ имѣть особаго рѣшенія, если уравненіе (7) не содержитъ C .

636. Нужно замѣтить, что уравненіе (7) можетъ быть представлено въ видѣ

$$(10) \quad \frac{\partial y}{\partial C} = 0,$$

гдѣ $\frac{\partial y}{\partial C}$ получено изъ общаго интеграла; если же оно не рѣшено относительно y и если оно имѣетъ видъ

$$(11) \quad \Phi(x, y, C) = 0,$$

то уравненіе (10) дастъ

$$(12) \quad \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial C}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = 0,$$

Эта формула, очевидно, исключаетъ особыя рѣшенія x = постоянной. Такъ какъ ничто не мѣшаетъ взять x за главную переменную, то можно уравненію (12) дать видъ

$$(13) \quad \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial C}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} = 0,$$

а эта формула исключаетъ особыя рѣшенія y = постоянной.

Особое рѣшеніе получится, если исключимъ C изъ уравненія (11) посредствомъ (12) или (13).

Если уравненіе (11) такъ составлено, что $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ сохраняютъ конечныя значенія, то можно будетъ просто взять

$$(14) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0;$$

но значенія C , полученные изъ этого уравненія, могутъ перестать давать особыя рѣшенія, если они уничтожаютъ $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$.

637. П р и м ѣ р ѣ .—Пусть будетъ дифференціальное уравненіе

$$y - 2x \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0,$$

которое получается отъ исключенія C изъ уравненія

$$\Phi(x, y, C) = (3xy + 2x^3 + C)^2 - 4(y + x^2)^3 = 0$$

и того, которое получается отъ дифференцированія относительно x и y .

Здѣсь имѣемъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 2(3xy + 2x^3 + C);$$

исключеніе C изъ $\Phi = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$ даетъ

$$y = -x^2,$$

но это значеніе y не удовлетворяетъ дифференціальному уравненію; нетрудно убѣдиться, что обѣ производныя $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ уничтожаются, когда дѣлаемъ одновременно $\Phi = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$.

Объ особомъ рѣшеніи дифференціальнаго уравненія перваго порядка, выводимомъ изъ дифференціальнаго уравненія.

638. Пусть будетъ

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

и

$$(2) \quad y = f(x, C)$$

его общій интегралъ такъ, чтобы

$$(3) \quad \frac{\partial f(x, C)}{\partial x} = F[x, f(x, C)]$$

было тождествомъ.

Взявъ дифференціалъ уравненія (3) относительно C , получимъ

$$(4) \quad \frac{\partial^2 f(x, C)}{\partial x \partial C} = \frac{\partial F[x, f(x, C)]}{\partial f} \frac{\partial f(x, C)}{\partial C},$$

или лучше

$$(5) \quad \frac{\left[\frac{\partial^2 f(x, C)}{\partial x \partial C} \right]}{\left[\frac{\partial^2 f(x, C)}{\partial C^2} \right]} \times \frac{\left[\frac{\partial^2 f(x, C)}{\partial C^2} \right]}{\left[\frac{\partial f(x, C)}{\partial C} \right]} = \frac{\partial F[x, f(x, C)]}{\partial f},$$

уравнение необходимо тождественное; можно дать C такое значение функции отъ x , какое хотимъ. Дадимъ C значение, представляемое уравнениемъ (8) § 635, именно $\psi(x)$, удовлетворяющее особому рѣшенію. Первый множитель первой части уравненія (5) сохраняетъ конечное значение, отличное отъ нуля, потому что это есть значение $-\frac{dC}{dx}$ или $-\psi'(x)$; взявъ дифференціалъ уравненія (7) § 635, получимъ

$$\frac{\partial^2 f(x, C)}{\partial x \partial C} + \frac{\partial^2 f(x, C)}{\partial C^2} \frac{dC}{dx} = 0.$$

Что касается втораго множителя первой части уравненія (5), то я говорю, что онъ—бесконечность. Предположимъ, что противное имѣетъ мѣсто, и положимъ для краткости

$$\frac{\partial f(x, C)}{\partial C} = f'(x, C);$$

множитель Θ , которымъ мы занимаемся, имѣетъ значение

$$\Theta = \frac{\frac{\partial f'(x, C)}{\partial C}}{f'(x, C)} = \frac{\partial \log [\pm f'(x, C)]}{\partial C}.$$

Если Θ остается конечнымъ для $C = \psi(x)$, то то-же будетъ и относительно

$$\int_{\psi}^C \Theta dC = \log \frac{f'(x, C)}{f'(x, \psi)},$$

это же абсурдъ; значение $C = \psi(x)$ уничтожаетъ знаменатель этого выраженія.

Такимъ образомъ, значение $C = \psi(x)$ дѣлаетъ бесконечностію значение $\frac{\partial F[x, f(x, C)]}{\partial f}$, которое можно написать такъ:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \infty.$$

Другими словами, особыя рѣшенія уравненія (1) другія, чѣмъ $x = \text{const.}$ должны удовлетворять уравненію

$$(6) \quad \frac{1}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}} = 0.$$

Поэтому эти рѣшенія можно найти, не зная общаго интеграла дифференціального уравненія.

Данное уравненіе можетъ быть выражено въ видѣ

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{F(x, y)};$$

поэтому нашъ анализъ доказываетъ, что особыя рѣшенія

другія, чѣмъ $y = \text{const.}$, удовлетворяютъ уравненію $\frac{1}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}} = \infty$

или $\frac{1}{F^2(x, y)} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \infty$, или $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \infty$, потому что

$F(x, y) = 0$ дало бы, по причинѣ уравненія (1), $\frac{dy}{dx} = 0$, или $y = \text{const.}$, исключенный случай, или наконецъ

$$(7) \quad \frac{1}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}} = 0.$$

639. Уравненія (6) и (7) могутъ быть написаны

$$(8) \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = \infty, \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = \infty,$$

гдѣ y' взято вмѣсто $\frac{dy}{dx}$. Если поэтому данное уравненіе представлено въ видѣ

$$(9) \quad \Psi\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0 \quad \text{или} \quad \Psi(y', y, x) = 0,$$

то уравненіе (6) обратится въ

$$(10) \quad \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y'}}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}} = 0,$$

а (7) будетъ

11)

$$\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y'}}{\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = 0.$$

Если данное уравненіе составлено такъ, что $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ не могутъ быть безконечностями, то для особыхъ рѣшеній просто будемъ имѣть

(12)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y'} = 0,$$

Исключеніе y' изъ (9) и (10) или изъ (9) и (11) или изъ (9) и (12) дастъ уравненіе, которое должно удовлетворять особому рѣшенію. Въ томъ случаѣ, когда можетъ быть употреблено уравненіе (12), мы видимъ, что особое рѣшеніе получится, если выразимъ, что дифференціальное уравненіе имѣетъ два корня $\frac{dy}{dx}$, равныхъ между собой.

640. Вполнѣ очевидно, что значенія y функцій отъ x , для которыхъ дифференціальное уравненіе имѣетъ равные корни, не составляютъ вообще рѣшеній этого уравненія.

Разсмотримъ самый простой случай, тотъ, когда уравненіе второй стѣпени относительно $\frac{dy}{dx}$, и предположимъ его рѣшеннымъ относительно $\frac{dy}{dx}$. Пусть будетъ

$$\frac{dy}{dx} = P + \sqrt{Q},$$

гдѣ P и Q двѣ какія-нибудь функціи переменныхъ x и y . Значенія y , уничтожающія Q , удовлетворяютъ уравненію $\frac{dy}{dx} = P$ только въ исключительныхъ случаяхъ; это случится, напримѣръ, если возьмемъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{2(ax+b^2)} + \frac{1}{2(ax+b^2)} \sqrt{a^2y^2 - 4b^2(ax+b^2)}.$$

Функція $y = \frac{2b}{a} \sqrt{ax+b^2}$, уничтожающая радикаль, удов-

летворяетъ данному дифференціальному уравненію. Дифференціальное уравненіе, представленное въ цѣломъ видѣ, есть

$$ay'(y - xy') - b^2(1 + y'^2) = 0;$$

общій интегралъ дается уравненіемъ

$$aC(y - Cx) - b^2(1 + C^2) = 0,$$

въ которомъ C представляетъ произвольную постоянную.

641. Результаты, которые мы только-что получили, позволяютъ распознать вообще, что данное рѣшеніе $y = \varphi(x)$ дифференціальнаго уравненія

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

если особое рѣшеніе или частный интегралъ. Дѣйствительно, означимъ черезъ z новую переменную и положимъ

$$y = \varphi(x) + z;$$

преобразованное дифференціальное уравненіе будетъ удовлетворяться для $z = 0$; мы предположимъ, что оно можетъ быть представлено въ видѣ

$$(2) \quad \frac{dz}{dx} = z^\mu \Psi(x, z),$$

гдѣ $\Psi(x, z)$ есть функція, которая для $z = 0$ есть ни нуль, ни безконечность, а μ означаетъ положительный показатель. Вопросъ, который мы имѣемъ рѣшить, состоитъ въ распознаніи сущности рѣшенія $z = 0$. Для того, чтобы оно было особымъ рѣшеніемъ, нужно и достаточно, чтобы производная отъ $z^\mu \Psi(x, z)$ относительно z была для $z = 0$ безконечною; эта производная есть

$$(3) \quad \mu z^{\mu-1} \Psi(x, z) + z^\mu \Psi'(x, z),$$

гдѣ $\Psi'(x, z)$ написано вмѣсто $\frac{\partial \Psi(x, z)}{\partial z}$.

Если имѣемъ $\mu > 1$ или $\mu = 1$, то первый членъ имѣетъ для $z = 0$ конечное значеніе; то же самое относится ко второму члену, потому что, назвавъ θ количество, заключающееся между 0 и 1, имѣемъ

$$(4) \quad (\theta z)^\mu \Psi'(x, \theta z) = \theta^\mu z^{\mu-1} [\Psi(x, z) - \Psi(x, 0)],$$

и въ нашемъ предположеніи та и другая часть формулы для $z = 0$ остается конечной. Такимъ образомъ, рѣшеніе $z = 0$ есть частный интегралъ дифференціального уравненія (2).

Если $\mu < 1$, то первый членъ выраженія (3), для $z = 0$, есть безконечность и порядокъ его есть $-\mu$; можетъ случиться, что второй членъ будетъ также безконечность, но, на основаніи формулы (4), его порядокъ меньше $1 - \mu$, слѣдовательно между двумя этими членами не можетъ быть приведенія. Въ этомъ случаѣ рѣшеніе $z = 0$ есть особое рѣшеніе уравненія (2) и слѣдовательно, $y = \varphi(x)$ есть особое рѣшеніе уравненія (1).

Я прибавляю, что можно уничтожить особое рѣшеніе посредствомъ измѣненія переменнѣй. Дѣйствительно, если положимъ $z = u^{\frac{1}{1-\mu}}$, то уравненіе (2) обратится въ

$$(5) \quad \frac{du}{dx} = (1 - \mu) \Psi\left(x, u^{\frac{1}{1-\mu}}\right),$$

и это уравненіе (5) не допускаетъ болѣе рѣшенія $z = 0$ или $u = 0$. Это замѣчаніе было сдѣлано въ первый разъ Пуассономъ.

642. Намъ остается еще сдѣлать очень важное замѣчаніе. Особое рѣшеніе представляетъ огибающую или, если хотите, мѣсто послѣдовательныхъ пересѣченій кривыхъ, отвѣчающихъ различнымъ значеніямъ постоянной въ общемъ интегралѣ. Но можетъ случиться, что огибающая или одна изъ кривыхъ, которыя ее составляютъ, есть часть вида огибаемыхъ. Въ этомъ случаѣ имѣется замѣчательный случай рѣшенія, имѣющаго двойной характеръ особаго рѣшенія и частнаго интеграла; не будетъ бесполезно дать примѣръ. Пусть будетъ

$$y = C(x - C)^2$$

уравненіе огибаемыхъ. Дифференцированіе относительно C даетъ

$$(x - C)(x - 3C) = 0;$$

огибающая поэтому составитъ изъ двухъ кривыхъ, которыхъ уравненія мы будемъ имѣть, если замѣнимъ въ уравненіи огибаемыхъ C черезъ x и черезъ $\frac{x}{3}$; такимъ образомъ получимъ

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y = \frac{4x^3}{27}.$$

Рѣшеніе $y = 0$ есть частный случай огибаемыхъ, потому что оно отвѣчаетъ случаю $C = 0$.

Объ особыхъ рѣшеніяхъ дифференціальныхъ уравненій порядка выше перваго, выводимыхъ изъ какого-нибудь изъ первыхъ интеграловъ.

643. Разсмотрѣнія, которыя мы только-что развили, прилагаются къ дифференціальнымъ уравненіямъ всѣхъ порядковъ.

Положимъ

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \quad \dots, \quad \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = y^{(n)},$$

и рассмотримъ дифференціальное уравненіе порядка n

$$(1) \quad y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Пусть будетъ

$$(2) \quad y^{(n-1)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C)$$

одинъ изъ n первыхъ интеграловъ уравненія (1), гдѣ C есть произвольная постоянная. Взявъ дифференціалъ уравненія (2), получимъ

$$(3) \quad y^{(n)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)},$$

Уравненіе (1) должно сдѣлаться тождествомъ, если замѣнимъ $y^{(n)}$ и $y^{(n-1)}$ ихъ значеніями, взятыми изъ уравненій (2) и (3); такимъ образомъ, уравненіе

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} f = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, f)$$

должно тождественно имѣть мѣсто, какіе бы ни были $x, y, y', \dots, y^{(n-2)}$ и C .

Теперь, если рассматриваемъ C , какъ функцію отъ $x, y, y', \dots, y^{(n-2)}$, то вторая часть уравненія (2) можетъ быть рассматриваема, какъ функція также произвольная тѣхъ же количествъ. Съ этой точки зрѣнія уравненіе (2) можетъ удовлетворять уравненію (1).

Выраженіе (3) $y^{(n)}$ должно быть увеличено на $\frac{\partial f}{\partial C} \frac{dC}{dx}$ и уравненіе (4) не должно измѣниться, если прибавимъ къ первой части то же количество; поэтому нужно, чтобы это количество было нуль. Множитель

$$\frac{dC}{dx} = 0$$

даетъ $C = \text{const.}$, это же отвѣчаетъ первому интегралу.

Поэтому для особаго рѣшенія уравненія будемъ имѣть

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial C} = 0,$$

откуда получаемъ значеніе C въ функціи количествъ $x, y, y', \dots, y^{(n-2)}$. Если внесемъ потомъ эти значенія въ уравненіе (2), то получимъ особое рѣшеніе.

Мы видимъ, что это рѣшеніе имѣетъ видъ

$$(6) \quad \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C} = 0, \quad y^{(n-1)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}, C),$$

и что, если первый интегралъ представленъ въ видѣ

$$(7) \quad \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C) = 0,$$

особое рѣшеніе дается формулой

$$(8) \quad \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial C}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n-1)}}} = 0, \quad \Phi = 0.$$

644. Не нужно думать, что каждый первый интегралъ уравненія (1) можетъ отвѣчать также особому рѣшенію; не трудно доказать, напротивъ, что, прилагая правило,

только-что нами полученное, къ каждому изъ n первыхъ интеграловъ, постоянно получимъ то же самое особое рѣшеніе. Дѣйствительно, пусть будетъ

$$(9) \quad \Phi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, V) = 0$$

другой первый интеграль уравненія (1), гдѣ V произвольная постоянная. Если изъ уравненій (7) и (9) исключимъ $y^{(n-1)}$, то получимъ уравненіе порядка $n - 2$,

$$(10) \quad \Psi(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}, V, C) = 0,$$

которое будетъ вторымъ интеграломъ уравненія (1); мы предположимъ, что мы представили уравненіе (10) въ такомъ видѣ, что частныя производныя отъ Ψ не могутъ быть безконечными, пока количества, входящія въ Ψ , остаются конечными. Означимъ черезъ

$$(11) \quad \Psi'(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, V, C) = 0$$

результатъ дифференцированія уравненія (10); очевидно, мы воспроизведемъ уравненія (7) и (9), если исключимъ V и C изъ уравненій (10) и (11). Слѣдовательно, если предположимъ, что V замѣнено въ уравненіи (11) значеніемъ, взятымъ изъ уравненія (10), то это уравненіе (11) совпадаетъ съ уравненіемъ (7) и оно можетъ служить для вычисленія частной производной $\frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C}$, которую нужно, для полученія особаго рѣшенія, отвѣчающаго первому интегралу (7), приравнять нулю (§ 643).

Дифференцируемъ поэтому уравненія (10) и (11), рассматривая C какъ произвольную переменную, V и $y^{(n-1)}$ какъ двѣ функціи этой переменной; будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial C} + \frac{\partial \Psi}{\partial V} \frac{dV}{dC} &= 0, \\ \frac{\partial \Psi'}{\partial C} + \frac{\partial \Psi'}{\partial V} \frac{dV}{dC} + \frac{\partial \Psi'}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C} &= 0. \end{aligned}$$

Исключимъ $\frac{dV}{dC}$ изъ этихъ двухъ уравненій; по причинѣ

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial \Psi}{\partial y^{(n-2)}} \text{ получимъ}$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial B} \frac{\partial \Psi}{\partial y^{(n-2)}} \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial C} = \frac{\partial \Psi}{\partial B} \frac{\partial \Psi'}{\partial C} - \frac{\partial \Psi}{\partial C} \frac{\partial \Psi'}{\partial B}.$$

Такимъ образомъ особое рѣшеніе, вычисленное однимъ изъ первыхъ интеграловъ (7) или (9), опредѣляется уравненіемъ

$$(12) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial B} \frac{\partial \Psi'}{\partial C} - \frac{\partial \Psi}{\partial C} \frac{\partial \Psi'}{\partial B} = 0;$$

это рѣшеніе получимъ, если исключимъ В и С изъ уравненій (10), (11), (12).

Объ особыхъ рѣшеніяхъ дифференціальныхъ уравненій порядка выше перваго, выводимыхъ изъ дифференціального уравненія.

645. Особое рѣшеніе дифференціального уравненія какого-нибудь порядка можетъ быть опредѣлено, когда оно существуетъ, изъ того же самаго дифференціального уравненія.

Разсмотримъ дифференціальное уравненіе

$$(1) \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

и пусть будетъ

$$(2) \quad f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C) = 0$$

какой-нибудь изъ n первыхъ интеграловъ; взявъ дифференціалъ уравненія (2), получимъ

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \dots + y^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = 0.$$

Предположимъ, что мы получили изъ уравненія (3) значеніе С въ функціи $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ и подставили въ уравненіе (2); это уравненіе также сдѣлается дифференціальнымъ уравненіемъ и его можно будетъ употребить для вычисленія производной $y^{(n+1)}$ порядка $n+1$, которое получилось бы прямо изъ уравненія (1). Взявъ поэтому дифференціалъ уравненія (2), получимъ

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \dots + y^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \right) \\ & + \frac{\partial f}{\partial C} \left(\frac{\partial C}{\partial x} + y' \frac{\partial C}{\partial y} + \dots + y^{(n+1)} \frac{\partial C}{\partial y^{(n)}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Но первый членъ первой части, на основаніи уравненія (3), есть нуль, и мы просто имѣемъ

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial C} \left(\frac{\partial C}{\partial x} + y' \frac{\partial C}{\partial y} + \dots + y^{(n+1)} \frac{\partial C}{\partial y^{(n)}} \right) = 0.$$

Вотъ въ какомъ видѣ можно представить уравненіе, полученное отъ дифференцированія уравненія (1); въ случаѣ особаго рѣшенія, оно обращается въ тождество и не можетъ служить для опредѣленія $y^{(n+1)}$; дѣйствительно, для такого рѣшенія имѣемъ $\frac{\partial f}{\partial C} = 0$, если только предположимъ, что уравненіе (2) рѣшено относительно $y^{(n-1)}$. Не трудно доказать, что значеніе $y^{(n+1)}$, полученное изъ уравненія (4), по уничтоженіи множителя $\frac{\partial f}{\partial C}$, не отвѣчаетъ вообще особому рѣшенію.

Предположимъ, что уравненіе (1) такъ составлено, что его первая часть есть вполнѣ опредѣленная функція количествъ, которыя въ нее входятъ и которыхъ частныя производныя остаются конечными; дифференцированіе даетъ

$$\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + \dots + y^{(n)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} + y^{(n+1)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0,$$

а такъ какъ это уравненіе не даетъ болѣе значенія $y^{(n+1)}$, отвѣчающаго особому рѣшенію, то для этого рѣшенія необходимо будемъ имѣть

$$(5) \quad \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$$

и

$$(6) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + \dots + y^{(n)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} = 0.$$

646. Намъ остается сдѣлать послѣднее замѣчаніе относительно теоріи особыхъ рѣшеній. Пусть будетъ

$$(1) \quad \Pi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

особое рѣшеніе уравненія порядка n

$$(2) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Если это особое рѣшеніе дѣйствительно порядка $n - 1$, то его общій интеграль содержитъ $n - 1$ произвольныхъ постоянныхъ и этотъ интеграль удовлетворитъ данному уравненію. Особое рѣшеніе можетъ само имѣть особое рѣшеніе, но очень важно замѣтить, что это рѣшеніе не удовлетворяетъ вообще данному уравненію.

Дѣйствительно, по предположенію, уравненіе (2) вполнѣ удовлетворяется, когда подставляемъ въ него значенія $y^{(n-1)}$ и $y^{(n)}$, полученные изъ уравненія (1) и того, которое получается отъ его дифференцированія; но это послѣднее уравненіе есть

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} + y' \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \dots + y^{(n)} \frac{\partial \Pi}{\partial y^{(n-1)}} = 0,$$

и оно перестаетъ опредѣлять $y^{(n)}$, какъ это мы видѣли въ предъидущемъ параграфѣ, когда дѣло идетъ объ особомъ рѣшеніи уравненія (1).

Приложеніе предъидущей теоріи къ примѣру.

647. Я думаю пояснить примѣромъ ту важную теорію, которую мы только-что дали. Пусть будетъ уравненіе

$$(1) \quad y - ax^2 - bx - 4a^2 - b^2 = 0,$$

въ которомъ a и b двѣ произвольныя постоянныя и которое Лагранжъ разсматривалъ въ своихъ *Leçons sur le calcul des fonctions*. Имѣемъ

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} - 2ax - b = 0.$$

Исключеніе b даетъ

$$(3) \quad \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + x \frac{dy}{dx} - y \right] - a \left(4x \frac{dy}{dx} + x^2 \right) + 4a^2 (1 + x^2) = 0,$$

отъ исключенія a имѣемъ

$$(4) \quad \left[2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + x^3 \frac{dy}{dx} - 2yx^2 \right] - b \left(4 \frac{dy}{dx} - x^3 \right) + 2b^2 (1 + x^2) = 0.$$

Потомъ уравненіе (2) даетъ

$$(5) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - 2a = 0,$$

откуда $a = \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$. Внеся это значение a въ уравненіе (3), получимъ

$$(6) \quad (1 + x^2) \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - \left(2x \frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2} \right) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + x \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Уравненіе (6) есть дифференціальное уравненіе второго порядка; уравненія (3) и (4) его первые интегралы, уравненіе (1) его общій интегралъ.

Выразивъ равенство корней a уравненія (3) или равенство корней b уравненія (4), найдемъ особое рѣшеніе уравненія (6), именно:

$$(7) \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(x + \frac{x^3}{2} \right) \frac{dy}{dx} - (1 + x^2) y - \frac{x^4}{16} = 0.$$

Если желаемъ получить это уравненіе (7) изъ дифференціального уравненія (6), то дифференцируемъ это послѣднее и мы найдемъ

$$\frac{d^3 y}{dx^3} \left[(1 + x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{4} \right] = 0.$$

Приравнявъ коэффициентъ $\frac{d^2 y}{dx^2}$ нулю, найдемъ

$$(8) \quad (1 + x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{4} = 0;$$

наконецъ исключеніе $\frac{d^2 y}{dx^2}$ изъ уравненій (6) и (8) даетъ уравненіе (7), которое мы получили посредствомъ первыхъ интеграловъ.

Если рѣшимъ уравненіе (7) относительно $\frac{dy}{dx}$, то найдемъ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + x^3}{4} + \frac{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{16y + 4x^2 + x^4}}{4}.$$

и мы можемъ написать

$$\frac{8 \frac{dy}{dx} + 4x + 2x^3}{\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}} - 2\sqrt{1 - x^2} = 0.$$

Но первый членъ первой части есть производная радикала $\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}$, между тѣмъ какъ второй членъ есть производная

$$x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Поэтому особое рѣшеніе (7) получится, если возьмемъ дифференціалъ уравненія

$$(9) \quad \sqrt{16y + 4x^2 + x^4} - x\sqrt{1+x^2} - \log(x + \sqrt{1+x^2}) = H,$$

гдѣ H означаетъ произвольную постоянную; другими словами, уравненіе (9) есть общій интегралъ этого особаго рѣшенія.

Уравненіе (7) также имѣетъ особое рѣшеніе и его можно получить изъ его общаго интеграла (9). Такъ какъ онъ рѣшенъ относительно постоянной произвольной, то достаточно будетъ приравнять безконечности производную его перваго части, взятую относительно y . Такимъ образомъ найдемъ

$$16y + 4x^2 + x^4 = 0, \text{ откуда } y = -\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16}.$$

Это значеніе y вполнѣ удовлетворяетъ уравненію (7), но оно не удовлетворяетъ уравненію (1).

О замѣчательномъ классѣ дифференціальныхъ уравненій.

648. Оканчивая эту главу, я дамъ нѣкоторыя краткія понятія, относящіяся къ классу дифференціальныхъ уравненій, изслѣдованныхъ сначала Лагранжемъ и которымъ я далъ очень развитую теорію въ Мемуарѣ, составляющемъ часть XVIII тома *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

Пусть x, y двѣ переменныя; y', y'', \dots послѣдовательныя производныя отъ y ; α и β двѣ произвольныя постоянныя. Если два уравненія

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \alpha, \\ \psi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \beta \end{cases}$$

суть два первые интеграла одного и того же дифференціальнаго уравненія $V = 0$, и если

$$(2) \quad f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, \alpha, \beta) = 0$$

происходить отъ исключенія $y^{(n)}$, то это послѣднее будетъ вторымъ интеграломъ уравненія $V=0$. Я прибавляю, что то же самое уравненіе (2) будетъ первымъ интеграломъ уравненія

$$(3) \quad F(\varphi, \psi) = 0,$$

гдѣ F означаетъ какую-нибудь функцію, если только здѣсь разсматриваемъ α и β какъ постоянныя, связанные между собой уравненіемъ

$$(4) \quad F(\alpha, \beta) = 0.$$

Дѣйствительно, если рѣшаемъ систему, образованную изъ уравненія (2) и того, которое получается отъ дифференцированія, относительно α и β , то вслѣдствіе нашего предположенія найдемъ $\alpha = \varphi$, $\beta = \psi$; и такъ какъ мы предполагаемъ α и β связанными уравненіемъ (4), то ясно, что уравненіе (3) будетъ удовлетворено.

Теперь, для полученія особаго рѣшенія уравненія (3) можно употребить его первый интеграль (2). Мы предположимъ этотъ интеграль такъ написаннымъ, чтобы производная $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ не могла сдѣлаться безконечностію; тогда будетъ достаточно взять дифференціалъ уравненія (2) относительно произвольной α , разсматривая β какъ функцію отъ α ; такимъ образомъ получимъ

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta = 0.$$

Сверхъ того уравненіе (4) даетъ

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial F}{\partial \beta} d\beta = 0;$$

исключая же отношеніе $\frac{d\beta}{d\alpha}$, получимъ

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0;$$

это уравненіе (5) есть именно искомое особое рѣшеніе.

649. П р и м ъ р ъ I. — Предположимъ, что требуется найти плоскую кривую, зная геометрическое мѣсто центровъ кривизны.

Если означимъ черезъ x, y координаты искомой кривой, черезъ α, β координаты центра кривизны, то будемъ имѣть (§ 195)

$$(1) \quad \alpha = x - \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) \frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \beta = y + \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

если же

$$(2) \quad F(\alpha, \beta) = 0$$

есть уравненіе данной кривой, то дифференціальное уравненіе задачи будетъ

$$(3) \quad F\left(x - \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx}, y + \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right) = 0;$$

оно принадлежитъ ко второму порядку. Но если рассматриваемъ α и β какъ произвольныя постоянныя, то уравненія (1) будутъ двумя первыми интегралами одного и того же уравненія третьяго порядка

$$(4) \quad \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) \frac{d^3y}{dx^3} + 3 \frac{dy}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0.$$

Этотъ же случай мы рассмотрѣли въ предъидущемъ параграфѣ. Исключивъ $\frac{d^2y}{dx^2}$ изъ уравненій (1), получимъ

$$(5) \quad (\alpha - x) + (\beta - y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

это же есть первый интеграль уравненія (3), гдѣ α и β постоянныя, связанные между собой уравненіемъ (2). Первая часть уравненія (5), за исключеніемъ постояннаго, есть производная

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2;$$

если означимъ черезъ R новую произвольную постоянную

то общій интеграль уравненія (3) будетъ

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

гдѣ α и β связаны уравненіемъ (2). Общее рѣшеніе данной задачи поэтому дается окружностію произвольнаго радіуса, и которой центръ есть произвольная точка данной кривой. Но съ точки зрѣнія геометріи это не есть правильное рѣшеніе; оно есть ничто иное какъ особое рѣшеніе уравненія (3). Чтобы получить его, нужно дифференцировать уравненіе (5), рассматривая α и β какъ однѣ переменныя, что даетъ

$$(6) \quad \frac{d\beta}{d\alpha} \frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

гдѣ отношеніе $\frac{d\beta}{d\alpha}$ должно быть получено изъ уравненія (2). Уравненіе (6), которое только первой степени, есть именно то, которое нужно положить, когда предполагается найти разверзающія данной кривой.

650. П р и м ѣ р ъ II. — Предположимъ найти линіи кривизны поверхности втораго порядка съ центромъ.

Уравненіе данной поверхности есть

$$(1) \quad \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

дифференціальное уравненіе проэкцій линій кривизны на плоскость xy , сдѣлавъ $dy = y' dx$, будетъ (§ 341)

$$(2) \quad \frac{c^2}{\rho^2} \left(x^2 - \frac{xy}{y'} \right) - \frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2} (d^2 - xyy') - b^2 = 0$$

или

$$(3) \quad \alpha - \beta - b^2 = 0,$$

положивъ

$$(4) \quad \frac{c^2}{\rho^2} \left(x^2 - \frac{xy}{y'} \right) = \alpha, \quad \frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2} (y^2 - xyy') = \beta.$$

Но когда рассматриваемъ α и β какъ произвольныя постоянныя, то предъидущія уравненія отъ дифференцированія и то и другое дадутъ

$$xyy'' - yy' + xy'^2 = 0;$$

поэтому они составляют два первых интеграла этого послѣдняго уравненія, и мы можемъ къ уравненію (2) приложить теорему § 648. Исключивъ y' изъ уравненій (4), найдемъ

$$\frac{c^2 x^2}{\rho^2 \alpha} = \frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2} \frac{y^2}{\epsilon} = 1;$$

α и ϵ связаны уравненіемъ (3), поэтому мы положимъ $\alpha = \mu^2$, $\alpha = \mu^2 - b^2$ и уравненіе проэкцій линій кривизны окончательно будетъ

$$(5) \quad \frac{c^2 x^2}{\rho^2 \mu^2} + \frac{(c^2 - b^2) y^2}{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)} = 1,$$

гдѣ μ^2 произвольная постоянная.

Такъ какъ это уравненіе (5) симметрично относительно ρ и μ , то, если рассматриваемъ ρ какъ переменный параметръ и μ какъ определенное количество, оно представитъ равнымъ образомъ проэкціи линій кривизны поверхности

$$(6) \quad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1,$$

а если ρ и μ имѣютъ въ то же время опредѣленные значенія, то уравненіе (5) представитъ проэкцію линіи кривизны, общую поверхностямъ (1) и (6), которая будетъ поэтому пересѣченіемъ этихъ двухъ поверхностей.

Если въ уравненіи (1) имѣемъ $\rho > c > b$, μ должно заключаться между b и c или быть меньше c , потому что иначе обѣ поверхности не пересѣкутся. Отсюда заключаемъ, что три уравненія

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} &= 1, \end{aligned}$$

въ которыхъ b и $c > b$ — опредѣленные постоянныя, ρ , μ , ν — три переменные параметра, заключающіеся первый между

c и ∞ , второй между b и c , и третій между 0 и b , представляют систему трехъ такихъ видовъ поверхностей, что одна какая-нибудь изъ поверхностей одного изъ видовъ пересѣкается всѣми поверхностями двухъ другихъ видовъ по своимъ линіямъ кривизны; это свойство мы доказали уже посредствомъ теоремы Дюпэна (§ 338).

651. П р и м ѣ р ъ III.—Уравненіе

$$y = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

къ которому мы вернемся въ слѣдующей главѣ, принадлежитъ къ тому классу уравненій, которыми мы занимаемся, потому что уравненія

$$\frac{dy}{dx} = \alpha, \quad y - x \frac{dy}{dx} = \beta,$$

гдѣ α и β означаютъ двѣ произвольныя постоянныя, суть первые интегралы уравненія

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Исключивъ $\frac{dy}{dx}$, получимъ

$$y = \alpha x + \beta,$$

это же есть общій интегралъ даннаго уравненія, когда рассматриваемъ β и α какъ связанные уравненіемъ

$$\beta = f(\alpha).$$

Особое рѣшеніе очевидно получится, если исключимъ α изъ двухъ уравненій

$$y = \alpha x + f(\alpha), \quad 0 = x + f'(\alpha).$$

ГЛАВА VII.

ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ ПЕРВАГО ПОРЯДКА СЪ ДВУМЯ ПЕ- РЕМѢННЫМИ.

Объ отдѣленіи переменныхъ.

652. Послѣ изложенія главныхъ положеній теоріи дифференціальныхъ уравненій мы должны разобрать случаи, въ которыхъ мы знаемъ какъ найти интегралы. Въ этой главѣ мы будемъ заниматься только уравненіями перваго порядка съ двумя переменными.

Самый простой случай есть тотъ, въ которомъ переменныя *отдѣлены*; въ этомъ случаѣ интегрированіе дифференціальнаго уравненія зависитъ только отъ квадратуръ. Мы говоримъ, что переменныя отдѣлены въ дифференціальномъ уравненіи, когда это уравненіе приводится къ виду

$$X + Y \frac{dy}{dx} = 0$$

или

$$(1) \quad X dx + Y dy = 0,$$

гдѣ X есть данная функція отъ x , и Y данная функція отъ y . Если означимъ черезъ x_0 и y_0 какія-нибудь опредѣленные количества, черезъ C произвольную постоянную, то общій интеграль уравненія (1) очевидно будетъ

$$(2) \quad \int_{x_0}^x X dx + \int_{y_0}^y Y dy = C.$$

Можно даже взять для этого интеграла

$$(3) \quad \int_{x_0}^x X dx + \int_{y_0}^y Y dy = 0,$$

гдѣ x_0 какое-нибудь определенное значеніе и y_0 означаетъ произвольную постоянную; эта постоянная есть именно то значеніе, которое принимаетъ y , когда даемъ x значеніе x_0 .

Задача, имѣющая предметомъ интегрированіе дифференціального уравненія, должна быть рассматриваема какъ рѣшенная, когда переменныя отдѣлены; иногда случается произвести отдѣленіе посредствомъ измѣненія переменныхъ; мы увидимъ въ этой главѣ различные примѣры.

Если уравненіе $\frac{1}{X} = 0$ имѣетъ корень a , то дифференціальное уравненіе (1) очевидно допустить рѣшеніе $x = a$, которое будетъ (§ 641) особое рѣшеніе или частный интегралъ. Также, если уравненіе $\frac{1}{Y} = 0$ допускаетъ корень b , то данное уравненіе будетъ имѣть особое рѣшеніе или частный интегралъ $y = b$.

653. П р и м ѣ р ы. — 1) Рассмотримъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1-y^2}{1-x^2} = 0;$$

ему можно дать видъ

$$\frac{dx}{1-x^2} + \frac{dy}{1-y^2} = 0,$$

и его интегралъ есть

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} + \int_0^y \frac{dy}{1-y^2} = C.$$

Но

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dx}{1-x} = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

и также

$$\int_0^y \frac{dy}{1-y^2} = \log \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$

Если же вмѣсто C напишемъ $\log \sqrt{C}$, то предъидущій интеграль обратится въ

$$\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = C.$$

Предположеніе $C=0$ даетъ частные интегралы $x=-1$, $y=-1$; предположеніе $C=\infty$ даетъ два другихъ частныхъ интеграла $x=+1$, $y=+1$; это же согласуется съ результатами, полученными въ § 641.

2) Пусть будетъ теперь уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 0;$$

ему можно дать видъ

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0,$$

и оно имѣетъ общимъ интеграломъ

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin C,$$

гдѣ C произвольная постоянная. Если возьмемъ синусы обѣихъ частей, то получимъ

$$x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2} = C.$$

Подобно предъидущему примѣру данное дифференціальное уравненіе удовлетворяется для $x = \pm 1$, $y = \pm 1$; но мы видимъ, что эти рѣшенія уже особыя рѣшенія, а не частные интегралы, потому что общій интеграль не можетъ обратится въ тождество ни для одного значенія произвольной постоянной, когда предполагаемъ $x = \pm 1$ или $y = \pm 1$; это заключеніе согласно съ теоріей § 641.

Интегрированіе уравненій вида $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

654. Когда дѣло идетъ о дифференціальномъ уравненіи вида

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

то переменныя можно отдѣлить посредствомъ подстанов-
ленія

$$(2) \quad y = zx,$$

гдѣ z новая переменная

Дѣйствительно, имѣемъ

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z,$$

подставивъ же предыдущія значенія y и $\frac{dy}{dx}$ въ уравненіе (1),
получимъ

$$(4) \quad x \frac{dz}{dx} + z = f(z),$$

откуда

$$\frac{dz}{f(z) - z} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Поэтому, взявъ интегралъ и означивъ черезъ C произволь-
ную постоянную, будемъ имѣть

$$(5) \quad \int_{z_0}^z \frac{dz}{f(z) - z} - \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = C$$

или

$$(6) \quad \int_{z_0}^z \frac{dz}{f(z) - z} - \log \frac{x}{x_0} = C.$$

Значенія x_0 и z_0 могутъ быть выбраны по произволу; если
разсматриваемъ z_0 какъ произвольную постоянную, то можно
проще написать

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{f(z) - z} - \log \frac{x}{x_0} = 0,$$

подобно тому какъ мы уже получили это въ § 652.

Очевидно, уравненіе

$$P + Q \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad P dx + Q dy = 0,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + \text{const.}, \quad \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \log(z + \sqrt{1+z^2}) + \text{const.},$$

то интегралъ будетъ

$$\log(z + \sqrt{1+z^2}) = \log x - \log C,$$

гдѣ $\log C$ есть произвольная постоянная. Можно также написать

$$z + \sqrt{1+z^2} = \frac{x}{C},$$

взявъ же обратныя значенія обѣихъ частей, получимъ

$$-z + \sqrt{1+z^2} = \frac{C}{x}.$$

Вычтя наконецъ послѣднее уравненіе изъ предъидущаго, будемъ имѣть

$$2z = \frac{x}{C} - \frac{C}{x}$$

или, написавъ $\frac{y}{x}$ вмѣсто z

$$x^2 - 2Cy - C^2 = 0.$$

Это уравненіе представляетъ параболы, имѣющія фокусомъ начало координатъ и которыхъ ось совпадаетъ съ осью y . Взявъ дифференціалъ относительно C , получимъ

$$y + C = 0,$$

это же дастъ мнимое особое рѣшеніе

$$x^2 + y^2 = 0;$$

дифференціальное уравненіе задачи дѣйствительно удовлетворяется, когда полагаемъ $y = x\sqrt{-1}$.

656. ПРИМѢРЪ II. — Найти интегралъ дифференціального уравненія

$$(ax + by) dx + (a'x + b'y) dy = 0,$$

въ которомъ a, b, a', b' означаютъ данныя постоянныя.

Черезъ подстановленіе

$$y = xz, \quad dy = xdz + zdx,$$

данное уравненіе обращается въ

$$\frac{(a' + b'z) dz}{a + (b + a')z + b'z^2} + \frac{dx}{x} = 0$$

или

$$2 \frac{dx}{x} + \frac{(b + a') + 2b'z}{a + (b + a')z + b'z^2} dz + \frac{(a' - b)}{a + (b + a')z + b'z^2} dz = 0.$$

Два первые члена этого уравненія образуютъ дифференціалъ суммы

$$\log x^2 + \log [a + (b + a')z + b'z^2] = \log [ax^2 + (b + a')xy + b'y^2];$$

поэтому черезъ интегрированіе имѣемъ

$$\log [ax^2 + (b + a')xy + b'y^2] + \int \frac{(a' - b) dz}{a + (b + a')z + b'z^2} = \text{const.}$$

Если положимъ

$$(a' - b)^2 - 4(ab' - ba') = \pm H,$$

гдѣ H положительное количество, то послѣдній членъ предыдущей формулы будетъ имѣть значеніемъ

$$\frac{a' - b}{\sqrt{H}} \log \frac{2b'z + b + a' - \sqrt{H}}{2b'z + b + a' + \sqrt{H}}$$

или

$$\frac{2(a' - b)}{\sqrt{H}} \arctan \frac{2b'z + b + a'}{\sqrt{H}},$$

смотря по тому, будетъ-ли $\pm H$ положительное или отрицательное. Интегралъ даннаго уравненія поэтому, въ первомъ случаѣ, будетъ

$$\log [ax^2 + (b + a')xy + b'y^2] + \frac{a' - b}{\sqrt{H}} \log \frac{2b'y + (b + a' - \sqrt{H})x}{2b'y + (b + a' + \sqrt{H})x} = C,$$

и во второмъ случаѣ

$$\log [ax^2 + (b + a')xy + b'y^2] + \frac{2(a' - b)}{\sqrt{H}} \arctan \frac{2b'y + (b + a')x}{x\sqrt{H}} = C,$$

гдѣ C означаетъ произвольную постоянную. Въ случаѣ $H = 0$ послѣдній членъ есть алгебраическій и его значеніе

$$\frac{-2(a' - b)x_0}{2b'y + (b + a')x}.$$

Очевидно, интеграль даннаго уравненія можетъ быть только алгебраическимъ, если количество $\pm H$ положительное, и въ этомъ случаѣ нужно, чтобы мы имѣли

$$\frac{a' - b}{\sqrt{H}} = \frac{m}{n},$$

гдѣ m и n цѣлыя числа.

657. ПРИМѢРЪ III.—Найти интеграль дифференціального уравненія

$$(ax + by + c) dx + (a'x + b'y + c') dy = 0.$$

Уравненіе, о которомъ идетъ рѣчь, не однородно относительно переменныхъ x, y , но его можно привести къ виду однородныхъ уравненій черезъ измѣненіе переменныхъ. Положимъ

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y',$$

гдѣ x' и y' новыя переменныя, и опредѣлимъ постоянныя x_0, y_0 уравненіями

$$ax_0 + by_0 + c = 0, \quad a'x_0 + b'y_0 + c' = 0.$$

Преобразованное уравненіе будетъ

$$(ax' + by') dx' + (a'x' + b'y') dy' = 0,$$

и оно соотвѣтствуетъ уравненію предъидущаго примѣра.

Можно еще поступать такимъ образомъ. Положимъ

$$ax + by + c = u, \quad a'x + b'y + c' = v,$$

гдѣ u и v новыя переменныя; будемъ имѣть

$$x = \frac{b'(u - c) - b(v - c')}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{a(v - c') - a'(u - c)}{ab' - ba'},$$

и данное уравненіе обратится въ

$$u(b' du - b dv) + v(a dv - a' du) = 0$$

или

$$(b'u - a'v) du + (av - bu) dv = 0,$$

это же есть однородное уравнение относительно переменных u и v .

Оба преобразования, только-что нами употребленные, не удобны, когда

$$ab' - ba' = 0;$$

тогда имѣемъ

$$b' = \frac{ba'}{a},$$

и данное уравнение есть

$$(ax + by + c) dx + \left[\frac{a'}{a} (ax + by) + c' \right] dy = 0.$$

Чтобы отдѣлить переменныя, достаточно положить

$$ax + by = z, \text{ откуда } dy = \frac{dz - a dx}{b};$$

тогда уравнение обратится въ

$$a dx + \frac{(a' z + ac') dz}{(b - a') z + (bc - ac')} = 0,$$

и переменныя отдѣлены. Этотъ результатъ годится въ случаѣ $a' = 0$, $b' = 0$; но если $a = 0$, $b = 0$, то нужно употребить преобразование

$$a' x + b' y = z.$$

Интегрирование линейныхъ уравненій перваго порядка.

658. Дифференціальное уравнение перваго порядка называется *линейнымъ*, когда оно первой степени относительно одной изъ переменныхъ и ея производной; такое уравнение поэтому имѣетъ видъ

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + Xy + X_1 = 0,$$

гдѣ X и X_1 данныя функціи независимой переменной x .

Произведя отдѣленіе переменныхъ, нетрудно произвести интегрированіе уравненія (1). Для этого положимъ

$$(2) \quad y = \theta z,$$

гдѣ z новая переменная и θ функція отъ x , которую мы предоставимъ себѣ опредѣлить по произволу. Уравненіе (2) даетъ

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \theta \frac{dz}{dx} + z \frac{d\theta}{dx},$$

подставивъ же значенія y и $\frac{dy}{dx}$ въ уравненіе (1), получимъ

$$(4) \quad \theta \frac{dz}{dx} + z \left(\frac{d\theta}{dx} + X\theta \right) + X_1 = 0.$$

Теперь мы можемъ опредѣлить функцію θ такъ, чтобы она удовлетворяла уравненію

$$(5) \quad \frac{d\theta}{dx} + X\theta = 0,$$

и обращалась въ единицу для $x = x_0$. Уравненіе (5) есть дифференціальное уравненіе, въ которомъ можно отдѣлить переменныя, написавъ его въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{d\theta}{\theta} + X dx = 0,$$

и мы заключаемъ, что

$$(6) \quad \log \theta = - \int_{x_0}^x X dx, \quad \theta = e^{- \int_{x_0}^x X dx}$$

Потомъ, по причинѣ уравненія (5), уравненіе (4) приводится къ

$$\theta \frac{dz}{dx} + X_1 = 0 \quad \text{или} \quad dz + \frac{X_1 dx}{\theta} = 0;$$

переменныя опять отдѣлены, и интегрированіе даетъ

$$z = - \int_{x_0}^x \frac{X_1 dx}{\theta} + C,$$

гдѣ C есть произвольная постоянная. Поэтому для общаго

интеграла уравненія (1) имѣемъ

$$(7) \quad y = e^{-\int_{x_0}^x X dx} \left[C - \int_{x_0}^x \frac{\int_{x_0}^x X dx}{e^{\int_{x_0}^x X dx}} X_1 dx \right].$$

На основаніи результатовъ, полученныхъ въ § 639 и слѣдующихъ за нимъ, очевидно, что линейныя уравненія не могутъ имѣть особыхъ рѣшеній.

659. П Р И М Ъ Р Ъ I. — *Требуется интегрировать дифференціальное уравненіе*

$$(1 + x^2) \frac{dy}{dx} - xy = a,$$

гдѣ a данная постоянная.

Здѣсь имѣемъ

$$X = -\frac{x}{1+x^2}, \quad X_1 = -\frac{a}{1+x^2},$$

откуда

$$-\int_0^x X dx' = \log \sqrt{1+x^2}, \quad \theta = \sqrt{1+x^2},$$

потомъ

$$\int \frac{X_1}{\theta} dx = -a \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-ax}{\sqrt{1+x^2}} + \text{const.};$$

искомый интегральъ поэтому есть

$$y = ax + C\sqrt{1+x^2},$$

гдѣ C произвольная постоянная.

660. П Р И М Ъ Р Ъ II. — *Требуется найти интегральъ дифференціального уравненія*

$$\frac{dy}{dx} + 2 \frac{y}{x} = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx.$$

Здѣсь имѣемъ

$$X = \frac{2}{x}, \quad X_1 = - \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx,$$

потомъ

$$\int_1^x X dx = 2 \log x, \quad \theta = \frac{1}{x^2},$$

дальше

$$\int \frac{X_1}{\theta} dx = \int x^2 X_1 dx = \frac{x^3}{3} X_1 - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{dX_1}{dx} dx;$$

сверхъ того

$$\begin{aligned} \int x^3 \frac{dX_1}{dx} dx &= - \int x^2 \sin x dx \\ &= (x^2 - 2) \cos x - 2x \sin x + \text{const.}; \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{X_1}{\theta} dx &= - \frac{x^3}{3} \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx \\ &\quad - \frac{x^2 - 2}{3} \cos x + \frac{2}{3} x \sin x + \text{const.}; \end{aligned}$$

поэтому искомый интеграль есть

$$y = \frac{C}{x^2} + \frac{x}{3} \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx + \frac{x^2 - 2}{3x^2} \cos x - \frac{2}{3} \frac{\sin x}{x},$$

гдѣ С произвольная постоянная.

Дифференціальныя уравненія, приводимыя къ линейнымъ.

661. Уравненія вида

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + Xy + X_1 y^n = 0,$$

гдѣ X и X₁ означаютъ данныя функціи отъ x, приводятся къ линейному виду черезъ подстановленіе

$$\frac{y^{1-n}}{1-n} = z, \quad \text{откуда} \quad y^{-n} dy = dz;$$

дѣйствительно, данное уравненіе, раздѣленное на yⁿ, приводится къ

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + X y^{1-n} + X_1 = 0,$$

и послѣ нашего подстановленія найдемъ

$$\frac{dz}{dx} + (1-n) X z + X_1 = 0,$$

это же есть линейное уравненіе.

Впрочемъ, бесполезно производить упрощеніе; можно приложить къ уравненію (1) способъ интегрированія, который мы употребляли въ § 658. Если положимъ

$$y = \theta z, \quad \frac{dy}{dx} = \theta \frac{dz}{dx} + z \frac{d\theta}{dx},$$

то уравненіе (1) обратится въ

$$(2) \quad \theta \frac{dz}{dx} + z \left(\frac{d\theta}{dx} + \theta X \right) + X_1 \theta^n z^n = 0,$$

это же уравненіе приведетъ къ слѣдующему:

$$(3) \quad \frac{dz}{dx} + X_1 \theta^{n-1} z^n = 0,$$

если опредѣлимъ θ такъ, чтобы

$$(4) \quad \frac{d\theta}{dx} + \theta X = 0.$$

Уравненіе (4), какъ въ § 658, даетъ

$$\frac{d\theta}{\theta} + X dx = 0, \quad \theta = e^{-\int_{x_0}^x X dx};$$

отдѣливъ, потомъ переменныя, уравненіе (3) обращается въ

$$\frac{dz}{z^n} + X_1 \theta^{n-1} dx = 0.$$

Взявъ интегралъ и означивъ черезъ C постоянную, найдемъ

$$\frac{z^{1-n}}{1-n} = -\int_{x_0}^x X_1 \theta^{1-n} dx + C;$$

поэтому интегралъ уравненія (1) есть

$$y^{1-n} = (1-n) e^{-(1-n) \int_{x_0}^x X dx} \left[-\int_{x_0}^x e^{(1-n) \int_{x_0}^x X dx} X_1 dx + C \right].$$

Уравненія, которыхъ можно опредѣлить общій интеграль, когда извѣстенъ частный интеграль.

662. Дифференціальныя уравненія, о которыхъ я хочу здѣсь говорить, имѣютъ видъ

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + Xy^2 + X_1 y + X_2 = 0,$$

гдѣ X , X_1 , X_2 суть данныя функціи отъ x . Если удовлетвори-
римъ уравненію (1), положивъ $y = Y$, гдѣ Y есть данная
функція отъ x , то можно будетъ найти общій интеграль.
Для этого достаточно положить

$$y = Y + z, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx} + \frac{dz}{dx},$$

гдѣ z есть новая переменная. Такъ какъ по предположенію
имѣемъ

$$\frac{dY}{dx} + XY^2 + X_1 Y + X_2 = 0,$$

то преобразованное уравненіе въ z будетъ

$$(2) \quad \frac{dz}{dx} + (X_1 + 2XY)z + Xz^2 = 0.$$

Это уравненіе (2) заключается въ томъ, которое мы раз-
смотрѣли въ предъидущемъ параграфѣ, и оно отвѣчаетъ слу-
чаю $n = 2$; поэтому можно будетъ получить его общій ин-
теграль, приложивъ тотъ или другой изъ способовъ, нами
указанныхъ.

Напримѣръ, уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + Xy^2 + X_1 y - (Xx^2 + X_1 x + 1) = 0$$

удовлетворяется, когда положимъ $y = x$; поэтому подста-
новленіе

$$y = x + z$$

приведетъ это уравненіе къ слѣдующему:

$$\frac{dz}{dx} + (X_1 + 2Xx)z + Xz^2 = 0.$$

Уравненіе Риккати.

663. Уравненіе *Риккати* принадлежитъ къ разряду тѣхъ уравненій, которыя мы разобрали въ предыдущемъ параграфѣ; это уравненіе слѣдующее:

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m,$$

гдѣ a и b постоянные коэффициенты.

Въ случаѣ $m = 0$, переменныя непосредственно отдѣляются; имѣемъ

$$\frac{dy}{y^2 - \frac{b}{a}} + a dx = 0,$$

откуда, взявъ интегралъ и означивъ черезъ c постоянную, получимъ

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{b}} \log \frac{y - \sqrt{\frac{b}{a}}}{y + \sqrt{\frac{b}{a}}} + a(x - c) = 0.$$

Если рѣшимъ это уравненіе относительно y , то найдемъ

$$y = \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{e^{a(x-c)} \sqrt{\frac{b}{a}} + e^{-a(x-c)} \sqrt{\frac{b}{a}}}{e^{a(x-c)} \sqrt{\frac{b}{a}} - e^{-a(x-c)} \sqrt{\frac{b}{a}}};$$

когда $\frac{b}{a}$ отрицательное, тогда можно написать (§ 368)

$$y = \sqrt{-\frac{b}{a}} \cot \left[a(x - c) \sqrt{-\frac{b}{a}} \right].$$

Интегрированіе уравненія (1) выражается въ нѣкоторыхъ случаяхъ черезъ алгебраическія и логарифмическія или круговыя функціи; тотъ путь, по которому мы сейчасъ будемъ слѣдовать въ этомъ изысканіи, состоитъ въ приведеніи дифференціальнаго уравненія къ другому того же вида, но въ которомъ показатель m есть нуль.

664. Мы сделаемъ сначала слѣдующее преобразование:

$$y = My' + N,$$

гдѣ y' новая переменная и M , N означаютъ функции отъ x , которыя мы будемъ имѣть возможность опредѣлить по произволу; также будемъ имѣть

$$\frac{dy}{dx} = M \frac{dy'}{dx} + y' \frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dx};$$

если же подставимъ эти значенія въ уравненіе (1), то получимъ

$$M \frac{dy'}{dx} + \left(\frac{dM}{dx} + 2aMN \right) y' + aM^2 y'^2 + \left(\frac{dN}{dx} + aN^2 - bx^m \right) = 0.$$

Для опредѣленія M и N положимъ теперь

$$\frac{dN}{dx} + aN^2 = 0, \quad \frac{dM}{dx} + 2aMN = 0.$$

Въ первомъ изъ этихъ уравненій переменныя отдѣляются непосредственно; можно написать

$$\frac{dN}{N^2} + a dx = 0,$$

и слѣдовательно

$$-\frac{1}{N} + ax = \text{const.}$$

Мы возьмемъ

$$N = \frac{1}{ax};$$

другое уравненіе тогда приводится къ

$$\frac{dM}{dx} + \frac{2M}{x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dM}{M} + \frac{2dx}{x} = 0,$$

взявъ интеграль, получимъ

$$\log M + \log x^2 = \text{const.} \quad \text{или} \quad Mx^2 = \text{const.}$$

Мы возьмемъ

$$M = \frac{1}{x^2},$$

слѣдовательно, употребленное преобразование будетъ

$$(2) \quad y = \frac{y'}{x^2} + \frac{1}{ax},$$

и оно дастъ для преобразуемаго уравненія

$$(3) \quad \frac{dy'}{dx} + \frac{a}{x^2} y'^2 - b x^{m+2} = 0.$$

Въ случаѣ $m = -2$, это уравненіе приводится къ

$$\frac{dy'}{dx} = b - a \frac{y'^2}{x^2},$$

а такъ какъ вторая часть есть функція только отношенія $\frac{y'}{x}$, то оно интегрируется по способу § 654. Такимъ образомъ, наше преобразование позволяетъ интегрировать уравненіе Риккати, когда $m = -2$.

Уравненіе (3) не имѣетъ болѣе вида даннаго уравненія, но можно его привести къ нему помощью новаго измѣненія переменныхъ; мы сдѣлаемъ.

$$(4) \quad y' = \frac{1}{y_1}, \quad x = x_1^{\frac{1}{m+3}}.$$

откуда

$$dy' = -\frac{dy_1}{y_1^2}, \quad dx = \frac{1}{m+3} x_1^{-\frac{m+2}{m+3}} dx_1;$$

если подставимъ эти значенія въ уравненіе (3) и если сдѣлаемъ для краткости

$$(5) \quad a_1 = \frac{b}{m+3}, \quad b_1 = \frac{a}{m+3}, \quad m_1 = -\frac{m+4}{m+3},$$

то получимъ

$$(6) \quad \frac{dy_1}{dx_1} + a_1 y_1^2 = b_1 x_1^{m_1}.$$

Это уравненіе вполне подобно уравненію (1); оно интегрируемо, когда $m_1 = 0$, это же даетъ $m = -4$; поэтому уравненіе (1) также интегрируемо въ этомъ предположеніи.

665. Преобразование, посредствомъ котораго мы переходимъ отъ уравненія (1) къ уравненію (6), можетъ быть приложено къ этому послѣднему; поступая такимъ образомъ далѣе, мы получимъ безконечное число послѣдовательныхъ преобразованныхъ уравненій, которыя можно вообще представить въ видѣ

$$\frac{dy_i}{dx_i} + a_i y_i^2 = b_i x_i^{m_i}.$$

Если встрѣтимъ преобразованное уравненіе, въ которомъ m есть нуль, то такое уравненіе, какъ мы видѣли, имѣетъ интеграль и всѣ предшествующія также будутъ имѣть его. Нетрудно найти случаи, въ которыхъ является это обстоятельство.

Означимъ черезъ θm функцію отъ m , опредѣляемую формулой

$$\theta m = -\frac{m+4}{m+3},$$

и сдѣлаемъ для краткости

$$\theta\theta m = \theta^2 m, \quad \theta\theta^2 m = \theta^3 m, \quad \dots$$

очевидно будемъ имѣть

$$m_i = \theta^i m,$$

и мы найдемъ (см. *Cours d'Algebre superieure* 4 издание т. II, стр. 356)

$$m_i = -\frac{(2i-1)m+4i}{im+(2i+1)},$$

эта формула для $i=1$ согласуется съ формулами (5); не трудно удостовѣриться, что, если она имѣетъ мѣсто для индекса i , она существуетъ и для индекса $i+1$.

На основаніи этого, чтобы найти $m_i=0$, нужно сдѣлать

$$(7) \quad m = -\frac{4i}{2i-1}.$$

Когда число m имѣетъ такой видъ, гдѣ i есть цѣлое положительное число, тогда интеграль уравненія Риккати выра-

жается помощью алгебраическихъ и логарифмическихъ функций; но, какъ мы сейчасъ покажемъ, существуетъ другой случай возможности интегрированія.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ данное уравненіе (1) подставимъ

$$y = \frac{1}{Y}, \quad x = X^{\frac{1}{m+1}},$$

то найдемъ преобразованное уравненіе

$$\frac{dY}{dX} + \frac{b}{m+1} Y^2 = a X^{\frac{-m}{m+1}},$$

имѣющее опять тотъ же видъ; на основаніи же предъидущаго это преобразованное уравненіе и данное будутъ имѣть интеграль, если имѣемъ

$$\frac{-m}{m+1} = -\frac{4i}{2i-1} \quad \text{или} \quad m = -\frac{4i}{2i+1}.$$

Поэтому вообще мы можемъ найти интеграль уравненія Риккати, когда число m имѣетъ видъ

$$m = \frac{-4i}{2i \pm 1},$$

гдѣ i есть цѣлое положительное число; случай $m = -2$, рассмотрѣнный выше, отвѣчаетъ $i = \infty$.

Объ уравненіи $L(x dy - y dx) - Mdy + Ndx = 0$, въ которомъ L, M, N означаютъ линейныя функціи.

666. Дифференціальное уравненіе

$$P dx + Q dy = 0$$

интегрируется легко (§ 657), когда P и Q суть линейныя функціи двухъ переменныхъ x и y . Эйлеръ и другіе геометры послѣ него изучали случай, гдѣ P и Q суть цѣлыя функціи второй степени, но они могли найти интеграль, только уменьшая общность полиномовъ P и Q .

Дифференціальныя уравненія вида, о которомъ мы говорили и который не былъ интегрированъ, заключаются, какъ

частный случай, въ общемъ уравненіи, которымъ мы сейчасъ будемъ заниматься и которому Якоби далъ первый способъ интегрированія. Уравненіе это слѣдующее:

$$(1) \quad L(x dy - y dx) - M dy + N dx = 0,$$

гдѣ L, M, N означаютъ данныя линейныя функціи, именно:

$$(2) \quad \begin{cases} L = A + A'x + A''y, \\ M = B + B'x + B''y, \\ N = C + C'x + C''y, \end{cases}$$

гдѣ A, A', \dots данныя постоянныя. Методъ, который я желаю изложить, не разнится по существу отъ того, который далъ Якоби.

Пусть будутъ

$$(3) \quad \begin{cases} U = a + bx + cy, \\ U' = a' + b'x + c'y, \\ U'' = a'' + b''x + c''y \end{cases}$$

три линейныя функціи, которыхъ коэффициенты неопредѣленны; положимъ сверхъ того

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha = b'c'' - b''c', & \epsilon = c'a'' - c''a', & \gamma = a'b'' - a''b', \\ \alpha' = b''c - bc'', & \epsilon' = c''a - ca'', & \gamma' = a''b - ab'', \\ \alpha'' = bc' - b'c, & \epsilon'' = ca' - c'a, & \gamma'' = ab' - a'b \end{cases}$$

и

$$(5) \quad \Delta = a(b'c'' - b''c') + b(c'a'' - c''a') + c(a'b'' - a''b');$$

очевидно, будемъ имѣть

$$(6) \quad \begin{cases} a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' = \Delta, \\ a\epsilon + a'\epsilon' + a''\epsilon'' = 0, \\ a\gamma + a'\gamma' + a''\gamma'' = 0, \\ b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' = 0, \\ b\epsilon + b'\epsilon' + b''\epsilon'' = \Delta, \\ b\gamma + b'\gamma' + b''\gamma'' = 0, \\ c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha'' = 0, \\ c\epsilon + c'\epsilon' + c''\epsilon'' = 0, \\ c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma'' = \Delta, \end{cases}$$

и по причинѣ этихъ соотношеній формулы (3) дадутъ

$$(7) \quad \begin{cases} \Delta = \alpha U + \alpha' U' + \alpha'' U'', \\ \Delta x = \epsilon U + \epsilon' U' + \epsilon'' U'', \\ \Delta y = \gamma U + \gamma' U' + \gamma'' U''. \end{cases}$$

Если для краткости сдѣлаемъ

$$(8) \quad \begin{cases} A = A \alpha + A' \epsilon + A'' \gamma, \\ A' = A \alpha' + A' \epsilon' + A'' \gamma', \\ A'' = A \alpha'' + A' \epsilon'' + A'' \gamma'', \\ B = B \alpha + B' \epsilon + B'' \gamma, \\ B' = B \alpha' + B' \epsilon' + B'' \gamma', \\ B'' = B \alpha'' + B' \epsilon'' + B'' \gamma'', \\ C = C \alpha + C' \epsilon + C'' \gamma, \\ C' = C \alpha' + C' \epsilon' + C'' \gamma', \\ C'' = C \alpha'' + C' \epsilon'' + C'' \gamma'', \end{cases}$$

и если сложимъ уравненія (7), послѣ ихъ умноженія соотвѣтственно на A, A', A'' , потомъ на B, B', B'' , наконецъ на C, C', C'' , то будемъ имѣть

$$(9) \quad \begin{cases} \Delta L = AU + A'U' + A''U'', \\ \Delta M = BU + B'U' + B''U'', \\ \Delta N = CU + C'U' + C''U'', \end{cases}$$

Дифференцированіе уравненій (3) даетъ

$$dU = b dx + c dy, \quad dU' = b' dx + c' dy, \quad dU'' = b'' dx + c'' dy;$$

по причинѣ формулъ (4) выведемъ слѣдующія:

$$\begin{aligned} U' dU'' - U'' dU' &= \alpha (x dy - y dx) - \epsilon dy + \gamma dx, \\ U'' dU - U dU'' &= \alpha' (x dy - y dx) - \epsilon' dy + \gamma' dx, \\ U dU' - U' dU &= \alpha'' (x dy - y dx) - \epsilon'' dy + \gamma'' dx, \end{aligned}$$

ти послѣднія, употребивъ формулы (6), даютъ

$$(10) \quad \begin{cases} \Delta (x dy - y dx) = (a' U'' - a'' U') dU + (a'' U - a U'') dU \\ \quad + (a U' - a' U) dU'', \\ - \Delta dy = (b' U'' - b'' U') dU + (b'' U - b U'') dU' \\ \quad + (b' U' - b' U) dU'', \\ \Delta dx = (c' U'' - c'' U') dU + (c'' U - c U'') dU' \\ \quad + (c U' - c' U) dU'', \end{cases}$$

Мы подставимъ сейчасъ въ предложенное уравненіе значенія $L, M, N, x y d - y dx, dy$ и dx , выведенныя изъ фор-

муль (9) и (10). Результатъ этой подстановки будетъ уравненіе между переменными U , U' , U'' и ихъ дифференціалами; одна изъ этихъ переменныхъ выражается двумя другими посредствомъ перваго уравненія (7), но лучше, для нашей цѣли, сохранить ихъ всѣ три. Девять постоянныхъ, входящихъ въ полиномы U , U' , U'' , неопредѣленны, поэтому мы сдѣлаемъ ихъ удовлетворяющими шести соотношеніямъ и, вводя три новыя неопредѣленныя λ , λ' , λ'' , мы напомнимъ девять уравненій

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} a A + b B + c C = \Delta\lambda, \\ a A' + b B' + c C' = 0, \\ a A'' + b B'' + c C'' = 0, \\ a' A + b' B + c' C = 0, \\ a' A' + b' B' + c' C' = \Delta\lambda', \\ a' A'' + b' B'' + c' C'' = 0, \\ a'' A + b'' B + c'' C = 0, \\ a'' A' + b'' B' + c'' C' = 0, \\ a'' A'' + b'' B'' + c'' C'' = \Delta\lambda''. \end{array} \right.$$

Тогда данное уравненіе, послѣ подстановленія, о которомъ мы говоримъ, обратится въ

$$(\lambda' - \lambda'') U' U'' dU + (\lambda'' - \lambda) U'' U dU' + (\lambda - \lambda') U U' dU'' = 0$$

или

$$(12) \quad (\lambda' - \lambda'') \frac{dU}{U} + (\lambda'' - \lambda) \frac{dU'}{U'} + (\lambda - \lambda') \frac{dU''}{U''} = 0.$$

Въ этомъ уравненіи, три переменныя отдѣлены; взявъ интегралъ и означивъ черезъ H произвольную постоянную, получимъ

$$(13) \quad (\lambda' - \lambda'') \log U + (\lambda'' - \lambda) \log U' + (\lambda - \lambda') \log U'' = \log H,$$

и если согласимся означить черезъ $U^{\lambda' - \lambda''}$ количество, котораго логарифмъ есть $(\lambda' - \lambda'') \log U$, даже тогда, когда $\lambda' - \lambda''$ и U мнимыя, то интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$(14) \quad U^{\lambda' - \lambda''} U^{\lambda'' - \lambda} U^{\lambda - \lambda'} = H.$$

Намъ остается вычислить коэффиціенты функцій U , U' , U'' ,

также и показатели $\lambda, \lambda', \lambda''$. Для этого, рассмотрим три уравнения первой изъ группъ (11); сложимъ эти три уравнения послѣ умноженія ихъ соотвѣтственно на a, a', a'' , потомъ на b, b', b'' , потомъ на c, c', c'' ; по причинѣ уравнений (8) и (6), получимъ

$$(15) \quad \begin{cases} (A' - \lambda) a + Bb + Cc = 0, \\ A' a + (B' - \lambda) b + C'c = 0, \\ A'' a + B'' b + (C'' - \lambda) c = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что, производя то же самое надъ уравненіями двухъ послѣднихъ группъ (11), получимъ двѣ системы уравнений, которыя могутъ быть выведены изъ системы (15), замѣнивъ a, b, c, λ черезъ a', b', c', λ' , потомъ черезъ a'', b'', c'', λ'' .

Уравненія (15) однородны относительно a, b, c , и если исключимъ изъ этихъ уравненій три количества, то получимъ уравненіе третьей степени

$$(16) \quad F(\lambda) = 0,$$

котораго первая часть будетъ имѣть значеніемъ детерминантъ

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B & C \\ A' & B' - \lambda & C' \\ A'' & B'' & C'' - \lambda \end{vmatrix};$$

такимъ образомъ будемъ имѣть

$$(17) \quad \begin{cases} F(\lambda) = (A - \lambda)(B' - \lambda)(C'' - \lambda) - B''C'(A - \lambda) \\ \quad - A''C(B' - \lambda) - A'B(C'' - \lambda) + A'B''C + A''BC', \end{cases}$$

Уравненія (15) могутъ только опредѣлить отношенія двухъ изъ трехъ постоянныхъ a, b, c къ третьей. Если для краткости сдѣлаемъ

$$(18) \quad \begin{cases} B' C'' - B'' C' = D, \\ C' A'' - C'' A' = D', \\ A' B'' - A'' B' = D'', \\ B' + C'' = E, \end{cases}$$

то изъ двухъ послѣднихъ уравненій (15) будемъ имѣть

$$\frac{a}{D - E\lambda + \lambda^2} = \frac{b}{D' + A'\lambda} = \frac{c}{D'' + A''\lambda};$$

можно три эти отношенія взять равными единицѣ, тогда будемъ имѣть

$$(19) \quad a = D - E\lambda + \lambda^2, \quad b = D' + A'\lambda, \quad c = D'' + A''\lambda.$$

Очевидно, что уравненіе (16) имѣетъ корнями три количества λ , λ' , λ'' , и если замѣнимъ въ формулахъ (19) λ черезъ λ' и чрезъ λ'' , то эти формулы дадутъ значенія a' , b' , c' и a'' , b'' , c'' . Поэтому въ заключеніе имѣемъ

$$(20) \quad \begin{cases} U = (D - E\lambda + \lambda^2) + (D' + A'\lambda)x + (D'' + A''\lambda)y, \\ U' = (D - E\lambda' + \lambda'^2) + (D' + A'\lambda')x + (D'' + A''\lambda')y, \\ U'' = (D - E\lambda'' + \lambda''^2) + (D' + A'\lambda'')x + (D'' + A''\lambda'')y, \end{cases}$$

итакъ, для интегрированія даннаго дифференціального уравненія, достаточно рѣшить уравненіе третьей степени (16).

667. Интегралъ (13) или (14), который мы получили, дѣлается неопредѣленнымъ, когда уравненіе (16) въ λ имѣетъ равные корни; но нетрудно вывести изъ нашего анализа рѣшеніе этого частнаго случая. Если положимъ

$$\log U = f(\lambda),$$

то интегралъ (13) будетъ

$$(21) \quad (\lambda' + \lambda'')f(\lambda) + (\lambda'' - \lambda)f(\lambda') + (\lambda - \lambda')f(\lambda'') = \text{const.},$$

сдѣлавъ же $\lambda' = \lambda + h$ и раздѣливъ на h , получимъ

$$(\lambda'' - \lambda) \frac{f(\lambda + h) - f(\lambda)}{h} + f(\lambda) - f(\lambda'') = \text{const.}$$

Коэффициенты A , B , ... даннаго уравненія рассматривались сначала неопредѣленными, поэтому заставимъ ихъ стремиться къ нѣкоторымъ значеніямъ, для которыхъ соотвѣтствующее уравненіе въ λ имѣетъ два равныхъ корня. Для каждой системы значеній коэффициентовъ предъидущее уравненіе составляетъ интегралъ даннаго; то же самое поэтому существуетъ и для предѣла, и для этого интеграла будемъ имѣть

$$(22) \quad (\lambda'' - \lambda)f'(\lambda) + f(\lambda) - f(\lambda'') = \text{const.}$$

или

$$(23) \quad (\lambda'' - \lambda) \frac{U_1}{U} + \log U - \log U'' = \text{const.}$$

гдѣ U_1 производная отъ U , взятая относительно λ , именно

$$(24) \quad U_1 = (2\lambda - E) + A'x + A''y.$$

Если положимъ въ уравненіи (22) $\lambda'' = \lambda + h$, то, раздѣливъ на $-\frac{h^2}{1 \cdot 2}$, получимъ

$$\frac{f(\lambda + h) - f(\lambda) - \frac{h}{1} f'(\lambda)}{\frac{h^2}{1 \cdot 2}} = \text{const.}$$

Предположимъ, что коэффициенты A, B, \dots подчиняются только одному соотношенію, необходимому для равенства двухъ равныхъ корней уравненія (16); заставимъ ихъ стремиться къ опредѣленнымъ предѣламъ, отвѣчающимъ уравненію (16), котораго три корня равны; въ предѣлѣ предъидущее уравненіе обратится въ

$$f''(\lambda) = \text{const.},$$

или

$$U \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} \right)^2 = HU^2,$$

или наконецъ

$$(25) \quad HU^2 + U_1^2 - 2U = 0.$$

Такимъ образомъ, въ томъ случаѣ, когда уравненіе (16) имѣетъ три равные корня, интеграль есть уравненіе второй степени.

Разсмотримъ, на примѣръ, случай, когда уравненіе (16), имѣетъ три корня, равные нулю. Сначала имѣемъ

$$U = D + D'x + D''y, \quad U_1 = A + A'x + A''y = L,$$

потомъ

$$\begin{aligned} DL + D'M + D''N &= 0, \\ AL + A'M + A''N &= U, \end{aligned}$$

что нетрудно узнать. Если разсматриваемъ A, A', A'', D, D', D'' какъ данныя количества и если функции M, N опредѣляются двумя предъидущими уравненіями, то интеграль

дифференціального уравненія

$$L(x dy - y dx) - M dy + N dx = 0$$

будетъ

$$H U^2 - 2 U + L^2 = 0,$$

гдѣ H произвольная постоянная.

Случай дифференціальныхъ уравненій $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, не рѣшенныхъ относительно $\frac{dy}{dx}$.

668. Мы рассматривали до сихъ поръ дифференціальныя уравненія, рѣшенныя относительно производной, которая въ нихъ входитъ; мы сейчасъ разберемъ здѣсь нѣкоторые случаи, въ которыхъ можно получить искомый интегралъ, хотя данное дифференціальное уравненіе, именно.

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

не рѣшено относительно $\frac{dy}{dx}$.

1) Если данное уравненіе не содержитъ ни x , ни y , то оно имѣетъ видъ

$$F\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

и оно выражаетъ, что

$$\frac{dy}{dx} = \alpha,$$

гдѣ α есть корень уравненія $F(\alpha) = 0$. Интегрированіе даетъ $y = \alpha x + C$, гдѣ C есть постоянная; отсюда имѣемъ $\alpha = \frac{y-C}{x}$, и слѣдовательно, для искомаго интеграла имѣемъ

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0.$$

2) Когда данное уравненіе не содержитъ y , тогда интегрированіе, рѣшивъ уравненіе относительно $\frac{dy}{dx}$, приведется къ квад-

ратурамъ. Если произвести этого рѣшенія нельзя, но мы умѣемъ рѣшить его относительно x , то можно будетъ задачу опять привести къ квадратурамъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ

$$\frac{dy}{dx} = p, \text{ откуда } dy = p dx,$$

и предположимъ, что изъ даннаго уравненія имѣемъ

$$x = f(p);$$

черезъ дифференцированіе также будемъ имѣть $dx = f'(p) dp$ или, по причинѣ того, что $dx = \frac{dy}{p}$, имѣемъ

$$dy = p f'(p) dp;$$

это же есть дифференціальное уравненіе, въ которомъ переменныя y и p отдѣлены; взявъ интеграль, найдемъ

$$y = \int_{p_0}^p p f'(p) dp + C,$$

гдѣ C есть произвольная постоянная. Такимъ образомъ, имѣемъ два уравненія, выражающія значенія x и y въ функціи p ; когда будетъ возможно исключить p изъ этихъ уравненій, тогда интеграль даннаго уравненія будетъ выражаться уравненіемъ между x , y и C .

3) Когда данное уравненіе не содержитъ x и когда оно можетъ быть рѣшено относительно y , тогда искомый интеграль получимъ по только-что изложенному способу. Дѣйствительно, если, какъ и прежде, сдѣлаемъ

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

то данное уравненіе приметъ видъ

$$y = f(p),$$

и дифференцированіе дастъ

$$dy = f'(p) dp,$$

или

$$dx = \frac{f'(p)}{p} dp,$$

интегрирование даетъ

$$x = \int_{p_0}^p \frac{f'(p)}{p} dp + C,$$

гдѣ C постоянная. Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, иско-
мый интегралъ выражается двумя уравненіями между x , y ,
 C и переменнѣй p , которую надлежитъ исключить.

669. Случай только что нами разобранный заключается
въ томъ, гдѣ данное дифференціальное уравненіе можетъ
быть рѣшено относительно y . Предположимъ, что это урав-
неніе представлено въ видѣ

$$(1) \quad y = f(x, p),$$

гдѣ p означаетъ, какъ и прежде, производную $\frac{dy}{dx}$. Взявъ
дифференціалъ уравненія (1), найдемъ

$$(2) \quad p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx},$$

дифференціальное уравненіе перваго порядка между перемен-
ными x и p . Предположимъ, что мы умѣемъ найти интег-
ралъ

$$(3) \quad \Phi(x, p, C) = 0$$

этого уравненія (2); очевидно, исключеніе p изъ уравненій
(1) и (3) дастъ уравненіе

$$(4) \quad F(x, y, C) = 0$$

между x , y и постоянной C , которое будетъ общимъ ин-
теграломъ уравненія (1).

**О дифференціальныхъ уравненіяхъ линейныхъ относительно пере-
мѣнныхъ.**

670. Дифференціальныя уравненія, о которыхъ идетъ
здѣсь рѣчь, имѣютъ слѣдующій видъ

$$(1) \quad y = x \varphi(p) + \psi(p),$$

гдѣ имѣемъ

$$p = \frac{dy}{dx}$$

и гдѣ $\varphi(p)$, $\psi(p)$ означаютъ данныя функціи отъ p . Мы приложимъ здѣсь способъ, употребленный нами въ предыдущемъ параграфѣ; дифференцирование уравненія (1) даетъ

$$(2) \quad p dx = dx \varphi(p) + [x \varphi'(p) + \psi'(p)] dp$$

или

$$(3) \quad \frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x + \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} = 0.$$

Разсмотримъ x какъ функцію независимой переменнѣй p ; уравненіе (3) линейное и оно имѣетъ интеграль (§ 658)

$$(4) \quad x = e^{-\int_{p_0}^p \frac{\varphi'(p) dp}{\varphi(p) - p}} \left[C - \int_{p_0}^p e^{\int_{p_0}^p \frac{\varphi'(p) dp}{\varphi(p) - p}} \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} dp \right];$$

исключивъ p изъ уравненій (1) и (4), получимъ поэтому интеграль уравненія (1).

671. Полученныя только-что нами формулы дѣлаются неопредѣленными, когда $\varphi(p) = p$; этотъ случай заслуживаетъ того, чтобы быть разобраннѣмъ со вниманіемъ. Въ этомъ случаѣ уравненіе (1) есть

$$(5) \quad y = p x + \psi(p),$$

уравненіе (2), которое получается изъ него черезъ дифференцирование, приводится къ

$$(6) \quad [x + \psi'(p)] dp = 0.$$

Поэтому имѣемъ

$$(7) \quad dp = 0$$

или

$$(8) \quad x + \psi'(p) = 0.$$

Разсмотримъ сначала уравненіе (7); оно даетъ черезъ интегрирование

$$p = C,$$

гдѣ C есть постоянная; подставивъ это значеніе въ уравненіе (5), получимъ

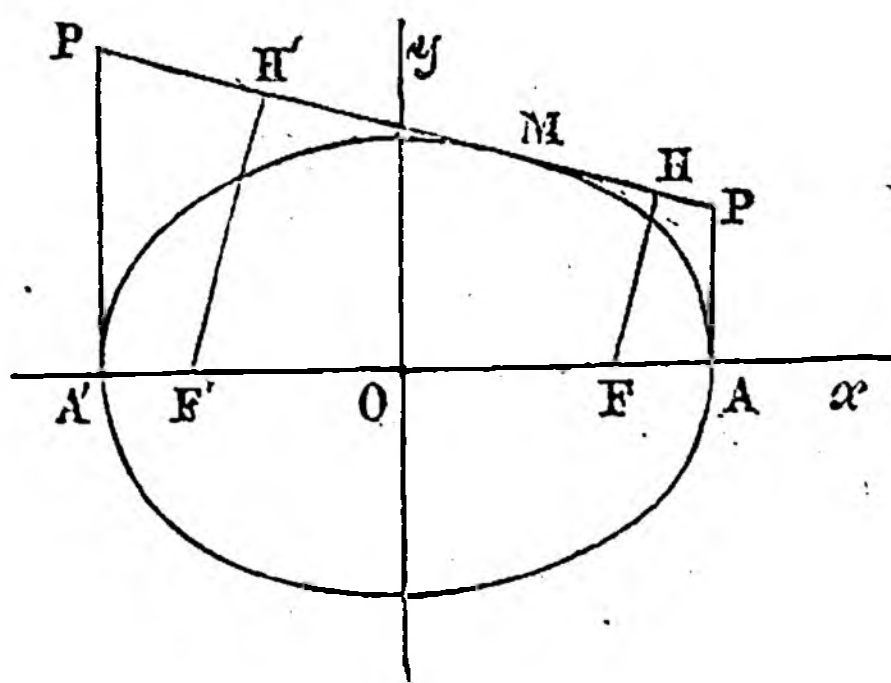
$$(9) \quad y = Cx + \psi(C),$$

это же есть общій интегралъ даннаго уравненія, какъ это мы видѣли въ § 651.

Разсмотримъ теперь уравненіе (8). Если опредѣлимъ изъ него значеніе p для подстановленія въ уравненіе (5), то будемъ имѣть рѣшеніе этого дифференціального уравненія, которое есть ни что иное какъ особое рѣшеніе, существованіе котораго намъ извѣстно. Этотъ результатъ согласуется съ теоріею особыхъ рѣшеній, рассмотрѣнныхъ нами въ предъидущей главѣ; дѣйствительно уравненіе (8) есть ни что иное, какъ производная уравненія (5) относительно $\frac{dy}{dx}$; исключеніе p должно поэтому дать особое рѣшеніе. Мы видимъ также, что необходимое вычисленіе для этого исключенія тождественно тому, которое требуетъ исключенія C изъ общаго интеграла (8) и его производной относительно C .

Приложеніе къ нѣкоторымъ примѣрамъ.

672. ЗАДАЧА I. — Даны двѣ точки F и F' , разстояніе между которыми есть $2c$; найти такую кривую, чтобы произведеніе разстояній этихъ точекъ отъ каждой касательной было бы равно данному количеству b^2 .



Возьмемъ прямую FF' за ось x и перпендикуляръ, возстановленный изъ середины O этой линіи, за ось y ; если сдѣлаемъ $\frac{dy}{dx} = p$, то уравненіе касательной въ точкѣ (x, y)

искомой кривой будетъ

$$Y - y = p (X - x).$$

Разстоянія FH , $F'H'$ до этой касательной точекъ F и F' имѣютъ значеніями

$$FH = \frac{y - px + pc}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad F'H' = \frac{y - px - pc}{\sqrt{1 + p^2}};$$

уравнение искомой кривой поэтому будетъ

$$\frac{(y - px)^2 - p^2 c^2}{1 + p^2} = \pm b^2,$$

или, сдѣлавъ $a^2 = c^2 \pm b^2$,

$$y = px + \sqrt{a^2 p^2 \pm b^2}.$$

Общій интеграль этого уравненія будетъ (§ 671)

$$y = Cx + \sqrt{a^2 C^2 \pm b^2},$$

гдѣ C означаетъ постоянную; оно выражаетъ прямыя линіи; но истинное рѣшеніе задачи дается особымъ рѣшеніемъ дифференціального уравненія, для котораго имѣемъ

$$x + \frac{a^2 C}{\sqrt{a^2 C^2 \pm b^2}} = 0 \quad \text{или} \quad x = \frac{-a^2 C}{\sqrt{a^2 C^2 \pm b^2}};$$

внеся это значеніе x въ предъидущее уравненіе, получимъ

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 C^2 \pm b^2}}.$$

и исключеніе C дастъ потомъ

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

уравненіе, выражающее эллипсъ или гиперболу, имѣющіе фокусами точки F и F' .

673. Задача II. — Даны двѣ параллельныя линіи и на каждой изъ нихъ опредѣленная точка; требуется найти кривую, которой касательныя отъскаютъ на данныхъ параллельныхъ линіяхъ, начиная отъ данныхъ точекъ, отръзки, которыхъ произведеніе равно данному количеству.

Пусть AP , $A'P'$ данныя параллельныя линіи; A и A' данныя точки на этихъ прямыхъ (см. чертежъ § 672); возьмемъ за ось x линію AA' и за ось y параллельную прямыхъ AP , $A'P'$, проведенную черезъ средину O линіи AA' . Касательная искомой кривой имѣетъ уравненіемъ

$$Y - y = p(X - x);$$

если же $2a$ означаетъ разстояніе AA' , то линіи AP , $A'P'$, заключающіяся между точками A , A' и касательной, имѣютъ значеніями

$$\pm AP = y - px - pa, \quad \pm A'P' = y - px + pa;$$

уравненіе задачи поэтому будетъ

$$(y - px)^2 - a^2 p^2 = \pm b^2$$

или

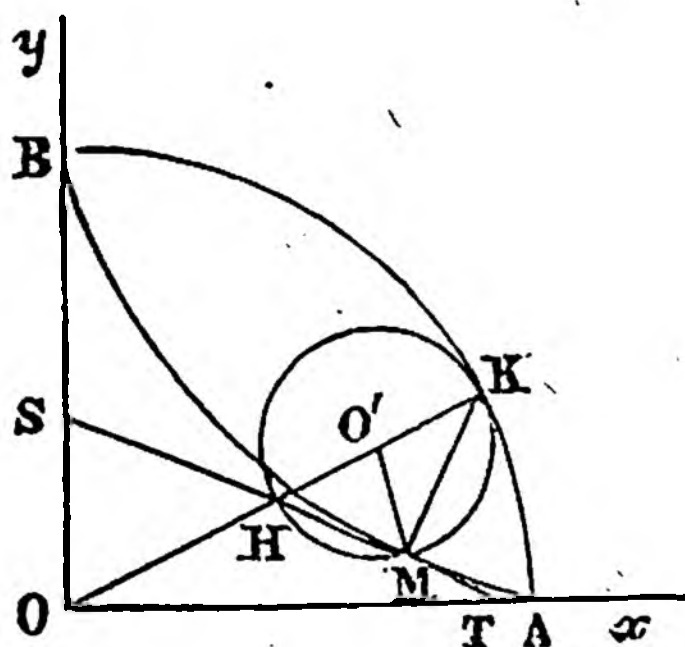
$$y = px + \sqrt{a^2 p^2 \pm b^2}.$$

Мы видимъ, что это уравненіе то же самое, что и въ предыдущей задачѣ. Истинное рѣшеніе опять дается здѣсь особымъ рѣшеніемъ

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

которое выражаетъ эллипсъ или гиперболу, отнесенную къ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ

674. ЗАДАЧА III. — Найти такую кривую, чтобы часть ея касательныхъ, заключающаяся между двумя прямоугольными прямыми, была равна данному количеству a .



Пусть будутъ T и S точки, гдѣ касательная искомой кривой

встрѣчаетъ данныя прямыя; если эти прямыя взяты за оси, то уравненіе касательной будетъ

$$Y - y = p(X - x),$$

и мы будемъ имѣть

$$\pm OS = y - px, \quad \pm OT = -\frac{y - px}{p};$$

уравненіе задачи поэтому будетъ

$$(y - px)^2 \left(1 + \frac{1}{p^2}\right) = a^2,$$

или

$$(1) \quad y = px + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Подобно тому какъ въ двухъ предъидущихъ задачахъ, общій интеграль получится, если замѣнимъ p постоянной, а особое рѣшеніе, выражающее искомую кривую, получится, если исключимъ p изъ дифференціального уравненія и производной относительно p , именно

$$(2) \quad 0 = x + \frac{a}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Изъ уравненій (1) и (2) имѣемъ

$$x = -\frac{a}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad y = \frac{ap^3}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}};$$

возвысивъ эти уравненія въ степень $\frac{2}{3}$ и сложивъ потомъ, получимъ уравненіе

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

выражающее циклоиду, образованную кругомъ радіуса $\frac{a}{4}$, катящегося внутри круга радіуса a .

Этотъ результатъ можетъ быть полученъ очень просто помощью геометрическихъ разсмотрѣній. Дѣйствительно, построимъ на OS и OT прямоугольникъ $OSKT$, соединимъ точки O и K линіей OK , которая встрѣтитъ ST въ T , и опи-

шемъ окружность АКВ изъ О какъ изъ центра радіусомъ $OK=a$; опишемъ наконецъ кругъ O' на НК какъ на діаметрѣ, и пусть будетъ М точка, гдѣ окружность этого круга снова встрѣчаетъ прямую ST. Уголъ КНТ вдвое болѣе КОА и составляетъ половину угла $KO'M$; этотъ послѣдній поэтому въ четыре раза болѣе КОА; сверхъ того, радіусъ $O'K$ есть четверть радіуса ОК; поэтому обѣ дуги круга КМ и КА равны между собой. Отсюда слѣдуетъ, что геометрическое мѣсто точки М есть эпициклоида, начало которой находится въ А; мы знаемъ, что МН или ST есть касательная къ этой эпициклоидѣ, которая есть такимъ образомъ огибающая движущейся прямой ST.

Задача о траекторіяхъ.

675. Задача, о которой идетъ здѣсь рѣчь, слѣдующая:

Дана система кривыхъ, определяемыхъ уравненіемъ, содержащимъ переменный параметръ; найти линіи, пересѣкающія данныя кривыя подъ даннымъ угломъ.

Когда данный уголъ прямой, искомыя кривыя называются *ортогональными траекторіями* данныхъ кривыхъ.

Задача траекторій постоянно приводитъ къ дифференціальному уравненію перваго порядка. Предположимъ, что данныя кривыя отнесены къ двумъ прямоугольнымъ осямъ, и опредѣлимъ ихъ уравненіемъ

$$(1) \quad F(x, y, \alpha) = 0,$$

гдѣ α есть переменный параметръ. Пусть $M(x, y)$ одна изъ точекъ пересѣченія одной изъ кривыхъ (1) съ одной изъ искомыхъ траекторій, и означимъ черезъ c, c_1 коэффициенты наклоненія касательныхъ въ М къ двумъ кривымъ, черезъ V тангенсъ даннаго угла между этими же кривыми; будемъ имѣть

$$\frac{c_1 - c}{1 + cc_1} = V;$$

коэффициентъ c есть значеніе $\frac{dy}{dx}$, полученное изъ уравненія (1);

слѣдовательно, имѣемъ

$$c = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}};$$

потомъ, такъ какъ c_1 есть значеніе $\frac{dy}{dx}$ относительно искомой кривой, то

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dy}{dx}} = V$$

или

$$(2) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y} + V \frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{dy}{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} - V \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0;$$

если же исключимъ α изъ уравненій (1) и (2), то получимъ конечное уравненіе

$$(3) \quad \Phi \left(x, y, \frac{dy}{dx} \right) = 0,$$

которое будетъ дифференціальнымъ уравненіемъ искомымъ траекторій.

Въ случаѣ ортогональныхъ траекторій имѣемъ $V = \infty$, и уравненіе (2) приводится къ

$$(4) \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dy}{dx} = 0;$$

исключеніе α изъ уравненій (1) и (4) будетъ дифференціальное уравненіе ортогональныхъ траекторій.

676. П р и м ѣ р ъ I. — *Найти кривыя, перестѣкающія подъ даннымъ и постояннымъ угломъ кривыя, определяемыя въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ $y = \alpha x^m$.*

Значеніе $\frac{dy}{dx}$, выведенное изъ этого уравненія, есть $m\alpha x^{m-1}$ или $m \frac{y}{x}$; если поэтому означимъ черезъ $\frac{1}{k}$ тангенсъ даннаго угла, то дифференціальное уравненіе искомымъ траекторій будетъ

$$\frac{\frac{dy}{dx} - m \frac{y}{x}}{1 + m \frac{y}{x} \frac{dy}{dx}} = \frac{1}{k} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{m \frac{y}{x} + \frac{1}{k}}{1 - \frac{m y}{k x}}.$$

Вторая часть этого уравненія есть функція отъ $\frac{y}{x}$; слѣдовательно, это уравненіе можно будетъ интегрировать по методу § 654.

Разберемъ случай $m = 1$; данныя кривыя приводятся къ системѣ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало; дифференціальное уравненіе тогда есть

$$x dx + y dy = k (x dy - y dx).$$

Мы видимъ непосредственно, что $x dy - y dx$ есть удвоенный дифференціалъ сектора, образованнаго радіусомъ-векторомъ точки (x, y) съ неподвижнымъ радіусомъ, въ системѣ же полярныхъ координатъ этотъ самый дифференціалъ выражается черезъ $\rho^2 d\omega$. Равнымъ образомъ $x dx + y dy$ есть половина дифференціала $\rho d\rho$ квадрата ρ^2 ; поэтому имѣемъ

$$\rho d\rho = k \rho^2 d\omega \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{\rho} = k d\omega,$$

и интегрированіе даетъ

$$\rho = C e^{k\omega},$$

гдѣ C есть произвольная постоянная. Мы видимъ, что искомыя траекторіи суть логариѳмическія спирали, что согласуется съ извѣстнымъ свойствомъ этихъ кривыхъ (§ 247).

677. П Р И М Ѣ Р Ъ II. — *Найти ортогональныя траекторіи системы однофокусныхъ эллипсовъ.*

Уравненіе данныхъ эллипсовъ есть

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} = 1;$$

гдѣ ρ означаетъ переменный параметръ и b данное количество. Дифференцированіе даетъ

$$\frac{x dx}{\rho^2} = \frac{y dy}{b^2 - \rho^2} = \frac{x dx + y dy}{b^2},$$

отсюда имѣемъ

$$\frac{x^2}{\rho^2} = \frac{x}{dx} \frac{x dx + y dy}{b^2}, \quad \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} = - \frac{y}{dy} \frac{x dx + y dy}{b^2},$$

сложивъ потомъ, получимъ

$$\frac{(x dy - y dx)(x dx + y dy)}{b^2 dx dy} = 1.$$

Это уравненіе принадлежитъ даннымъ эллипсамъ. Чтобы вычислить уравненіе ортогональныхъ траекторій, нужно замѣнить $\frac{dy}{dx}$ черезъ $-\frac{dx}{dy}$ или dy черезъ $-dx$ и dx черезъ dy ; но уравненіе остается тѣмъ же самымъ послѣ такого подстановленія; поэтому его интеграль остается тѣмъ же интеграломъ и слѣдовательно, уравненіе данныхъ эллипсовъ въ то же время представляетъ искомыя траекторіи. Только для различенія двухъ системъ, нужно замѣнить ρ^2 другимъ параметромъ μ^2 и написать

$$\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \mu^2} = 1.$$

Если предположимъ $\mu^2 < b^2$, то это уравненіе представитъ гиперболы, имѣющія съ данными эллипсами одни и тѣ же фокусы и пересѣкающія ихъ подъ прямымъ угломъ.

678. П р и м ѣ р ъ III. — *Найти ортогональныя траекторіи равностороннихъ гиперболъ, которыхъ центръ находится въ данной точкѣ и которыя проходятъ черезъ вторую данную точку.*

Въ системѣ полярныхъ координатъ данныя гиперболы имѣютъ уравненіемъ

$$\rho^2 = \frac{a^2 \cos 2\alpha}{\cos(2\omega - 2\alpha)} \quad \text{или} \quad \cot(2\omega - 2\alpha) = \frac{a^2 \sin 2\omega}{\rho^2 - a^2 \cos 2\omega},$$

гдѣ α переменный параметръ и a означаетъ разстояніе данной точки отъ общаго центра. Логарифмическое дифференцирование даетъ

$$\frac{d\rho}{\rho} = \tan(2\omega - 2\alpha) \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\rho^2 - a^2 \cos 2\omega}{a^2 \sin 2\omega}.$$

Но $\frac{d\rho}{\rho d\omega}$ есть тангенсъ угла, образуемаго нормалью кривой съ радіусомъ-векторомъ; мы получимъ поэтому дифференціальное уравненіе искомымъ кривыхъ, если возьмемъ для $\frac{d\rho}{\rho d\omega}$ обратное значеніе предыдущаго уравненія съ измѣненнымъ знакомъ; такимъ образомъ, имѣемъ

$$\frac{d\rho}{\rho d\omega} = \frac{a^2 \sin 2\omega}{a^2 \cos 2\omega - \rho^2}$$

или

$$\frac{d(a^2 \cos 2\omega)}{d\rho} = -\frac{2}{\rho} (a^2 \cos 2\omega) + 2\rho.$$

Это уравненіе будетъ линейнымъ, когда переменными возьмемъ $a^2 \cos 2\omega$ и ρ ; означая черезъ $a^4 - b^4$ произвольную постоянную, найдемъ интеграль

$$a^2 \cos 2\omega = \frac{1}{2\rho^2} [\rho^4 + a^4 - b^4]$$

или

$$\rho^4 - 2a^2 \rho^2 \cos 2\omega + a^4 = b^4;$$

это уравненіе, въ которомъ b есть переменный параметръ, представляетъ систему оваловъ Кассини (§ 565), имѣющихъ тѣ же фокусы.

О множителяхъ способныхъ привести къ полному дифференціалу выраженіе вида $Pdx + Qdy$.

679. Пусть будетъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

рѣшенное относительно производной $\frac{dy}{dx}$; можно положить безконечнымъ числомъ различныхъ способовъ

$$F(x, y) = -\frac{P}{Q},$$

гдѣ P и Q суть функціи отъ x и y ; тогда данное уравненіе приметъ видъ

$$P dx + Q dy = 0.$$

Если функции P и Q были такъ выбраны, что $P dx + Q dy$ есть полный дифференціалъ, когда рассматриваемъ x и y какъ независимыя переменныя, и если имѣемъ

$$du = P dx + Q dy,$$

гдѣ u есть функция отъ x и y , то очевидно, что интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія будетъ

$$u = \text{const.}$$

Если, послѣ выбора функций, означенныхъ черезъ P и Q , жеедемъ взять другія, то эти послѣднія будутъ соотвѣтственно равны первымъ, умноженнымъ на одного и того же множителя v , и данное дифференціальное уравненіе будетъ имѣть видъ

$$v P dx + v Q dy = 0.$$

Тогда, если первая часть есть полный дифференціалъ функции u переменныхъ x и y , интегралъ даннаго уравненія, какъ мы только-что сказали, будетъ

$$u = \text{const.}$$

Такъ какъ функции P и Q были выбраны по произволу, то существуетъ постоянно множитель v , который удовлетворяетъ только-что сдѣланному предположенію; что мы и имѣемъ здѣсь доказать.

680. Т Е О Р Е М А I. — Пусть P и Q двѣ данныя функции двухъ независимыхъ переменныхъ x , y ; постоянно существуетъ такой множитель v , что отъ умноженія выраженія $P dx + Q dy$ на этотъ множитель получается полный дифференціалъ.

Дѣйствительно, рассмотримъ дифференціальное уравненіе

$$(1) \quad P dx + Q dy = 0;$$

мы знаемъ, что это уравненіе допускаетъ интегралъ и если предположимъ этотъ интегралъ рѣшеннымъ относительно

произвольной постоянной, которую онъ содержитъ, то онъ будетъ имѣть видъ

$$(2) \quad u = C,$$

гдѣ u есть функція переменныхъ x и y . Уравненіе (2) даетъ черезъ дифференцирование

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0,$$

и намъ нужно, чтобы значеніе $\frac{dy}{dx}$, полученное изъ уравненія (3), было бы равно именно тому, которое даетъ дифференціальное уравненіе (1); поэтому имѣемъ

$$(4) \quad \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{Q}.$$

Это уравненіе (4) имѣетъ мѣсто въ силу уравненія (2), но я прибавляю, что оно есть тождество, такъ какъ оно не зависитъ отъ C , и значеніе y , данное уравненіемъ (2), есть функція отъ x и C .

Если означимъ черезъ v значеніе каждой изъ двухъ частей уравненія (4), то будемъ имѣть

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v Q,$$

и, слѣдовательно,

$$(5) \quad v (P dx + Q dy) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du.$$

Выраженіе $P dx + Q dy$ поэтому дѣлается полнымъ дифференціаломъ, когда оно было умножено на множитель v .

681. ТЕОРЕМА II. — Существуетъ безконечное число множителей, способныхъ обратить выраженіе $P dx + Q dy$ въ полный дифференціалъ.

Въ самомъ дѣлѣ, мы только-что доказали, что существуетъ такой множитель; означивъ его черезъ v , имѣемъ

$$v (P dx + Q dy) = du,$$

гдѣ u есть функція отъ x и y . Если умножимъ это уравненіе на какую-нибудь функцію $\varphi(u)$ отъ u , то получимъ

$$v\varphi(u)(Pdx + Qdy) = \varphi(u) du,$$

это же опять есть полный дифференціалъ.

Такимъ образомъ, какая бы ни была функція $\varphi(u)$, выраженіе $Pdx + Qdy$ дѣлается полнымъ дифференціаломъ, когда умножаемъ его на множитель $v\varphi(u)$.

Я прибавляю, то $v\varphi(u)$ есть общее выраженіе множителей, обладающихъ этимъ свойствомъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть V одинъ изъ этихъ множителей и предположимъ, что имѣемъ

$$V(Pdx + Qdy) = dU,$$

гдѣ U есть функція отъ x и отъ y , будемъ имѣть

$$Pdx + Qdy = \frac{dU}{V} = \frac{du}{v},$$

откуда

$$dU = \frac{V}{v} du.$$

Но такъ какъ u есть функція отъ x и y , то y можно разсматривать какъ функцію отъ u и x ; предъидущая же формула показываетъ, что частная производная отъ U относительно x есть нуль. Слѣдовательно U есть функція отъ u то же самое относится и къ ея производной $\frac{\partial u}{\partial U}$, и мы можемъ написать

$$\frac{V}{v} = \varphi(u) \text{ или } V = v\varphi(u),$$

что и требовалось доказать.

682. Т Е О Р Е М А III. — Если V и v означаютъ два множителя, способныхъ привести выраженіе $Pdx + Qdy$ къ полному дифференціалу, и если отношеніе этихъ множителей не приводится къ постоянной величинѣ, то общій интегралъ дифференціального уравненія $Pdx + Qdy = 0$ будетъ $\frac{V}{v} = C$, гдѣ C произвольная постоянная.

Въ самомъ дѣлѣ, по предположенію имѣемъ

$$v (P dx + Q dy) = du,$$

а такъ какъ произведеніе $V(Pdx + Qdy)$ есть также полный дифференціалъ, то по предыдущей теоремѣ имѣемъ

$$\frac{V}{v} = \varphi(u),$$

гдѣ $\varphi(u)$ означаетъ нѣкоторую функцію отъ u .

Положивъ это, дифференціальное уравненіе

$$P dx + Q dy = 0$$

можетъ быть представлено въ видѣ

$$du = 0;$$

поэтому его интегралъ есть $u = \text{const.}$, или, что приведетъ къ тому же,

$$\varphi(u) = \text{const.}$$

или

$$\frac{V}{v} = C,$$

гдѣ C произвольная постоянная.

Мы найдемъ дальше важныя приложенія этой теоремы.

683. Множитель v , обращающій $Pdx + Qdy$ въ полный дифференціалъ, не только даетъ общій интегралъ дифференціального уравненія $Pdx + Qdy = 0$, но также снабжаетъ непосредственно и особымъ рѣшеніемъ, если только оно существуетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, дифференціальное уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ¹²²

$$\frac{1}{v} du = 0,$$

и слѣдовательно, оно разлагается на два другихъ

$$du = 0, \quad \frac{1}{v} = 0;$$

первое, $du = 0$, даетъ общій интегралъ; второе содержитъ особыя рѣшенія.

Этотъ результатъ можно еще вывести изъ нашей теоріи особыхъ рѣшеній. Дѣйствительно, такъ какъ общій интегралъ здѣсь есть

$$u - C = 0,$$

то нужно, для полученія особыхъ рѣшеній, отношеніе частныхъ производныхъ $u - C$ относительно C и y или относительно C и x приравнять нулю; первая изъ этихъ производныхъ приводится здѣсь къ -1 , и мы имѣемъ

$$\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial y}} = 0, \quad \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}} = 0;$$

по причинѣ же

$$du = v (P dx + Q dy),$$

эти уравненія даютъ

$$\frac{1}{v} = 0.$$

Разысканіе множителя, способнаго привести $Pdx + Qdy$ къ полному дифференціалу.

§84. Условіе, для того чтобы выраженіе

$$(1) \quad vP dx + vQ dy$$

было полнымъ дифференціаломъ, есть (§ 483)

$$\frac{\partial (v P)}{\partial y} = \frac{\partial (v Q)}{\partial x}$$

или

$$(2) \quad P \frac{\partial v}{\partial y} - Q \frac{\partial v}{\partial x} = v \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Это уравненіе, отъ котораго зависитъ неизвѣстная функція v , есть уравненіе въ частныхъ производныхъ; разысканіе v составляетъ поэтому задачу болѣе высшаго порядка,

чѣмъ та, которая имѣетъ цѣлью интегрированіе дифференціального уравненія

$$P dx + Q dy = 0;$$

однако есть случаи, въ которыхъ множитель v можетъ быть легко полученъ; мы укажемъ здѣсь самые простые.

685. Случаи, гдѣ P и Q суть однородныя функціи одной и той же степени. — Если P и Q суть однородныя функціи степени m , то можно найти такую однородную функцію v известной степени n , чтобы

$$(1) \quad vP dx + vQ dy$$

былъ полный дифференціалъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть v однородная функція степени n ; vP будетъ однородная функція степени $m+n$, и мы будемъ имѣть тождественно (§ 84 и 136)

$$x \frac{\partial (vP)}{\partial x} + y \frac{\partial (vP)}{\partial y} = (m+n) vP.$$

Условіе, для того чтобы выраженіе (1) было полнымъ дифференціаломъ, именно:

$$(2) \quad \frac{\partial (vQ)}{\partial x} = \frac{\partial (vP)}{\partial y},$$

можетъ быть написано слѣдующимъ образомъ:

$$x \frac{\partial (vP)}{\partial x} + y \frac{\partial (vQ)}{\partial x} = (m+n) vP,$$

или, по причинѣ $y \frac{\partial (vQ)}{\partial x} = \frac{\partial (vQy)}{\partial x}$ и $x \frac{\partial (vP)}{\partial x} = \frac{\partial (vPx)}{\partial x} - vP$, слѣдующимъ способомъ:

$$\frac{\partial [v(Px + Qy)]}{\partial x} = (m+n+1) vP.$$

Такъ какъ число n неопредѣленное, то положимъ

$$m+n+1=0;$$

тогда условіе (2) приведетъ къ такому

$$(3) \quad \frac{\partial [v(Px + Qy)]}{\partial x} = 0;$$

подобнымъ же разсужденіемъ доказали бы, что условіе (2) можетъ быть представлено въ видѣ

$$(4) \quad \frac{\partial [v(Px + Qy)]}{\partial y} = 0.$$

Формулы (3) и (4) показываютъ, что $v(Px + Qy)$ есть постоянная; взявъ эту постоянную равную 1, получимъ

$$(5) \quad v = \frac{1}{Px + Qy}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если P и Q суть однородныя функціи одной и той же степени, то выраженіе

$$\frac{Pdx + Qdy}{Px + Qy}$$

будетъ полнымъ дифференціаломъ.

Поэтому, если надлежитъ интегрировать дифференціальное уравненіе

$$(6) \quad Pdx + Qdy = 0,$$

то достаточно отыскать, по способу § 483, интеграль дифференціала $\frac{Pdx + Qdy}{Px + Qy}$, и приравнять потомъ этотъ интеграль произвольной постоянной.

Если первая часть уравненія (6) есть полный дифференціаль, то намъ извѣстно два множителя, $\frac{1}{Px + Qy}$ и 1, способные привести $Pdx + Qdy$ къ полному дифференціалу; если поэтому приравняемъ постоянной C частное этихъ двухъ множителей, то получимъ (§ 682) общій интеграль уравненія (6), который будетъ

$$Px + Qy = C.$$

Нужно замѣтить, что предъидущій методъ въ сущности не отличается отъ того, который мы употребили въ § 654 дѣйствительно, пусть

$$\frac{P}{Q} = -f\left(\frac{y}{x}\right),$$

первая часть уравненія (6) приведется къ

$$Q \left[dy - f \left(\frac{y}{x} \right) dx \right],$$

или, положивъ $y = xz$, $dy = xdz + zdx$, къ

$$Qx[z - f(z)] \left[\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z - f(z)} \right].$$

Это есть то преобразование, которое мы употребили для отдѣленія переменныхъ въ § 654, и мы видимъ, что предъидущее выраженіе дѣлается полнымъ дифференціаломъ, если умножимъ его на множитель

$$\frac{1}{Qx[z - f(z)]} = \frac{1}{Px + Qy}.$$

686. Можно еще легко опредѣлить множитель v , способный привести

$$P dx + Q dy$$

къ полному дифференціалу, когда этотъ множитель зависитъ только отъ одной переменной x или y . Предположимъ, на-примѣръ, что v зависитъ только отъ x , тогда будемъ имѣть $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, и уравненіе (2) § 685 обращается въ

$$\frac{\frac{dv}{dx}}{v} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}.$$

Наше предположеніе требуетъ, чтобы мы имѣли

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = X,$$

гдѣ X есть функція отъ x . Если это имѣетъ мѣсто, то будемъ имѣть

$$\frac{dv}{v} = X dx,$$

откуда

$$\log v = \int_{x_0}^{x_1} X dx + \text{const.},$$

и мы можемъ взять

$$v = e^{\int_{x_0}^x X dx}$$

Предположимъ, какъ это возможно, $Q = 1$; въ этомъ случаѣ производная $\frac{\partial P}{\partial y}$ не зависитъ отъ y , и мы имѣемъ

$$P = Xy + X_1$$

гдѣ X и X_1 суть функціи отъ x ; слѣдовательно, данное выраженіе имѣетъ видъ

$$dy + (Xy + X_1) dx,$$

и множитель, дѣлающій его интегрируемымъ, есть $e^{\int_{x_0}^x X dx}$. На основаніи этого, для интегрированія линейнаго уравненія

$$dy + (Xy + X_1) dx = 0,$$

которымъ мы занимались въ § 658, достаточно умножить его на множитель, только-что нами полученный; такимъ образомъ оно будетъ

$$dy e^{\int_{x_0}^x X dx} + y e^{\int_{x_0}^x X dx} X dx + e^{\int_{x_0}^x X dx} X_1 dx = 0,$$

откуда, чрезъ интегрированіе,

$$y e^{\int_{x_0}^x X dx} + \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^x X dx} X_1 dx = C,$$

гдѣ C произвольная постоянная.

687. Разберемъ, наконецъ, случай, гдѣ выраженіе $Pdx + Qdy$ дѣлается полнымъ дифференціаломъ, когда умножаемъ его на множитель v вида XU , гдѣ X и U соотвѣтственно суть функціи отъ x и y . Уравненіе условія здѣсь есть

$$\frac{\partial (XUP)}{\partial y} = \frac{\partial (XUQ)}{\partial x},$$

или

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\partial X}{\partial x} - P \frac{\partial U}{\partial y},$$

это же требуетъ, чтобы разность $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ была вида

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q\varphi(x) - P\varphi(y).$$

Когда это условіе выполнено, то можно сдѣлать

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{dx} = \varphi(x), \quad \frac{1}{Y} \frac{dY}{dy} = \varphi(y),$$

откуда

$$X = e^{\int_{x_0}^x \varphi(x) dx}, \quad Y = e^{\int_{y_0}^y \varphi(y) dy}, \quad v = XY.$$

Приложеніе интегральнаго исчисленія къ опредѣленію основныхъ свойствъ простыхъ трансцендентныхъ функцій съ алгебраическими дифференціалами.

688. Интегральное исчисленіе очень легко приводитъ къ отличительнымъ свойствамъ логарисмовъ и обратныхъ круговыхъ функцій. Если теорія этихъ трансцендентныхъ функцій не была предварительно составлена, то мы точно положили основанія первыхъ шаговъ, сдѣланныхъ нами въ теоріи дифференціальныхъ уравненій, какъ это и было дѣйствительно съ эллиптическими функціями и трансцендентными съ болѣе сложными алгебраическими дифференціалами. Я намѣреваюсь войти здѣсь въ нѣкоторыя подробности по этому предмету.

Разсмотримъ дифференціальное уравненіе

$$(1) \quad \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0;$$

переменные отдѣлены, но интегрированіе каждаго члена требуетъ понятія о логарисмахъ. Если это понятіе не приобрѣтено, то интеграль долженъ быть выраженъ черезъ

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \frac{dy}{y} = C.$$

Если желаемъ, чтобы значеніе y обращалось для $x = 1$ въ

данное количество z , то нужно будетъ опредѣлить постоянную изъ условія

$$\int_1^z \frac{dy}{y} = C \quad \text{или} \quad \int_1^z \frac{dz}{z} = C,$$

если напишемъ z вмѣсто y подъ знакомъ \int ; тогда нашъ интегралъ будетъ

$$(2) \quad \int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \frac{dy}{y} = \int_1^z \frac{dz}{z}.$$

Съ другой стороны очевидно, что уравненіе (1) допускаетъ алгебраическій интегралъ; потому что, если освободимся отъ знаменателей, то оно будетъ

$$y \, dx + x \, dy = 0 \quad \text{или} \quad d(xy) = 0;$$

поэтому интегралъ есть

$$xy = \text{const.};$$

если же опредѣлимъ постоянную такъ, чтобы имѣли $y = z$ для $x = 1$, то будемъ имѣть

$$(3) \quad xy = z.$$

Мы видимъ, что уравненія (2) и (3) выражаютъ одно и то же соотношеніе между количествами x , y , z ; иначе, они равнозначащи.

Такъ такъ трансцендентная функція $\int_1^x \frac{dx}{x}$ встрѣтилась намъ въ первый разъ, то мы должны дать ей имя; я выбираю имя *логарифмъ* и полагаю

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x;$$

тогда формула (2), если подставимъ въ нее xy вмѣсто z , дастъ намъ

$$\log xy = \log x + \log y;$$

это же есть основное свойство логарифмовъ.

Вмѣсто логарифмовъ мы можемъ ввести обратныя функціи. Пусть будутъ

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = u, \quad \int_1^y \frac{dy}{y} = v, \quad \int_1^z \frac{dz}{z} = w;$$

такъ какъ u есть функція отъ x , то x можно разсматривать какъ функцію отъ u ; означимъ эту функцію символомъ e^u , будемъ имѣть

$$x = e^u, \quad y = e^v, \quad z = e^w;$$

уравненія (2) и (3) тогда будутъ

$$u + v = w, \quad e^u \cdot e^v = e^w,$$

откуда

$$e^{u+v} = e^u \cdot e^v,$$

это же выражаетъ основное свойство показательной функціи.

689. Разсмотримъ теперь дифференціальное уравненіе

$$(4) \quad \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0;$$

переменные отдѣлены, и если означимъ черезъ z значеніе, принимаемое y , когда $x = 0$, интеграль можетъ быть выраженъ черезъ

$$(5) \quad \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^y \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Съ другой стороны, уравненіе (4) можетъ быть написано такъ:

$$[1 - xy + y(x + y)] dx + [1 - xy + x(x + y)] dy = 0,$$

или

$$(1 - xy) d(x + y) - (x + y) d(1 - xy) = 0,$$

или, наконецъ,

$$\frac{(1 - xy) d(x + y) - (x + y) d(1 - xy)}{(1 - xy)^2} = 0;$$

первая часть есть дифференціалъ $\frac{x+y}{1-xy}$, количества, обра-

щающагося въ z для $x = 0, y = z$; поэтому интеграль уравненія (4), выраженный уравненіемъ (5), можетъ также быть выраженъ уравненіемъ

$$(6) \quad \frac{x + y}{1 - xy} = z.$$

Положимъ

$$\int_0^x \frac{dx}{1 + x^2} = u, \quad \int_0^y \frac{dy}{1 + y^2} = v, \quad \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = w;$$

такъ какъ u есть функція отъ x , то x можно разсматривать какъ функцію отъ u ; означимъ эту функцію символомъ $\text{tang } u$; будемъ имѣть

$$x = \text{tang } u, \quad y = \text{tang } v, \quad z = \text{tang } w;$$

далѣе уравненія (5) и (6) дадутъ

$$u + v = w, \quad \frac{\text{tang } u + \text{tang } v}{1 - \text{tang } u \text{ tang } v} = \text{tang } w,$$

и слѣдовательно,

$$\text{tang } (u + v) = \frac{\text{tang } u \text{ tang } v}{1 - \text{tang } u \text{ tang } v};$$

это же есть основное свойство функціи $\text{tang } u$.

690. Разсмотримъ уравненіе

$$(7) \quad \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0.$$

Интеграль, взятый такъ, чтобы y для $x = 0$ обращался въ z , очевидно будетъ

$$(8) \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}};$$

но если умножимъ уравненіе (7) на множитель $\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2} - yx$, то получимъ

$$\left[\sqrt{1 - y^2} dx - x \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} \right] + \left[\sqrt{1 - x^2} dy - y \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} \right] = 0$$

или

$$d(x\sqrt{1-y^2}) + d(y\sqrt{1-x^2}) = 0;$$

интеграль уравненія (7), взятый для $x=0$ такъ, чтобы $y=z$, можетъ поэтому быть представленъ въ такомъ видѣ

$$(9) \quad x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = z.$$

Сверхъ того первая часть уравненія (7), которая есть полный дифференціалъ, остается полнымъ дифференціаломъ, когда умножаемъ его на множитель

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy;$$

достаточно поэтому (§ 682) приравнять этотъ множитель постоянной, чтобы получить интеграль уравненія (7). Если опредѣлимъ эту постоянную изъ условія, что для $x=0$ $y=z$ то будемъ имѣть

$$(10) \quad \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy = \sqrt{1-z^2},$$

слѣдовательно, каждое изъ трехъ уравненій (8), (9), (10) выражаетъ одно и то же соотношеніе между количествами x , y , z ; два послѣднихъ алгебраическія, между тѣмъ какъ первое трансцендентное.

Положимъ

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = u, \quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = v, \quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = w.$$

Такъ такъ u есть функція отъ x , то мы можемъ разсматривать x и $\sqrt{1-x^2}$ какъ функціи отъ u ; означимъ эти функціи символами $\sin u$, $\cos u$; будемъ имѣть

$$\begin{aligned} x &= \sin u, & y &= \sin v, & z &= \sin w, \\ \sqrt{1-x^2} &= \cos u, & \sqrt{1-y^2} &= \cos v, & \sqrt{1-z^2} &= \cos w; \end{aligned}$$

уравненіе (8) сдѣлается такимъ:

$$u + v = w,$$

и уравненія (9) и (10) дадутъ

$$\begin{aligned} \sin(u+v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v, \\ \cos(u+v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v, \end{aligned}$$

формулы, выражающія основное свойство функцій *синусъ* и *косинусъ*. Можно бы легко снова найти, по этому способу, другія извѣстныя свойства, такъ, напр., свойство періодичности; но бесполезно болѣе останавливаться на этомъ предметѣ, и мы сейчасъ приложимъ, какъ это дѣлалъ Эйлеръ, разсмотрѣнія, только-что нами употребленныя, къ доказательству отличительнаго свойства эллиптическихъ функцій.

Основное свойство эллиптическихъ функцій.

691. Разсмотримъ дифференціальное уравненіе

$$(1) \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2} \sqrt{1-k^2 y^2}} = 0,$$

гдѣ k^2 означаетъ данную постоянную, заключенную между 0 и 1. Переменные здѣсь отдѣлены, поэтому, если возьмемъ интеграль уравненія (1) такъ, чтобы для $x=0$ y обращался въ z , то будемъ имѣть

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2} \sqrt{1-k^2 y^2}} \\ & = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2} \sqrt{1-k^2 z^2}}, \end{aligned} \right.$$

формулу, гдѣ каждый членъ есть эллиптическій интеграль перваго рода.

Эйлеръ показалъ, что уравненіе (1) допускаетъ алгебраическій интеграль; не трудно найти этотъ интеграль, поступивъ слѣдующимъ образомъ.

Положимъ

$$X = (1-x^2) (1-k^2 x^2),$$

$$Y = (1-y^2) (1-k^2 y^2),$$

данное уравненіе будетъ

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

или же, уничтоживъ знаменатели и умноживъ его, сверхъ того, на неопредѣленную функцію T отъ x и y , будетъ

$$(3) \quad T \sqrt{Y} dx + T \sqrt{X} dy = 0.$$

Но

$$T \sqrt{Y} dx = d(T \sqrt{Y} \times x) - \frac{T x dY}{2 \sqrt{Y}} - x \sqrt{Y} dT,$$

$$T \sqrt{X} dy = d(T \sqrt{X} \times y) - \frac{T y dX}{2 \sqrt{X}} - y \sqrt{X} dT,$$

и уравнение (3) может быть, такимъ образомъ, представлено подъ видомъ

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} d [T, (x \sqrt{Y} + y \sqrt{X})] - \frac{T}{2} \left(\frac{x Y' dy}{\sqrt{Y}} + \frac{y X' dx}{\sqrt{X}} \right) \\ - (x \sqrt{Y} + y \sqrt{X}) dT = 0, \end{aligned} \right.$$

гдѣ X' и Y' означаютъ производныя $\frac{dX}{dx}$, $\frac{dY}{dy}$.

Теперь, можно неопредѣленную функцію T взять такъ, чтобы уравнение (4) приводилось просто къ

$$(5) \quad d [T (x \sqrt{Y} + y \sqrt{X})] = 0.$$

Для этого нужно и достаточно, чтобы другіе члены уравненія (4) въ силу уравненія (1) уничтожались. Замѣнимъ поэтому dT черезъ

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy$$

и замѣтимъ, что dx и dy , на основаніи уравненія (1), пропорціональны \sqrt{X} и $-\sqrt{Y}$; условіе, которому должно удовлетворять T , будетъ

$$(6) \quad \frac{T}{2} (x Y' - y X') - (y \sqrt{X} + x \sqrt{Y}) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \sqrt{X} - \frac{\partial T}{\partial y} \sqrt{Y} \right) = 0.$$

Это есть уравненіе въ частныхъ производныхъ; но для насъ достаточно узнать какое-нибудь рѣшеніе. Натурально узнать не существуетъ ли раціональнаго значенія T ; очевидно, что, если это значеніе существуетъ, оно должно быть такимъ, чтобы частныя производныя $\frac{\partial T}{\partial x}$ и $\frac{\partial T}{\partial y}$ были пропорціональны y и x дабы радикалы исчезли изъ уравненія (6). Мы выполнимъ это условіе, если возьмемъ для T функцію произ-

веденія $xу$, потому что, означивъ черезъ T' производную отъ T относительно произведенія, о которомъ идетъ рѣчь, будемъ имѣть

$$\frac{\partial T}{\partial x} = T' y, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = T' x.$$

Внесение этихъ значеній въ уравненіе (6) даетъ

$$\frac{T'}{T} = \frac{x Y' - y X'}{2(y^2 X - x^2 Y)},$$

подставивъ же вмѣсто X, Y, X', Y' ихъ значенія, получимъ

$$(7) \quad \frac{T'}{T} = \frac{2 k^2 xy}{1 - k^2 x^2 y^2};$$

это выраженіе $\frac{T'}{T}$ есть вполнѣ раціональная функція произведенія $xу$, и эта функція есть производная $-\log(1 - k^2 x^2 y^2)$; интеграль уравненія (7) поэтому есть

$$\log T = -\log(1 - k^2 x^2 y^2) + \text{const.}$$

Но можно предположить постоянную равной нулю, и мы будемъ имѣть

$$(8) \quad T = \frac{1}{1 - k^2 x^2 y^2};$$

это значеніе T удовлетворяетъ уравненію (6) и, слѣдовательно, уравненіе (1) можетъ быть представлено подъ видомъ

$$(9) \quad d \frac{x \sqrt{Y} + y \sqrt{X}}{1 - k^2 x^2 y^2} = 0,$$

откуда, взявъ интеграль, получимъ

$$\frac{x \sqrt{Y} + y \sqrt{X}}{1 - k^2 x^2 y^2} = \text{const.}$$

Если подставимъ вмѣсто X и Y ихъ значенія, потомъ опредѣлимъ такъ постоянную, чтобы имѣли одновременно $x=0$, $y=z$, то будемъ имѣть

$$(10) \quad \frac{x \sqrt{1-y^2} \sqrt{1-k^2 y^2} + y \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}}{1 - k^2 x^2 y^2} = z.$$

Посредствомъ этого уравненія можно выразить въ функціи

x и y два радикала $\sqrt{1 - z^2}$, $\sqrt{1 - k^2 z^2}$, представляющие значения $\sqrt{1 - y^2}$ и $\sqrt{1 - k^2 y^2}$, отвечающія $x = 0$; легко находимъ

$$(11) \quad \frac{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2} - xy \sqrt{1 - k^2 x^2} \sqrt{1 - k^2 y^2}}{1 - k^2 x^2 y^2} = \sqrt{1 - z^2},$$

$$(12) \quad \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2} \sqrt{1 - k^2 y^2} - k^2 xy \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2}}{1 - k^2 x^2 y^2} = \sqrt{1 - k^2 z^2}.$$

692. Каждое изъ уравненій (2), (10), (11), (12) представляетъ интегралъ уравненія (1) взятый такъ, чтобы для $x = 0$ имѣли $y = z$. Если положимъ

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}} = u,$$

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2} \sqrt{1 - k^2 y^2}} = v,$$

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 - k^2 z^2}} = w,$$

и если сдѣлаемъ, какъ въ § 438,

$$y = \sin \operatorname{am} u,$$

$$\sqrt{1 - x^2} = \cos \operatorname{am} u.$$

$$\sqrt{1 - k^2 x^2} = \Delta \operatorname{am} u,$$

то уравненіе (2) сдѣлается слѣдующимъ:

$$w = u + v,$$

и уравненія (10), (11), (12) потомъ дадутъ

$$(13) \quad \begin{cases} \sin \operatorname{am} (u + v) = \frac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v \Delta \operatorname{am} v + \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} u \Delta \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v}, \\ \cos \operatorname{am} (u + v) = \frac{\cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v - \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \Delta \operatorname{am} u \Delta \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v}, \\ \Delta \operatorname{am} (u + v) = \frac{\Delta \operatorname{am} u \Delta \operatorname{am} v - k^2 \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v}. \end{cases}$$

Эти формулы выражаютъ основное свойство эллиптическихъ функцій $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$. Мы должны ограничиться здѣсь только-что изложеннымъ результатомъ и изъ котораго мы не можемъ вывести слѣдствія безъ того, чтобы не выдти изъ опредѣленныхъ нами границъ.

ГЛАВА VIII.

ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ ВЫСШИХЪ ПОРЯДКОВЪ.

Объ уравненіи $\frac{d^n y}{dx^n} = X$, гдѣ X означаетъ данную функцію отъ x .

693. Всѣ случаи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, какъ мы видѣли, какое бы ни было число переменныхъ, приводятся къ случаю дифференціальнаго уравненія нѣкотораго порядка съ двумя переменными. По изложеніи извѣстныхъ результатовъ теоріи уравненій первой степени, мы должны рассмотретьъ уравненія высшихъ порядковъ. Но, если исключимъ *линейныя* уравненія, которыя составятъ для насъ дальше предметъ спеціальнаго изученія, теорія, которой мы занимаемся, не имѣетъ никакого общаго принципа, никакого способа интегрированія, и развитіе, которое сейчасъ будетъ слѣдовать, необходимо ограничивается небольшимъ числомъ частныхъ случаевъ.

Мы остановимся сначала на самомъ простомъ случаѣ, на томъ, гдѣ дана производная нѣкотораго порядка неизвѣстной функціи; очевидно, что интегрированіе зависитъ только отъ квадратуръ.

Пусть будетъ уравненіе

$$(1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = X,$$

и предположимъ, что мы желаемъ опредѣлить его общій

интегралъ; означимъ черезъ $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ значенія, которыя должны принимать для $x = x_0$ функція y и ея $n-1$ первыхъ производныхъ. Умноживъ уравненіе (1) на dx и взявъ потомъ интегралъ, получимъ

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^x X dx + y_0^{(n-1)} = X_1 + y_0^{(n-1)};$$

взявъ интегралъ этого уравненія, послѣ умноженія его на dx , получимъ

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} &= \int_{x_0}^x X_1 dx + y_0^{(n-1)}(x - x_0) + y_0^{(n-2)} \\ &= X_2 + y_0^{(n-1)}(x - x_0) + y_0^{(n-2)}; \end{aligned}$$

продолжая такимъ образомъ далѣе, будемъ имѣть

$$y = X_n + P_{n-1},$$

формулу, гдѣ сдѣлано для краткости

$$P_{n-1} = y_0 + y'_0 \frac{x - x_0}{1} + \dots + y_0^{(n-1)} \frac{(x - x_0)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)},$$

и гдѣ X_n означаетъ членъ $n+1$ мѣста въ рядѣ

$$X, X_1, X_2, \dots, X_n;$$

эти функціи, начиная со второй, уничтожаются для $x = x_0$ и каждая изъ нихъ есть производная слѣдующей. Очевидно, имѣемъ

$$(2) \quad X_n = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x X dx,$$

формулу, гдѣ число интегрированій равно n .

Интегрированіе по частямъ позволяетъ преобразовать предъидущую формулу и привести вычисленіе X_n къ единичной квадратурѣ; это-то мы и намѣреваемся изложить здѣсь.

Имѣемъ

$$(3) \quad X_1 = \int_{x_0}^x X dx,$$

и также

$$X_2 = \int_{x_0}^x X_1 dx.$$

Интегрирование по частямъ измѣняетъ выраженіе X_2 въ слѣдующее

$$X_2 = xX_1 - \int_{x_0}^x \frac{dX_1}{dx} x dx,$$

т. е.

$$(4) \quad X_2 = x \int_{x_0}^x X dx - \int_{x_0}^x X x dx.$$

Равнымъ образомъ имѣемъ

$$X_3 = \int_{x_0}^x X_2 dx,$$

и, интегрируя по частямъ,

$$\begin{aligned} X_3 &= X_3 x - \int_{x_0}^x \frac{dX_2}{dx} x dx = X_2 x - \int_{x_0}^x X_1 x dx \\ &= X_2 x - X_1 \frac{x^2}{2} + \int_{x_0}^x \frac{dX_1}{dx} \frac{x^2}{2} dx, \end{aligned}$$

т. е., по причинѣ формулъ (3) и (4),

$$(5) \quad X_3 = \frac{x^2}{2} \int_{x_0}^x X dx - x \int_{x_0}^x X x dx + \int_{x_0}^x X \frac{x^2}{2} dx.$$

Сравненіе формулъ (3), (4), (5) даетъ возможность написать, вообще что

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} X_n &= \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \left[x^{n-1} \int_{x_0}^x X dx - \frac{n-1}{1} x^{n-2} \int_{x_0}^x X x dx + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^i \frac{(n-1) \dots (n-i)}{1 \cdot 2 \dots i} x^{n-i-1} \int_{x_0}^x X x^i dx + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} \int_{x_0}^x X x^{n-1} dx \right], \end{aligned} \right.$$

и для доказательства общности этой формулы достаточно показать, что если она имѣетъ мѣсто для нѣкотораго значе-

нія n , то она также существуетъ, когда n увеличиваемъ на 1. Умножимъ поэтому формулу (6) на dx и возьмемъ потомъ интегралъ отъ $x = x_0$; въ первой части будемъ имѣть X_{n+1} : переходимъ ко второй. Членъ

$$\int_{x_0}^x \left[x^{n-i-1} \int_{x_0}^x Xx^i dx \right] dx,$$

прилагая интегрированіе по частямъ, обратится въ

$$\frac{1}{n-i} x^{n-i} \int_{x_0}^x Xx^i dx - \frac{1}{n-i} \int_{x_0}^x Xx^n dx,$$

и если даемъ i всѣ значенія $0, 1, 2, \dots (n-1)$, то мы видимъ, что въ формулѣ, которая насъ занимаетъ, интегралъ $\int_{x_0}^x Xx^n dx$ найдется умноженнымъ на

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \left[-1 + \frac{n}{1} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n}{1} \right],$$

количество равное $\frac{(-1)^n}{1 \cdot 2 \dots n}$, такъ какъ $(1-1)^n = 0$. Поэтому будемъ имѣть

$$X_{n+1} = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \left[x^n \int_{x_0}^x X dx - \frac{n}{1} x^{n-1} \int_{x_0}^x Xx dx + \dots + (-1)^n \int_{x_0}^x Xx^n dx \right]$$

это же есть именно тотъ же результатъ, который получится, если измѣнимъ въ формулѣ (6) n въ $n+1$.

Теперь, если напишемъ подъ каждымъ изъ знаковъ \int второй части формулы (6) z вмѣсто x и если означимъ черезъ Z то, что сдѣлается съ X послѣ этого измѣненія, то мы будемъ въ состояніи подвести подъ каждый знакъ \int множители x , умножающіе его. Соединивъ потомъ всѣ интегралы въ одинъ, будемъ имѣть

$$X_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \int_{x_0}^x \left[x^{n-1} - \frac{n-1}{1} x^{n-2} z + \dots + (-1)^{n-1} z^{n-1} \right] Z dz,$$

или

$$(7) \quad X_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} Z dz.$$

Такимъ образомъ общій интеграль уравненія (1) есть

$$(8) \quad y = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} Z dz + P_{n-1},$$

гдѣ P_{n-1} есть произвольный полиномъ въ x степени $n-1$.

694. Предположимъ, что функція X есть производная $f^{(n)}(x)$ порядка n данной функціи $f(x)$; очевидно, что уравненіе

$$y = f(x) - f(x_0) - \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) - \dots - \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x_0)$$

есть интеграль уравненія (1), взятый такъ, чтобы y и его $n-1$ первыхъ производныхъ приводились для $x=x_0$ къ нулю. Но тотъ же самый интеграль также будетъ данъ формулой (8), если замѣнимъ Z черезъ $f^{(n)}(z)$ и если сдѣлаемъ $P_{n-1}=0$; поэтому имѣемъ

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) - \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) - \dots - \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x_0) \\ = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f^{(n)}(z) dz, \end{aligned}$$

или, положивъ $x=x_0+h$ и $z=x_0+h-t$, подъ знакомъ \int , получимъ

$$\begin{aligned} f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x_0) \\ + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \int_0^h f^{(n)}(x_0+h-t) t^{n-1} dt. \end{aligned}$$

Нашъ анализъ такимъ образомъ снабжаетъ насъ новымъ доказательствомъ формулы Тейлора.

Объ уравненіяхъ, въ которыя входятъ двѣ послѣдовательныя производныя неизвѣстной функціи.

695. Разсмотримъ сначала уравненіе вида

$$(1) \quad F\left(\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

или

$$(2) \quad F\left(\frac{dp}{dx}, p\right) = 0,$$

гдѣ положено

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = p.$$

Предположимъ, что мы можемъ рѣшить уравненіе (2) относительно $\frac{dp}{dx}$ и что мы получили $\frac{dp}{dx} = f(p)$, или

$$(4) \quad dx = \frac{dp}{f(p)},$$

будемъ имѣть

$$(5) \quad x = \int_{p_0}^p \frac{dp}{f(p)} + C,$$

гдѣ C есть произвольная постоянная, p_0 какое-нибудь начальное значеніе.

Потомъ, если мы можемъ рѣшить уравненіе (5) относительно p такъ, чтобы имѣли

$$p = \varphi(x) \quad \text{или} \quad dy = \psi(x) dx,$$

будемъ имѣть

$$(6) \quad y = \int_{x_0}^x \varphi(x) dx + C',$$

гдѣ C' есть вторая произвольная; уравненіе (6) есть общій интеграль даннаго.

Можно еще получить этотъ интеграль слѣдующимъ способомъ, который долженъ быть всегда употребляемъ, когда уравненіе (5) не можетъ быть рѣшено относительно p . Умноживъ уравненіе (4) на p , получимъ

$$p \, dx = dy = \frac{p \, dp}{f(p)},$$

откуда

$$(7) \quad y = \int_{p_0}^p \frac{p \, dp}{f(p)} + C_1,$$

гдѣ C_1 есть произвольная постоянная. Очевидно, что иско-
мый общій интегралъ получится отъ исключенія p изъ
уравненій (5) и (7).

696. Если не можемъ рѣшить уравненіе (2) относительно $\frac{dp}{dx}$, но если умѣемъ рѣшить его относительно p , то искомый интегралъ получимъ слѣдующимъ образомъ. Положимъ

$$\frac{dp}{dx} = q,$$

и предположимъ, что наше уравненіе даетъ

$$(8) \quad p = \varphi(q),$$

взявъ дифференціалъ, получимъ

$$dp = \varphi'(q) dq;$$

сверхъ того

$$dx = \frac{dp}{q}, \quad dy = \frac{p \, dp}{q};$$

поэтому

$$dx = \frac{\varphi'(q)}{q} dq, \quad dy = \frac{\varphi(q) \varphi'(q)}{q} dq,$$

откуда, взявъ интегралъ, имѣемъ

$$(9) \quad x = \int_{q_0}^q \frac{\varphi'(q)}{q} dq + C, \quad y = \int_{q_0}^q \frac{\varphi(q) \varphi'(q)}{q} dq + C_1,$$

гдѣ C и C_1 суть двѣ произвольныя постоянныя; искомый интегралъ будетъ результатомъ исключенія q изъ обоихъ уравненій (9).

697. Предположимъ, наконецъ, что данное уравненіе не

можемъ рѣшить ни относительно p , ни относительно q , но мы можемъ p и q выразить въ функціи новой переменнѣй t такъ, чтобы имѣли

$$(10) \quad p = \bar{\omega}(t), \quad q = \psi(t);$$

отсюда имѣемъ

$$dp = \bar{\omega}'(t) dt,$$

и формулы

$$dx = \frac{dp}{q}, \quad dy = \frac{p dp}{q}$$

обратятся тогда въ слѣдующія:

$$dx = \frac{\bar{\omega}'(t)}{\psi(t)} dt, \quad dy = \frac{\bar{\omega}(t) \bar{\omega}'(t)}{\psi(t)} dt,$$

откуда

$$(11) \quad x = \int_{t_0}^t \frac{\bar{\omega}'(t)}{\psi(t)} dt + C, \quad y = \int_{t_0}^t \frac{\bar{\omega}(t) \bar{\omega}'(t)}{\psi(t)} dt + C_1,$$

гдѣ C и C_1 двѣ произвольныя; такимъ образомъ искомый интегралъ дается уравненіями (11).

698. ПРИМѢРЪ. — Найти плоскую кривую, которой радіусъ кривизны имѣетъ проэкціей на определенное направленіе постоянную длину.

Радіусъ кривизны, въ случаѣ прямоугольныхъ координатъ, есть $\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, а косинусъ угла, образуемаго его на-

правленіемъ съ осью x , есть $\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}$. Если же возьмемъ за

ось x данное определенное направленіе, то уравненіе задачи будетъ

$$\frac{\frac{dy}{dx} \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} = a,$$

гдѣ a есть данная линія. Если сдѣлаемъ, какъ прежде $\frac{dy}{dx} = p$, то это уравненіе обратится въ

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p(1+p^2)}{a},$$

откуда

$$\frac{dx}{a} = \frac{dp}{p(1+p^2)} = \frac{dp}{p} - \frac{p dp}{1+p^2},$$

$$\frac{dy}{a} = \frac{dp}{1+p^2}.$$

Взявъ интегралъ и означивъ черезъ x_0 , y_0 двѣ произвольныя постоянныя, получимъ

$$\frac{x-x_0}{a} = \log \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \frac{y-y_0}{a} = \arctan p,$$

исключеніе p даетъ

$$\frac{x-x_0}{a} = \log \sin \frac{y-y_0}{a}.$$

699. Разсмотримъ болѣе общее дифференціальное уравненіе

$$(1) \quad F\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

которое приводится къ

$$(2) \quad F\left(\frac{dp}{dx}, p\right) = 0,$$

когда положимъ

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = p.$$

Предположимъ, что уравненіе (2) можетъ быть рѣшено относительно $\frac{dp}{dx}$, и что мы получили

$$(3) \quad \frac{dp}{dx} = f(p);$$

черезъ интегрированіе будемъ имѣть

$$(4) \quad x = \int_{p_0}^p \frac{dp}{f(p)} + C,$$

гдѣ C постоянная. Если это уравненіе можетъ быть рѣшено относительно p , то оно будетъ приведено къ уравненію вида

$$p = X \quad \text{или} \quad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = X,$$

гдѣ X есть данная функція отъ x ; это же есть случай § 693.

700. Предположимъ, что уравненіе (4) не можетъ быть рѣшено относительно p . По причинѣ уравненія (3), имѣемъ

$$d \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p dx = \frac{p dp}{f(p)},$$

откуда, если C_1 есть произвольная постоянная,

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_{p_0}^p \frac{p dp}{f(p)} + C_1.$$

Если сдѣлаемъ для краткости

$$P = \int_{p_0}^p \frac{p dp}{f(p)};$$

то можемъ написать

$$d \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = (P + C_1) dx = \frac{P_1 dp}{f(p)} + C_1 dx,$$

взявъ интеграль, получимъ

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int_{p_0}^p \frac{P_1}{f(p)} dp + C_1 x + C_2;$$

поступая такимъ образомъ далѣе, получимъ при помощи квадратуръ значеніе y .

Объ уравненіяхъ, въ которыя входятъ только двѣ производныя, которыхъ порядки различаются двумя единицами.

701. Пусть будетъ сначала уравненіе

$$(1) \quad F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, y\right) = 0,$$

которое содержитъ только неизвѣстную функцію y съ ея производною втораго порядка.

Предположимъ сперва, что мы можемъ рѣшить уравненіе относительно $\frac{d^2y}{dx^2}$ и что мы нашли

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f(y).$$

Умноживъ на $2dy$, будемъ имѣть

$$2 \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} = 2f(y)dy.$$

Первая часть теперь есть дифференціалъ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$; поэтому, взявъ интегралъ и означивъ черезъ C произвольную постоянную, черезъ y_0 какое-нибудь начальное значеніе y , имѣемъ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \int_{y_0}^y 2f(y) dy + C.$$

Отсюда имѣемъ

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2 \int_{y_0}^y f(y) dy + C}};$$

потомъ, такъ какъ переменныя отдѣлены,

$$(3) \quad x = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{2 \int_{y_0}^y f(y) dy + C}} + C',$$

гдѣ C' есть новая произвольная постоянная. Уравненіе (3) есть общій интегралъ даннаго.

702. Предположимъ, что мы не можемъ рѣшить даннаго уравненія относительно $\frac{d^2y}{dx^2}$, но мы рѣшаемъ его относительно y . Положимъ

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = q,$$

и пусть

$$(5) \quad y = \varphi(q)$$

будетъ значеніемъ y , выведеннымъ изъ уравненія (1). Дифференцирование даетъ

$$dy = \varphi'(q) dq;$$

сверхъ того, изъ уравненій (4) имѣемъ $dy = p \frac{dp}{q}$; поэтому

$$p dp = q \varphi'(q) dq,$$

уравненіе, гдѣ переменныя отдѣлены. Означивъ черезъ C постоянную, интегрирование даетъ

$$(6) \quad p^2 = \int_{q_0}^q 2q \varphi'(q) dq + C,$$

откуда

$$p = \sqrt{\int_{q_0}^q 2q \varphi'(q) dq + C};$$

уравненіе $dx = \frac{dy}{p} = \frac{\varphi'(q) dq}{p}$ тогда сдѣлается

$$dx = \frac{\varphi'(q) dq}{\sqrt{\int_{q_0}^q 2q \varphi'(q) dq + C}},$$

откуда, означивъ черезъ C_1 вторую произвольную постоянную, имѣемъ

$$(7) \quad x = \int_{q_0}^q \frac{\varphi'(q) dq}{\sqrt{\int_{q_0}^q 2q \varphi'(q) dq + C}} + C_1;$$

искомый общій интегралъ есть результатъ исключенія q изъ уравненій (5) и (7).

703. П р и м ѣ р ъ. — Разсмотримъ уравненіе

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - my = 0;$$

изъ него имѣемъ

$$2 \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} - 2my dy = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m(y^2 + C),$$

потомъ

$$\sqrt{m} \, dx = \frac{dy}{\sqrt{y^2 + C}},$$

и

$$x \sqrt{m} = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{y^2 + C}} + \text{const.},$$

или

$$x \sqrt{m} = \log (y + \sqrt{y^2 + C}) - \log C',$$

гдѣ C' есть вторая постоянная. Такимъ образомъ имѣемъ

$$y + \sqrt{y^2 + C} = C' e^{x \sqrt{m}},$$

взявъ же обратныя значенія каждой части, получимъ

$$-y + \sqrt{y^2 + C} = \frac{C}{C'} e^{x \sqrt{m}},$$

Вычтя эту формулу изъ предыдущей и написавъ просто C, C' вмѣсто $\frac{C'}{2}, \frac{C}{2C'}$, получимъ

$$y = C e^{x \sqrt{m}} + C' e^{-x \sqrt{m}},$$

то же есть общій интегралъ даннаго уравненія.

Если m есть число отрицательное $-n^2$, то можно написать

$$y = C \frac{e^{nx \sqrt{-1}} + e^{-nx \sqrt{-1}}}{2} + C' \frac{e^{nx \sqrt{-1}} - e^{-nx \sqrt{-1}}}{2 \sqrt{-1}},$$

или

$$y = C \cos nx + C' \sin nx,$$

гдѣ C и C' означаютъ опять двѣ производныя. Можно сдѣлать

$$C = A \cos \alpha, \quad C' = -A \sin \alpha,$$

и общий интегралъ обратится въ

$$y = A \cos (nx + \alpha),$$

гдѣ A и α двѣ произвольныя постоянныя.

704. Уравненіе

$$(1) \quad F\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right) = 0,$$

содержащее только производныя $\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}$, можно привести къ случаю § 701.

Дѣйствительно, достаточно положить

$$(2) \quad \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = p,$$

и данное уравненіе обратится въ

$$(3) \quad F\left(\frac{d^2 p}{dx^2}, p\right) = 0.$$

Опредѣленіе p въ функции x представляетъ только затрудненія для исключенія, и оно приводится, какъ мы увидимъ, къ квадратурамъ.

Предположимъ, что уравненіе (3) можетъ быть рѣшено относительно $\frac{d^2 p}{dx^2}$, и что мы имѣемъ

$$(4) \quad \frac{d^2 p}{dx^2} = f(p);$$

по § 701, будемъ имѣть

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{2 \int_{p_0}^p f(p) dp + C} = \psi(p),$$

далѣе

$$(5) \quad x = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\psi(p)} + C',$$

гдѣ C и C' двѣ произвольныя постоянныя.

Если уравненіе (5) можетъ быть рѣшено относительно p , то мы опредѣлимъ y изъ уравненія (2), которое входитъ въ случай § 693. Но если мы не можемъ рѣшить уравне-

нія (5), то поступимъ, какъ въ § 700: имѣемъ

$$d \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = p \, dx = \frac{p \, dp}{\psi(p)},$$

откуда

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int_{p_0}^p \frac{p \, dp}{\psi(p)} + C_1 = P_1 + C_1,$$

гдѣ C_1 есть постоянная. Потомъ имѣемъ

$$d \frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}} = (P_1 + C_1) \, dx = \frac{P_1 \, dp}{\psi(p)} + C_1 \, dx$$

откуда

$$\frac{d^{n-4}y}{dx^{n-4}} = \int_{p_0}^p \frac{P_1 \, dp}{\psi(p)} + C_1 x + C_2;$$

гдѣ C_2 есть новая постоянная. Очевидно, что продолжая такимъ образомъ далѣе, получимъ значеніе y посредствомъ простыхъ квадратуръ.

Случай, гдѣ можно понизить порядокъ дифференціальныхъ уравненій.

705. Можно понизить порядокъ дифференціального уравненія, когда оно не содержитъ неизвѣстной функціи, а только ея производныя. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ уравненіе порядка n

$$F \left(x, \frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n} \right) = 0,$$

которое не содержитъ y и въ которомъ $\frac{d^m y}{dx^m}$ означаетъ производную наименьшаго порядка. Если положимъ

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p,$$

то данное уравненіе приведетъ къ уравненію порядка $n-m$

$$F \left(x, p, \frac{dp}{dx}, \dots, \frac{d^{n-m} p}{dx^{n-m}} \right) = 0.$$

Когда значеніе p будетъ извѣстно, то y будетъ извѣстенъ посредствомъ квадратуръ.

Теперь, можно всегда понизить на единицу порядок дифференціального уравненія, не содержащаго независимой перемѣнной. Дѣйствительно, пусть будетъ уравненіе порядка n

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

въ которое не входитъ независимая перемѣнная x ; очевидно, если возьмемъ y за независимую перемѣнную, данное уравненіе войдетъ въ предъидущій случай. Положивъ, поэтому,

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{dp}{dx} = p \frac{dp}{dy}, \\ \frac{d^3 y}{dx^3} &= p \frac{d\left(p \frac{dp}{dy}\right)}{dy} = p \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2}, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

и послѣ подстановки этихъ значеній, уравненіе приведетъ къ порядку $n-1$. Такъ какъ значеніе p въ y извѣстно, то остается опредѣлить x изъ уравненія

$$dx = \frac{dy}{p},$$

это же требуетъ только одной квадратуры.

706. О БЪ ОДНОРОДНЫХЪ УРАВНЕНІЯХЪ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИЗВѢСТНОЙ ФУНКЦІИ И ЕЯ ПРОИЗВОДНЫХЪ.— Если дифференціальное уравненіе порядка n

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

однородно относительно $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$, то его можно привести къ порядку $n-1$ черезъ внесеніе

$$y = e^{\int_{x_0}^x z \, dx}$$

гдѣ z есть новая неизвѣстная функція. Дѣйствительно, диф-

дифференцирование даетъ

$$\frac{dy}{dx} = ze^{\int_{x_0}^x z dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx} + z^2 \right) e^{\int_{x_0}^x z dx},$$

.....

Послѣ внесенія этихъ значеній показательная функція необходимо исчезнетъ изъ даннаго уравненія, потому что это уравненіе однородно относительно y , $\frac{dy}{dx}$, ..., и мы будемъ имѣть уравненіе въ z

$$\Phi \left(x, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} \right) = 0,$$

котораго порядокъ будетъ только $n - 1$. Если значеніе z извѣстно, то значеніе y будемъ имѣть при помощи квадратуры.

707. Къ только-что разсмотрѣнному случаю можно привести уравненіе

$$F \left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n} \right) = 0,$$

которое не содержитъ независимой переменнѣй x и которое однородно относительно

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}, \quad \frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \dots,$$

потому что, если положимъ

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

будемъ имѣть

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = p^2 \frac{d^2p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2, \quad \dots,$$

послѣ внесенія этихъ значеній, будемъ имѣть уравненіе по-

рядка $n - 1$, которое будет однородно относительно p , $\frac{dp}{dy}$, $\frac{d^2p}{dy^2}$, ..., и которое, следовательно, приводится къ порядку $n - 2$.

708. О дифференціальньхъ уравненіяхъ втораго порядка, однородныхъ относительно переменныхъ и ихъ дифференціаловъ.—Пусть будетъ

$$(1) \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

уравненіе втораго порядка, однородное относительно x , y , dx , dy , d^2y . Если положимъ

$$(2) \quad y = ux, \quad dy = p \, dx, \quad d^2y = \frac{q}{x} dx^2,$$

то уравненіе (1), послѣ внесенія этихъ значеній, не будетъ болѣе содержать x , и оно будетъ вида

$$(3) \quad f(u, p, q) = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, по предположенію, уравненіе (1) не измѣнится, когда умножимъ каждое изъ количествъ x , y , dx , dy , d^2y на какой-нибудь множитель; но послѣ этого умноженія значенія u , p , q , остаются тѣ же; поэтому уравненіе (3) не можетъ содержать x .

Формулы (2) даютъ

$$dy = u \, dx + x \, du = p \, dx, \quad d^2y = p \, dx = \frac{q}{x} dx^2,$$

откуда

$$(4) \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u} = \frac{dp}{q}.$$

Предположимъ теперь, что мы имѣемъ изъ уравненія (3)

$$q = \varphi(u, p),$$

изъ формулы (4) будемъ имѣть

$$(5) \quad \frac{du}{p - u} = \frac{dp}{\varphi(u, p)},$$

дифференціальное уравненіе перваго порядка между переменными p и u . Когда это уравненіе будетъ интегрировано, то рѣшеніе даннаго вопроса не будетъ требовать болѣе, чѣмъ одной квадратуры, потому что, такъ какъ значеніе p извѣстно въ функціи u , мы будемъ имѣть значеніе x посредствомъ формулы

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u},$$

въ которой переменныя отдѣлены.

Приложеніе предыдущихъ результатовъ къ нѣкоторымъ примѣрамъ.

709. **ЗАДАЧА I.**—*Найти плоскую кривую, въ которой радіусъ кривизны пропорціоналенъ данной функціи абсциссы.*

Если означимъ черезъ x и y прямоугольныя координаты, то уравненіе задачи будетъ

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = f(x).$$

Оно не содержитъ y , и мы понизимъ его до перваго порядка, если положимъ

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx};$$

тогда оно приведется къ

$$\frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{f(x)}.$$

Здѣсь переменныя отдѣлены и интегрированіе даетъ

$$\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = \int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)} + C,$$

откуда

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)} + C}{\sqrt{1 - \left[\int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)} + C \right]^2}} = \varphi(x);$$

посредствомъ новой квадратуры будемъ имѣть y , именно:

$$y = \int_{x_0}^x \varphi(x) dx + C_1.$$

Разсмотримъ, напримѣръ, случай, гдѣ данная функція $f(x)$ имѣетъ значеніе

$$f(x) = \frac{a^2}{2x},$$

гдѣ a есть постоянная. Взявъ $x_0 = 0$ и написавъ $\frac{c}{a^2}$ вмѣсто C , будемъ имѣть

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)} = \frac{x^2}{a^2}, \quad \varphi(x) = \frac{x^2 + c}{\sqrt{a^4 - (x^2 + c)^2}},$$

потомъ

$$y = \int_0^x \frac{x^2 + c}{\sqrt{a^4 - (x^2 + c)^2}} dx + C_1.$$

Кривая, выражаемая этимъ уравненіемъ, встрѣчается въ механикѣ и она извѣстна подъ именемъ *гибкой кривой*; ея радіусъ кривизны измѣняется обратно пропорціонально абсциссѣ.

710. ЗАДАЧА — II. *Найти плоскую кривую, въ которой радіусъ кривизны пропорціоналенъ кубу нормали.*

Если означимъ черезъ x и y прямоугольныя координаты, черезъ p производную $\frac{dy}{dx}$, то радіусъ кривизны и нормаль, соотвѣтственно, будутъ имѣть значеніями

$$\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}}, \quad y \sqrt{1 + p^2};$$

уравнение задачи поэтому есть

$$\frac{dp}{dx} = \pm \frac{a^2}{y^2},$$

гдѣ a данная линія. Это уравненіе втораго порядка не содержитъ x ; поэтому нужно y взять за независимую переменную и, замѣнивъ dx черезъ $\frac{dy}{p}$, мы имѣемъ

$$\pm p \frac{dp}{dy} = \frac{a^2}{y^2} \quad \text{или} \quad \pm p dp = \frac{a^2 dy}{y^2}.$$

Переменные отдѣлены и, означивъ черезъ $\frac{1}{n}$ произвольную постоянную, черезъ интегрированіе получимъ

$$p^2 = \pm \frac{a^2}{y^2} + \frac{1}{n^2},$$

откуда

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 \pm na^2}}{y \sqrt{n}},$$

и

$$dx = \sqrt{n} \frac{y dy}{\sqrt{y^2 \pm na^2}};$$

завѣсть интегралъ и означивъ черезъ x_0 новую произвольную постоянную, найдемъ

$$x - x_0 = \sqrt{n} \sqrt{y^2 \pm na^2}$$

или

$$(x - x_0)^2 - ny^2 = \pm n^2 a^2.$$

Искомая кривая поэтому, вообще, есть эллипсъ или гипербола. Въ случаѣ $\frac{1}{n} = 0$, найдемъ параболу.

711. ЗАДАЧА III. — Найти плоскую кривую, въ которой радіусъ кривизны пропорціоналенъ нормали.

Означимъ черезъ n данное положительное или отрицательное число. Уравненіе задачи будетъ

$$\frac{1+p^2}{\frac{dp}{dx}} = ny;$$

оно не содержит x и мы заменим dx через $\frac{dy}{p}$, какъ это было сдѣлано въ предыдущей задачѣ; такимъ образомъ будемъ имѣть

$$\frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{2}{n} \frac{dy}{y}.$$

Переменные отдѣлены и, означивъ черезъ c произвольную постоянную, интегрирование даетъ

$$\log(1+p^2) = \frac{2}{n}(\log y - \log c) = \log \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}},$$

откуда

$$p = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}} - 1},$$

$$dx = \left[\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy;$$

второе интегрирование, наконецъ, дастъ

$$x - x_0 = \int_{y_0}^y \left[\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy,$$

гдѣ x_0 означаетъ произвольную постоянную и y_0 начальное значеніе y , которое можно выбрать по произволу.

Выраженіе dx есть дифференціальный биномъ и случаи возможности интегрированія суть тѣ, въ которыхъ $\frac{n}{2}$ или $\frac{n-1}{2}$ есть цѣлое число, т. е. тѣ, въ которыхъ n есть цѣлое число. Самые замѣчательные случаи отвѣчаютъ $n = \pm 1$, $n = \pm 2$.

1) Пусть будетъ $n = -1$; взявъ $y_0 = c$, получимъ

$$x - x_0 = \int_c^y \frac{y dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = -\sqrt{c^2 - y^2},$$

откуда

$$(x - x_0)^2 + y^2 = c^2;$$

искомая кривая есть окружность.

2) Пусть будет $n = +1$; имѣемъ

$$\frac{x - x_0}{c} = \int_c^y \frac{dy}{V y^2 - c^2} = \log \frac{y + V y^2 - c^2}{c},$$

откуда

$$\frac{y + V y^2 - c^2}{c} = e^{\frac{x - x_0}{c}},$$

взявъ обратныя значенія каждой части, получимъ

$$\frac{y - V y^2 - c^2}{c} = e^{-\frac{x - x_0}{c}}.$$

Сложивъ два предъидущія уравненія, найдемъ

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x - x_0}{c}} + e^{-\frac{x - x_0}{c}} \right);$$

искомая кривая поэтому есть цѣпная линія (§ 224).

3) Пусть будетъ $n = -2$; имѣемъ

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c - y}{y}},$$

это же есть дифференціальное уравненіе циклоиды, въ которой діаметръ образующаго круга равенъ c (§ 231).

4) Пусть будетъ $n = +2$; имѣемъ

$$x - x_0 = V c \int_c^y \frac{dy}{V y - c} = 2 V c V y - c,$$

откуда

$$y - c = \frac{(x - x_0)^2}{4c},$$

это же есть уравненіе параболы.

712. ЗАДАЧА IV. — Найти поверхность вращенія, для которой средняя кривизна въ различныхъ точкахъ есть постоянная.

Въ поверхности вращенія, меридіаны и параллели составляютъ двѣ системы линій кривизны. Слѣдовательно, одинъ изъ главныхъ радіусовъ кривизны есть радіусъ меридіана, а радіусъ второй кривизны есть часть нормали, заключающаяся между осью и поверхностью. Если означимъ черезъ R первый изъ этихъ радіусовъ, черезъ N второй, то уравненіе задачи будетъ

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{N} = \frac{1}{a},$$

гдѣ a данная линія. Въ этой формулѣ R и N одного или различныхъ знаковъ, смотря по тому, имѣютъ ли эти радіусы одно направленіе или противоположныя направленія. Отнесемъ одинъ изъ меридіановъ къ двумъ прямоугольнымъ осямъ, изъ которыхъ одна, ось x , совпадаетъ съ осью поверхности; R и N будутъ одного и того же знака, если y и $\frac{d^2y}{dx^2}$ имѣютъ противоположные знаки, и обратно; поэтому нужно взять

$$R = - \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad N = + y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

гдѣ знакъ радикала $\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$, входящій въ эти выраженія, сверхъ того произвольный. Тогда предъидущее уравненіе станетъ

$$-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} = \frac{1}{a}.$$

Это уравненіе не содержитъ x , и мы понизимъ его до первой степени, если положимъ

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy};$$

оно такимъ образомъ будетъ

$$-\frac{p \frac{dp}{dy}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{y\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{a}.$$

Для интегрированія его, достаточно это уравненіе умножить на $y dy$; это дастъ

$$-y \frac{p dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{dy}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{y dy}{a};$$

первая часть есть полный дифференціалъ $\frac{y}{\sqrt{1+p^2}}$, и слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\frac{y}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{y^2 \pm b^2}{2a},$$

гдѣ $\pm \frac{b^2}{2a}$ есть произвольная постоянная, введенная при интегрированіи. Отсюда находимъ

$$p = \frac{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}}{y^2 \pm b^2},$$

и, по причинѣ $p = \frac{dy}{dx}$, мы имѣемъ

$$dx = \frac{(y^2 \pm b^2) dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}};$$

вопросъ, поэтому, приводится къ квадратурамъ.

713. Если постоянная b есть нуль, то предыдущее уравненіе приводится къ

$$dx = \frac{y dy}{\sqrt{4a^2 - y^2}},$$

если не примемъ во вниманіе особаго рѣшенія $y=0$. Интегрированіе даетъ

$$x - x_0 = -\sqrt{4a^2 - y^2} = 0, \text{ откуда } (x - x_0)^2 + y^2 = 4a^2,$$

это же есть уравненіе окружности; очевидно *a priori*, что шаръ есть одна изъ искомымъ поверхностей.

Если положимъ $b^2 = ca$, гдѣ c есть новая постоянная, и если сдѣлаемъ потомъ $a = \infty$, то дифференціальное уравненіе,

полученное нами, приведется къ слѣдующему:

$$dx = \frac{cdy}{\sqrt{4y^2 - c^2}},$$

откуда имѣемъ

$$\frac{2(x - x_0)}{c} = \log \frac{y + \sqrt{y^2 - \frac{c^2}{4}}}{\frac{1}{2}c}$$

и

$$y = \frac{c}{4} \left[e^{\frac{2(x-x_0)}{c}} + e^{-\frac{2(x-x_0)}{c}} \right],$$

гдѣ x_0 есть произвольная постоянная. Это уравненіе принадлежитъ цѣпной линіи, которая есть геометрическое мѣсто точекъ, описанное фокусомъ параболы, катящейся безъ скользенія по опредѣленной прямой (§ 224), и поверхность вращения этой образующей кривой, обращающаяся вокругъ оси абсциссъ, имѣетъ то свойство, что средняя кривизна въ каждой точкѣ есть нуль, т. е. что главные радіусы кривизны равны, а направленія ихъ противоположны.

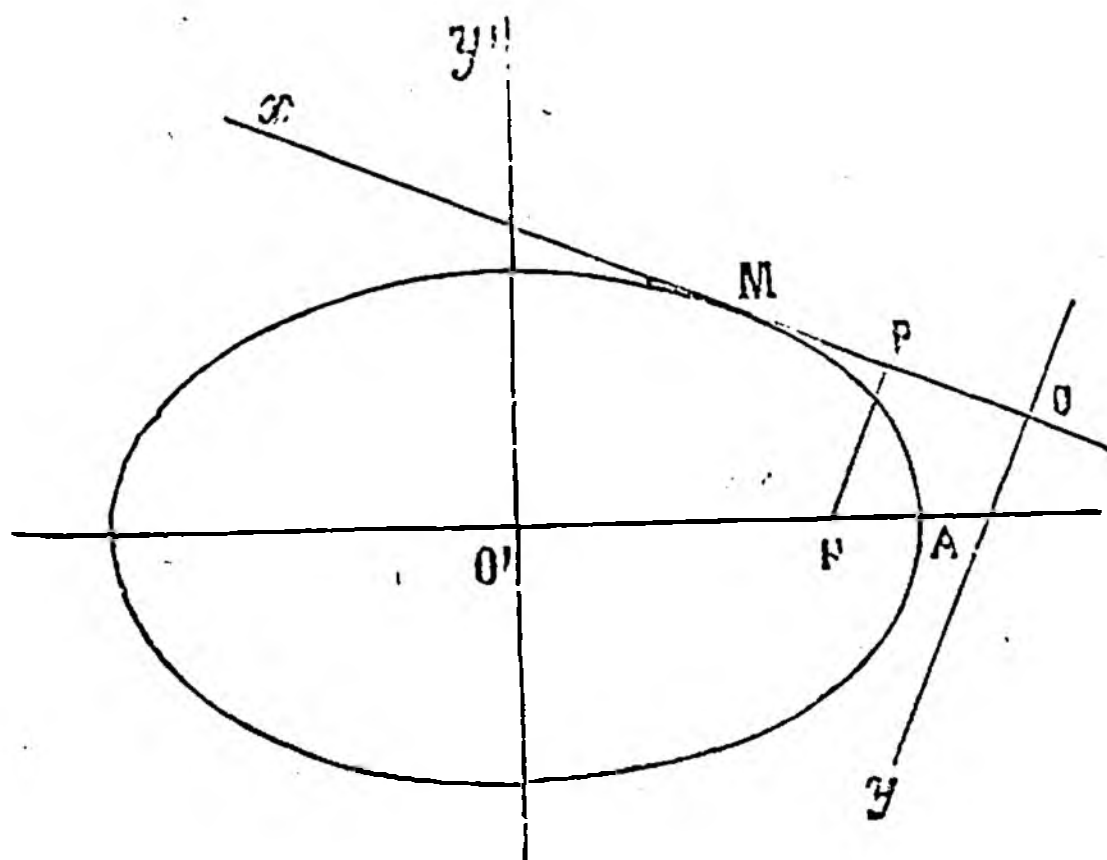
Исходя изъ этого и замѣчая, что въ общемъ случаѣ, гдѣ постоянныя a и b остаются неопредѣленными, интегралъ дифференціала dx изъ трансцендентныхъ количествъ содержитъ только тѣ, которыя выражаютъ дуги эллипса и гиперболы, Делонай (Delaunay) думалъ, что меридіанъ поверхности вращения постоянной средней кривизны долженъ быть образованъ фокусомъ эллипса или гиперболы, катящейся безъ скользенія по опредѣленной прямой. Онъ дѣйствительно доказалъ это предложеніе въ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* VI, 1-я серія, точность котораго можно провѣрить слѣдующимъ способомъ.

Пусть будетъ

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

уравненіе эллипса, отнесеннаго къ его осямъ; означимъ че-

резь с разстояніе $\sqrt{a^2 - b^2}$ отъ центра до фокуса F , черезъ s' дугу AM эллипса, заключающуюся между вершиной A



и точкой $M(x', y')$. Проведемъ въ точкѣ M касательную Ox , возьмемъ отъ M длину $MO = s'$ и возставимъ изъ точки O прямую Oy , перпендикулярную къ Ox . Означимъ наконецъ черезъ y перпендикуляръ FP , опущенный изъ фокуса F на касательную Ox , и черезъ x разстояніе PO отъ основанія этого перпендикуляра до точки O . По извѣстнымъ формуламъ будемъ имѣть

$$y = b \sqrt{\frac{a^2 - cx'}{a^2 + cx'}},$$

$$x = s' - \frac{cy y'}{b^2}.$$

Первое изъ этихъ уравненій и уравненіе эллипса опредѣляютъ x' и y' въ функціи y ; находимъ

$$x' = \frac{a^2 b^2 - y^2}{c b^2 + y^2},$$

$$y' = \frac{b^2 \sqrt{4a^2 y^2 - (b^2 + y^2)^2}}{c(b^2 + y^2)},$$

откуда легко вычислить

$$ds' = \frac{8 a^2 b^2 y^2 dy}{(b^2 + y^2)^2 \sqrt{4a^2 y^2 - (b^2 + y^2)^2}},$$

$$\frac{c}{b^2} d(y y') = \frac{8 a^2 b^2 y^2 - (b^2 + y^2)^2}{(b^2 + y^2)^2 \sqrt{4a^2 y^2 - (b^2 + y^2)^2}} dy.$$

Разность первыхъ частей этихъ формулъ есть ни что иное, какъ dx ; поэтому имѣемъ

$$dx = \frac{(b^2 + y^2) dy}{\sqrt{4a^2 y^2 - (b^2 + y^2)^2}}.$$

Очевидно, что это дифференціальное уравненіе принадлежит кривой, описанной фокусомъ F эллипса, катящагося безъ скольженія по прямой и Ox , если мы желаемъ взять вмѣсто эллипса гиперболу, то достаточно будетъ въ предъидущемъ уравненіи написать $-b^2$ вмѣсто $+b^2$. Мы видимъ что это есть уравненіе предложенной намъ задачи.

714. ЗАДАЧА V. — Требуется найти общий интегралъ уравненія второго порядка

$$\frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2y^2}{x^3} = 0.$$

Это уравненіе однородно относительно y , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, поэтому должно положить (§ 706)

$$y = e^{\int_{x_0}^x z dx}, \quad \frac{dy}{dx} = z e^{\int_{x_0}^x z dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx} + z^2 \right) e^{\int_{x_0}^x z dx},$$

внеся же эти значенія въ данное уравненіе, получимъ уравненіе перваго порядка

$$z \frac{dz}{dx} + z^3 + \frac{2}{x^3} = 0,$$

которое легко интегрировать, потому что мы его сдѣлаемъ однороднымъ, если положимъ

$$x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2},$$

черезъ это внесеніе оно станетъ

$$t^2 z dz - (z^3 + 2t^3) dt = 0.$$

Наконецъ, если положимъ (§ 654)

$$z = ut, \quad dz = u dt + t du,$$

то оно приметъ видъ

$$\frac{dt}{t} - \frac{u du}{u^3 - u^2 + 2} = 0$$

или

$$\frac{dt}{t} + \frac{1}{5} \frac{du}{u+1} - \frac{1}{5} \frac{(u-1)du}{(u-1)^2+1} - \frac{3}{5} \frac{du}{(u-1)^2+1} = 0;$$

взявъ интеграль и подставивъ $\frac{1}{x}$ вмѣсто t , xz вмѣсто u , получимъ

$$-\log x + \frac{1}{5} \log \frac{xz+1}{\sqrt{(xz-1)^2+1}} - \frac{3}{5} \operatorname{arc tang} (xz-1) = C.$$

Такъ какъ значеніе z опредѣляется этимъ уравненіемъ, то искомый общій интеграль будетъ

$$y = e^{\int_{x_0}^x dx};$$

онъ содержитъ двѣ произвольныя постоянныя x_0 и C .

715. ЗАДАЧА VI. — *Найти плоскую кривую, которой дуги пропорціональны соотвѣтствующимъ дугамъ развертки.*

Означимъ черезъ s дугу неизвѣстной кривой, отсчитываемую отъ данной точки на этой кривой, черезъ s_1 соотвѣтствующую дугу развертки, черезъ α данную постоянную; уравненіе данной задачи будетъ

$$s_1 = \alpha s \quad \text{или} \quad ds_1 = \alpha ds,$$

или такъ какъ ds_1 равняется дифференціалу радіуса кривизны R искомой кривой, то

$$dR = \alpha ds.$$

Если введемъ прямоугольныя координаты x , y , то это уравненіе будетъ третьяго порядка, и слѣдовательно, интегрированіе введетъ три произвольныхъ постоянныхъ. Мы легко произведемъ это интегрированіе, если поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Пусть будетъ φ наклоненіе касательной искомой кривой на ось x ; будемъ имѣть

$$R = \frac{ds}{d\varphi},$$

и наше дифференціальное уравненіе будетъ

$$\frac{dR}{R} = \alpha d\varphi;$$

интегрированіе даетъ

$$\log R - \log a = \alpha\varphi \quad \text{или} \quad R = ae^{\alpha\varphi},$$

гдѣ a есть произвольная постоянная. Поэтому также имѣемъ

$$ds = ae^{\alpha\varphi} d\varphi,$$

и слѣдовательно

$$dx = ae^{\alpha\varphi} \cos \varphi d\varphi, \quad dy = ae^{\alpha\varphi} \sin \varphi d\varphi.$$

Сложимъ эти уравненія; послѣ умноженія втораго на $\sqrt{-1}$, получимъ

$$d(x + y\sqrt{-1}) = ae^{(\alpha + \sqrt{-1})\varphi} d\varphi.$$

Взявъ интегралъ и означивъ черезъ $x_0 + y_0\sqrt{-1}$ произвольную постоянную, получимъ

$$(x - x_0) + (y - y_0)\sqrt{-1} = \frac{a}{\alpha + \sqrt{-1}} e^{(\alpha + \sqrt{-1})\varphi}.$$

Это уравненіе распадается на два другихъ, и если изъ этихъ послѣднихъ исключимъ уголъ φ , то получимъ искомый общій интегралъ, содержащій три произвольныя постоянныя a , x_0 , y_0 .

Положимъ

$$\frac{a}{\alpha + \sqrt{-1}} = me^{\mu\sqrt{-1}}.$$

далѣе

$$x - x_0 = \rho \cos(\omega + \mu), \quad y - y_0 = \rho \sin(\omega + \mu);$$

ρ и ω будутъ полярныя координаты, и предъидущее уравненіе сдѣлается

$$\rho e^{\omega\sqrt{-1}} = me^{\alpha\varphi} e^{\varphi\sqrt{-1}};$$

откуда

$$\rho = me^{\alpha\varphi}, \quad \omega = \varphi,$$

и слѣдовательно

$$\rho = me^{\alpha\omega}.$$

Такимъ образомъ логарифмическая спираль есть единственная кривая, обладающая свойствомъ, изложеннымъ въ вопросѣ.

Предъидущее рѣшеніе даетъ примѣръ упрощеній, которыя могутъ допускать задачи только-что разобраннаго вида.

716. ЗАДАЧА VII.— *Найти плоскую кривую, въ которой радіусъ кривизны пропорціоналенъ радіусу-вектору, выходящему изъ определенной точки.*

Если станемъ разсматривать неизвѣстную кривую, какъ огибающую свои касательныя, то употребимъ (§ 210) два уравненія

$$\begin{aligned} x \sin \varphi - y \cos \varphi &= f(\varphi), \\ x \cos \varphi + y \sin \varphi &= f'(\varphi), \end{aligned}$$

которыя позволяютъ выразить прямоугольныя координаты x, y въ функціи переменныхъ φ и $f(\varphi)$. Изъ этихъ уравненій находимъ

$$\begin{aligned} x &= f(\varphi) \sin \varphi + f'(\varphi) \cos \varphi, \\ y &= -f(\varphi) \cos \varphi + f'(\varphi) \sin \varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{f^2(\varphi) + f'^2(\varphi)},$$

далѣе

$$\begin{aligned} dx &= [f(\varphi) + f''(\varphi)] \cos \varphi d\varphi, \\ dy &= [f(\varphi) + f''(\varphi)] \sin \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

и

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds = [f(\varphi) + f''(\varphi)] d\varphi,$$

Радіусъ кривизны равенъ $\frac{ds}{d\varphi}$ и радіусъ-векторъ $\sqrt{x^2 + y^2}$, поэтому уравненіе задачи будетъ

$$\frac{d^2f}{d\varphi^2} + f = m \sqrt{f^2 + \frac{df^2}{d\varphi^2}},$$

гдѣ m данное число. Такъ какъ это уравненіе не содержитъ φ , то мы положимъ

$$\frac{df}{d\varphi} = f', \quad \frac{d^2f}{d\varphi^2} = f' \frac{df'}{df},$$

и мы получимъ

$$f' \frac{df'}{df} + f = m \sqrt{f^2 + f'^2}.$$

Это уравненіе перваго порядка интегрируется непосредственно, потому что ему можно дать видъ

$$\frac{f df + f' df'}{\sqrt{f^2 + f'^2}} = m df;$$

первая часть есть полный дифференціалъ $\sqrt{f^2 + f'^2}$, и интегрированіе даетъ

$$\sqrt{f^2 + f'^2} = m(f - C),$$

гдѣ C есть произвольная постоянная. Такъ какъ $f' = \frac{df}{d\varphi}$, то получимъ

$$d\varphi = \frac{df}{\sqrt{m^2(f - C)^2 - f^2}}.$$

Если имѣемъ $m < 1$, то интегрированіе даетъ

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} \arcsin \left(\frac{1 - m^2}{mC} f + m \right),$$

гдѣ φ_0 есть постоянная. Сдѣлавъ $\frac{mC}{1 - m^2} = a$, $\sqrt{1 - m^2} = \mu$, получимъ

$$f(\varphi) = -a\sqrt{1 - \mu^2} + a \sin \mu(\varphi - \varphi_0),$$

это же показываетъ, что искомая кривая есть алгебраическая, когда μ соизмѣримо.

Если имѣемъ $m > 1$, то интегрированіе дифференціала $d\varphi$ дастъ

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{m^2 - 1}} \log(t + \sqrt{t^2 - 1}),$$

гдѣ t означаетъ количество $\frac{m^2-1}{mC} f - m$, а φ_0 есть постоянная; сдѣлавъ $\frac{mC}{m^2-1} = a$, $\sqrt{m^2-1} = \mu$, отсюда имѣемъ

$$f(\varphi) = a\sqrt{1+\mu^2} + a \frac{e^{\mu(\varphi-\varphi_0)} + e^{-\mu(\varphi-\varphi_0)}}{2}.$$

Наконецъ въ случаѣ $m=1$ имѣемъ

$$d\varphi = \frac{df}{\sqrt{-2Cf + C^2}},$$

откуда, положивъ $\frac{C}{2} = a$, имѣемъ

$$f(\varphi) = a[1 - (\varphi - \varphi_0)^2],$$

Употребленіе множителя для интегрированія дифференціальныхъ уравненій какого-нибудь порядка.

717. Разсмотримъ дифференціальное уравненіе порядка n между переменными x и y и предположимъ, что мы имѣемъ его написаннымъ въ видѣ

$$(1) \quad P \frac{d^n y}{dx^n} + Q = 0,$$

гдѣ P и Q суть функціи отъ $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. Можно написать

$$(2) \quad P d \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q dx = 0,$$

и если случится, что первая часть этого уравненія есть полный дифференціалъ функціи u отъ $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, то очевидно, что уравненіе

$$u = \text{const.}$$

будетъ одинъ изъ первыхъ интеграловъ даннаго уравненія.

Какія бы ни были функціи P и Q , всегда существуютъ множители λ , способные обратить первую часть уравненія (2) въ полный дифференціалъ функціи отъ $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. Въ

самомъ дѣлѣ, рассмотримъ одинъ изъ первыхъ интеграловъ уравненія (2), и пусть будетъ

$$u = C$$

этотъ интеграль, рѣшенный относительно постоянной, которую онъ содержитъ. Дифференцируемъ его и напомнимъ для сокращенія $y^{(i)}$, вмѣсто $\frac{d^i y}{dx^i}$; будемъ имѣть

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial y'} y'' + \dots + \frac{\partial u}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} = 0,$$

и значеніе $y^{(n)}$, полученное изъ этого уравненія, будетъ то, которое дается даннымъ уравненіемъ; именно

$$Q + P y^{(n)} = 0;$$

поэтому имѣемъ

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial y^{(n-1)}}}{P} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial u}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}}{Q}.$$

откуда, означивъ черезъ λ общее значеніе этихъ отношеній, получимъ

$$\frac{\partial u}{\partial y^{(n-1)}} = \lambda P,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial u}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} = \lambda Q.$$

Отсюда слѣдуетъ, что выраженіе

$$\lambda P dy^{(n-1)} + \lambda Q dx$$

есть полный дифференціалъ du .

Можно доказать посредствомъ разсужденія, аналогичнаго тому, которое было употреблено въ § 683, что особое рѣшеніе даннаго уравненія должно удовлетворять уравненію $\frac{1}{\lambda} = 0$; мы ограничимся здѣсь только указаніемъ на это предположеніе, которое мы не считаемъ полезнымъ здѣсь доказывать.

Разысканіе множителей, о которыхъ былъ только-что вопросъ, представляетъ вообще непреодолимая затрудне-

нія; однако есть случаи, гдѣ ихъ легко найти. Мы сейчасъ дадимъ примѣръ, который есть одинъ изъ тѣхъ, которые разсматривалъ Эйлеръ.

718. Уравненіе, которымъ мы сейчасъ будемъ заниматься, слѣдующее:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\alpha y}{(\epsilon y^2 + \gamma + 2\delta x + \epsilon x^2)^2} = 0.$$

Разсматривая его видъ, мы видимъ, что можно предполагать существованіе такого множителя $\left(2X_1 \frac{dy}{dx} + 2X_2 y\right) dx$, чтобы онъ былъ способенъ обратить его первую часть въ полный дифференціалъ функціи u отъ x , y , $\frac{dy}{dx}$. Если такая функція u существуетъ, то часть $\frac{du}{d \frac{dy}{dx}} d \frac{dy}{dx}$ его полного дифференціала будетъ имѣть значеніе

$$\frac{d \left[X_1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2X_2 y \frac{dy}{dx} \right]}{d \frac{dy}{dx}} d \frac{dy}{dx},$$

и мы, слѣдовательно, будемъ имѣть

$$u = X_1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2X_2 y \frac{dy}{dx} + U,$$

гдѣ U есть функція только переменныхъ x и y . Приравнявъ дифференціалъ du нулю, получимъ

$$\begin{aligned} & \left(2X_1 \frac{dy}{dx} + 2X_2 y \right) \frac{d^2y}{dx^2} \\ & + \left(\frac{dX_1}{dx} + 2X_2 \right) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dX_2}{dx} y \frac{dy}{dx} + dU \times \frac{1}{dx} = 0, \end{aligned}$$

и чтобы это уравненіе было тождественно данному, нужно чтобы

$$\begin{aligned} dU &= \frac{2\alpha X_1 y dy + 2\alpha X_2 y^2 dx}{(\epsilon y^2 + \gamma + 2\delta x + \epsilon x^2)^2} \\ &- \left(\frac{dX_1}{dx} - 2X_2 \right) \frac{dy^2}{dx} - 2 \frac{dX_2}{dx} y dy. \end{aligned}$$

Первая часть этого значенія dU дѣлается полнымъ дифференціаломъ, если положимъ

$$X_1 = \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2,$$

$$X_2 = -\frac{1}{2} \frac{dX_1}{dx} = -\delta - \varepsilon x,$$

и тогда оставшаяся часть также есть полный дифференціалъ. Имѣемъ

$$dU = -\frac{\alpha}{6} d \frac{\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2}{6y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2} + \varepsilon d(y^2),$$

и слѣдовательно

$$U = -\frac{\alpha}{6} \frac{\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2}{6y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2} + \varepsilon y^2 + C,$$

гдѣ C есть постоянная.

Множитель, который мы употребляли, есть

$$2(\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2) \frac{dy}{dx} - 2(\delta + \varepsilon x)y,$$

и мы вычисляемъ этотъ первый интегралъ изъ даннаго уравненія, именно

$$(\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2(\delta + \varepsilon x)y \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha(\gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)}{6(6y^2 + \gamma + 2\delta x + \varepsilon x^2)} + \varepsilon y^2 + C = 0.$$

**Употребленіе дифференцированія для интегрированія дифференціаль-
ныхъ уравненій.**

719. Пусть

$$(1) \quad U = 0$$

будетъ дифференціальное уравненіе какого-нибудь порядка n между двумя переменными x и y . Взявъ дифференціалъ, получимъ уравненіе порядка $n+1$

$$(2) \quad U_1 = 0,$$

и мы будемъ въ состояніи образовать потомъ изъ уравненій (1) и (2) различныя комбинаціи. Пусть будетъ

$$(3) \quad V_1 = 0$$

уравнение порядка $n+1$, происходящее отъ одной изъ этихъ комбинацій. Если можно найти первый интеграль уравненія (3), отличный отъ даннаго уравненія, то мы узнаемъ также интеграль этого послѣдняго; потому что, если

$$(4) \quad V = 0$$

есть первый интеграль уравненія (3) и если исключеніе $\frac{d^n y}{dx^n}$ изъ уравненій (1) и (4) даетъ результатъ

$$(5) \quad W = 0,$$

то это уравненіе (5), которое есть порядка $n-1$ и которое содержитъ произвольную постоянную, будетъ очевидно первымъ интеграломъ уравненія (1).

Если уравненіе (1) перваго порядка, то уравненіе (5) дастъ его общій интеграль.

720. П р и м ѣ р ъ. — Чтобы дать примѣръ этого метода интегрированія, предположимъ, что найти линіи кривизны поверхности втораго порядка съ центромъ. Уравненіе этой поверхности есть

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

если положимъ

$$A = \frac{(c^2 - b^2)\rho^2}{c^2(\rho^2 - b^2)}, \quad B = \frac{b^2\rho^2}{c^2},$$

то дифференціальное уравненіе проэкцій линій кривизны на плоскость xy будетъ (§ 341)

$$(1) \quad Axy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (x^2 - Ay^2 - B) \frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Черезъ дифференцированіе этого уравненія имѣемъ

$$(2) \quad \begin{cases} \left(2Axy \frac{dy}{dx} + x^2 - Ay^2 - B \right) \frac{d^2y}{dx^2} \\ + \left(A \frac{dy^2}{dx^2} + 1 \right) \left(x \frac{dy}{dx} - y \right) = 0, \end{cases}$$

и исключение $x^2 - Ay^2 - B$ изъ уравненій (1) и (2), послѣ уничтоженія множителя $A \frac{dy^2}{dx^2} + 1$, общаго всѣмъ членамъ, даетъ

$$(3) \quad xy \frac{d^2y}{dx^2} + \left(x \frac{dy}{dx} - y \right) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Если это уравненіе раздѣлимъ на $xy \frac{dy}{dx}$, то получимъ

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{y} - \frac{1}{x} = 0.$$

перемѣнныя отдѣлены, и мы черезъ интегрированіе имѣемъ

$$\log \frac{dy}{dx} + \log y - \log x = \log C$$

или

$$(4) \quad \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = C,$$

гдѣ C постоянная. Исключеніе $\frac{dy}{dx}$ изъ уравненій (1) и (4) даетъ

$$(5) \quad y^2 - Cx^2 + \frac{BC}{AC + 1} = 0,$$

что согласуется съ результатами, полученными прежде помощью другихъ способовъ (§ 338 и § 650).

Рѣшеніе задачи, требующей интегрированія системы совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій.

721. Мы видѣли, что интегрированіе системы совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій какого-нибудь порядка постоянно приводится черезъ исключеніе къ интегрированію одного или нѣсколькихъ уравненій, содержащихъ каждое только двѣ перемѣнныя; но такое сокращеніе не всегда упрощаетъ задачи, которыя надлежитъ рѣшить. При отсутствіи всякаго общаго метода интегрированія, не будетъ бесполезно

дать здѣсь частный примѣръ, заимствованный нами въ Геометріи.

З а д а ч а. — *Найти ортогональныя траекторіи движущейся плоскости.*

Пусть будутъ x, y, z три прямоугольныя координаты и

$$(1) \quad x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - u = 0$$

уравненіе движущейся плоскости; разстояніе u этой плоскости до начала и углы α, β, γ , которые она образуетъ съ осями, суть данныя функціи параметра t . Такъ какъ искомыя траекторіи должны быть перпендикулярны къ плоскости, то дифференціальныя уравненія задачи будутъ

$$(2) \quad \frac{dx}{\cos \alpha} = \frac{dy}{\cos \beta} = \frac{dz}{\cos \gamma};$$

можно предположить, что мы получили изъ уравненія (1) значеніе t въ функціи x, y, z и косинусы угловъ α, β, γ должны быть разсматриваемы въ уравненіи (2) какъ данныя функціи переменныхъ x, y, z . Для интегрированія этихъ уравненій (2) я употреблю формулы § 274 и сохраню означенія этого параграфа. Такимъ образомъ углы α, β, γ очевидно суть тѣ, которые образуетъ касательная искомой кривой съ направленіями осей; поэтому я означу черезъ ξ, η, ζ и черезъ λ, μ, ν углы, образуемые главной нормалью и осью соприкасающейся плоскости кривой съ тѣми же осями; сверхъ того $d\sigma, d\tau$ будутъ означать углы соприкосновенія и совращенія, ds дифференціалъ дуги кривой, такъ что будемъ имѣть

$$(3) \quad \begin{cases} d\sigma = \sqrt{(d \cos \alpha)^2 + (d \cos \beta)^2 + (d \cos \gamma)^2}, \\ d\tau = \sqrt{(d \cos \lambda)^2 + (d \cos \mu)^2 + (d \cos \nu)^2}. \end{cases}$$

Теперь каждая часть формулы (2) равна ds и мы, слѣдовательно, имѣемъ

$$(4) \quad dx = ds \cos \alpha, \quad dy = ds \cos \beta, \quad dz = ds \cos \gamma.$$

Положимъ

$$(5) \quad x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu = U;$$

взявъ два раза дифференціалъ этого уравненія (5) и принявъ во вниманіе уравненія (4), получимъ (§ 274)

$$(6) \quad x \cos \xi + y \cos \eta - z \cos \zeta = \frac{dU}{d\tau},$$

$$(7) \quad x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = -\frac{d\tau}{d\sigma} \left(U + \frac{d}{d\tau} \frac{dU}{d\tau} \right).$$

Сравненіе уравненій (1) и (7) даетъ

$$(8) \quad \frac{d}{d\tau} \frac{dU}{d\tau} + U = -u \frac{d\sigma}{d\tau}.$$

По первому уравненію (3) $d\sigma$ есть произведение dt и данной функціи отъ t , потому что $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ также данныя функціи этого параметра. Потомъ, по формуламъ § 274, $\cos \xi$, $\cos \eta$, $\cos \zeta$ и $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ также извѣстныя функціи отъ t ; наконецъ $d\tau$, по второй формулѣ (3), есть произведение dt и такой же функціи. Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (8) есть дифференціальное уравненіе втораго порядка между переменными U и t ; интегрированіе введетъ поэтому двѣ произвольныя постоянныя. Когда значеніе U будетъ извѣстно, тогда координаты x , y , z будутъ даны уравненіями (5), (6), (7) въ функціи параметра t ; эти уравненія могутъ быть изображены черезъ

$$(9) \quad V = 0, \quad dV = 0, \quad d^2V = 0,$$

если только положимъ

$$(10) \quad V = x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu - U.$$

Уравненіе (8) принадлежитъ къ разряду тѣхъ, которыхъ теорія будетъ предметомъ слѣдующей главы; но оно интегрируется очень легко, если употребимъ формулы § 210. Дѣйствительно, пусть будутъ X , Y двѣ новыя переменныя, опредѣляемыя уравненіями

$$X \sin \tau - Y \cos \tau = U, \quad X \cos \tau + Y \sin \tau = \frac{dU}{d\tau};$$

будемъ имѣть

$$X = U \sin \tau + \frac{dU}{d\tau} \cos \tau, \quad Y = -U \cos \tau + \frac{dU}{d\tau} \sin \tau,$$

потомъ

$$dX = \left(U + \frac{d}{d\tau} \frac{dU}{d\tau} \right) \cos \tau d\tau \quad dY = \left(U + \frac{d}{d\tau} \frac{dY}{d\tau} \right) \sin \tau d\tau,$$

и по причинѣ уравненія (8)

$$dX = -u \frac{d\sigma}{d\tau} \cos \tau d\tau, \quad dY = -u \frac{d\sigma}{d\tau} \sin \tau d\tau.$$

Взявъ интегралъ и означивъ черезъ А и В двѣ произвольныя постоянныя, получимъ

$$X = A - \int_{\tau_0}^{\tau} u \frac{d\sigma}{d\tau} \cos \tau d\tau, \quad Y = B - \int_{\tau_0}^{\tau} u \frac{d\sigma}{d\tau} \sin \tau d\tau,$$

и слѣдовательно

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= A \sin \tau - B \cos \tau - \sin \tau \int_{\tau_0}^{\tau} u \frac{d\sigma}{d\tau} \cos \tau d\tau \\ &\quad + \cos \tau \int_{\tau_0}^{\tau} u \frac{d\sigma}{d\tau} \sin \tau d\tau. \end{aligned} \right.$$

Эта формула (11) даетъ выраженіе U въ функціи τ или, если угодно, въ функціи параметра t ; задача поэтому рѣшена.

ГЛАВА IX.

ТЕОРІЯ ЛИНЕЙНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

О линейныхъ уравненіяхъ.

722. *Линейными дифференціальными уравненіями* мы называемъ такія, въ которыхъ неизвѣстныя функціи и ихъ производныя входятъ только въ первой степени и не перемножаются между собой.

Если независимая переменная означена черезъ x , а неизвѣстная функція черезъ y , то общій видъ линейныхъ уравненій съ двумя переменными есть

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = V,$$

гдѣ коэффициенты P, \dots, T, U , а также и V суть данныя функціи отъ x , могущія обратиться въ постоянныя.

Когда количество V будетъ нуль, мы скажемъ, для сокращенія рѣчи, что *линейное уравненіе не имѣетъ второй части*. Мы увидимъ дальше, что интегрированіе линейныхъ уравненій со второй частью приводится къ интегрированію тѣхъ, которыя получаютъ отъ уничтоженія второй части.

Очевидно (§ 645), что линейныя уравненія не имѣютъ особыхъ рѣшеній.

Свойства линейных уравненій безъ второй части.

723. ПЕРВОЕ СВОЙСТВО. — Порядокъ линейнаго уравненія безъ второй части можетъ быть пониженъ на единицу, Дѣйствительно, уравненіе

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = 0$$

принадлежитъ къ классу однородныхъ уравненій; поэтому мы понизимъ его порядокъ на единицу, если положимъ (§ 606)

$$y = e^{\int_{x_0}^x z dx}$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = z e^{\int_{x_0}^x z dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx} + z^2 \right) e^{\int_{x_0}^x z dx}, \dots;$$

но нужно замѣтить, что полученное преобразованное уравненіе не будетъ линейнымъ.

Напримѣръ, въ случаѣ $n = 2$, данное уравненіе есть

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0,$$

и наше преобразование даетъ

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + Pz + Q = 0.$$

724 ВТОРОЕ СВОЙСТВО. — Если линейное уравненіе безъ второй части

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = 0$$

удовлетворяется, когда $y = y_1$, то оно удовлетворяется также для $y = Cy_1$, гдѣ C есть произвольная постоянная.

Дѣйствительно, результатъ подстановленія въ первую часть уравненія Cy_1 вмѣсто y равенъ произведенію постоянной C на результатъ подстановленія y_1 .

725. ТРЕТЬЕ СВОЙСТВО. — Если одно и то же линейное уравнение удовлетворяется, когда положимъ $y = y_1$, $y = y_2$, \dots , $y = y_i$, то оно также удовлетворяется для $y = y_1 + y_2 + \dots + y_i$.

Въ самомъ дѣлѣ, результатъ подстановленія

$$y_1 + y_2 + \dots + y_i$$

въ первую часть уравненія вмѣсто y , очевидно, есть сумма результатовъ, получаемыхъ отъ послѣдовательныхъ подстановленій y_1 , y_2 , \dots , y_i .

Изъ этого и предъидущаго свойства слѣдуетъ, что если извѣстно i рѣшеній y_1 , y_2 , \dots , y_i линейнаго уравненія безъ второй части, то можно будетъ образовать рѣшеніе того же уравненія, содержащее i произвольныхъ постоянныхъ, именно

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_i y_i.$$

Если же число i равно порядку n уравненія, то такимъ образомъ будемъ имѣть общій интегралъ дифференціального уравненія, съ тѣмъ, однако, чтобы произвольныя были такими, чтобы мы могли дать функции y и ея $n - 1$ первымъ производнымъ произвольныя значенія, отвѣчающія значенію x_0 переменнаго x , выбранному по произволу. Это послѣднее условіе не будетъ выполнено, если существуетъ линейное соотношеніе между y_1 , y_2 , \dots , y_n , потому что, въ этомъ случаѣ, имѣемъ

$$y_n = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_{n-1} y_{n-1},$$

гдѣ a_1 , a_2 , \dots , a_{n-1} постоянные коэффициенты; если это значеніе y_n подставимъ въ выраженіе y , то послѣднее приведется къ виду

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_{n-1} y_{n-1},$$

а такъ какъ оно не содержитъ n произвольныхъ, то оно и не можетъ быть общимъ интеграломъ.

726. ЧЕТВЕРТОЕ СВОЙСТВО. — Всѣ рѣшенія линейнаго уравненія порядка n , безъ второй части, заключаются

въ выраженіи

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

гдѣ C_1, C_2, \dots, C_n произвольныя постоянныя, а y_1, y_2, \dots, y_n опредѣленныя функции независимой перемѣнной.

Это предложеніе очевидно въ случаѣ $n = 1$, потому что дифференціальное уравненіе тогда будетъ

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} = -P dx,$$

и мы имѣемъ

$$y = C_1 y_1,$$

положимъ

$$y_1 = e^{\int_{x_0}^x P dx}$$

Послѣ этого достаточно доказать, что если это свойство принадлежитъ уравненіямъ порядка $n - 1$, то оно также принадлежитъ уравненіямъ порядка n . Предположимъ, поэтому, что уравненіе

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + Y \frac{dy}{dx} + Uy = 0$$

удовлетворяется для $y = y_1$, гдѣ y_1 есть функція отъ x безъ произвольной постоянной; сдѣлаемъ внесеніе

$$y = y_1 z,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = y_1 \frac{dz}{dx} + z \frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = y_1 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \frac{dy_1}{dx} \frac{dz}{dx} + z \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \dots;$$

если подставимъ эти значенія въ данное уравненіе, то очевидно, что коэффиціентъ при z будетъ

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dy_1}{dx} + Uy_1,$$

выраженіе, котораго значеніе по предположенію будетъ нуль.

Если положимъ $\frac{dz}{dx} = u$, то уравненіе въ u будетъ линейное безъ второй части и порядка $n - 1$; формула, дающая всѣ рѣшенія, поэтому будетъ

$$u = C_2 u_1 + C_3 u_2 + \dots + C_n u_{n-1},$$

и слѣдовательно общее выраженіе z будетъ

$$z = C_1 + C_2 \int_{x_0}^x u_1 dx + \dots + C_n \int_{x_0}^x u_{n-1} dx.$$

Такимъ образомъ, для общаго выраженія y будемъ имѣть

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int_{x_0}^x u_1 dx + \dots + C_n y_1 \int_{x_0}^x u_{n-1} dx,$$

это же доказываетъ изложенное предположеніе.

Интегрированіе линейнаго уравненія, снабженнаго второй частью, въ томъ случаѣ, когда извѣстенъ общій интегралъ уравненія безъ второй части.

727. Положимъ, для краткости,

$$(1) \quad \Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy,$$

гдѣ P, \dots, T, U суть данныя функціи отъ x , и рассмотримъ линейное уравненіе порядка n

$$(2) \quad \Phi(y) = V,$$

котораго вторая часть V есть также данная функція отъ x . Я говорю, что если извѣстенъ общій интегралъ уравненія

$$(3) \quad \Phi(y) = 0$$

безъ второй части, то можно будетъ вычислить интегралъ уравненія (2) посредствомъ простыхъ квадратуръ.

Пусть будетъ

$$(4) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

общій интегралъ уравненія (3), гдѣ C_1, C_2, \dots, C_n произвольныя постоянныя. Если рассматриваемъ произвольныя C_1, C_2, \dots, C_n какъ неопредѣленныя функціи отъ x , то вторая часть формулы (4) можетъ представлять какую угодно функцію

и въ то же время будемъ имѣть

$$(6) \quad \begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \\ \frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \dots + C_n \frac{dy_n}{dx}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \dots + C_n \frac{d^2 y_n}{dx^2}, \\ \dots \dots \dots, \\ \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = C_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + C_2 \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \dots + C_n \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}}. \end{cases}$$

Намъ еще нужно значеніе $\frac{d^n y}{dx^n}$; но мы не можемъ болѣе составить изъ произвольныхъ новое соотношеніе, и послѣднее изъ уравненій (6), черезъ дифференцированіе, намъ дастъ

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d^n y}{dx^n} = C_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + C_2 \frac{d^n y_2}{dx^n} + \dots + C_n \frac{d^n y_n}{dx^n} \\ + \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \frac{dC_1}{dx} + \dots + \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \frac{dC_n}{dx}. \end{cases}$$

Подставимъ теперь въ уравненіе (2) значенія y и его n первыхъ производныхъ, выведенныя изъ уравненій (6) и (7); получимъ

$$C_1 \Phi(y_1) + C_2 \Phi(y_2) + \dots + C_n \Phi(y_n) + \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \frac{dC_1}{dx} + \dots + \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \frac{dC_n}{dx} = V.$$

Но количества $\Phi(y_1), \Phi(y_2), \dots, \Phi(y_n)$ по предположенію суть нули; поэтому имѣемъ

$$(8) \quad \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} \frac{dC_2}{dx} + \dots + \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \frac{dC_n}{dx} = V.$$

Теперь, если детерминантъ

$$(9) \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \dots & \frac{dy_n}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

не есть нуль, то уравненія (5) и (8) для $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \dots, \frac{dC_n}{dx}$ дадутъ опредѣленныя значенія, функціи отъ x .

Чтобы получить эти значенія, сложимъ уравненія (5) и (8), умноживъ сперва первыя на множители $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$, и положимъ вообще

$$(10) \quad \varphi(y) = \lambda_0 y + \lambda_1 \frac{dy}{dx} + \dots + \lambda_{n-2} \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

будемъ имѣть

$$(11) \quad \varphi(y_1) \frac{dC_1}{dx} + \varphi(y_2) \frac{dC_2}{dx} + \dots + \varphi(y_n) \frac{dC_n}{dx} = V.$$

Для полученія значенія $\frac{dC_i}{dx}$, нужно опредѣлить множители λ такъ, чтобы имѣли

$$(12) \quad \varphi(y_1) = 0, \varphi(y_2) = 0, \dots, \varphi(y_n) = 0, \text{ за исключеніемъ } \varphi(y_i) = 0,$$

и уравненіе (11) дастъ

$$(13) \quad \frac{dC_i}{dx} = \frac{V}{\varphi_i(y_i)},$$

гдѣ $\varphi_i(y_i)$ есть значеніе, принимаемое $\varphi(y)$, когда коэффициенты λ удовлетворяютъ уравненіямъ (12). Означимъ черезъ c_i произвольную постоянную; черезъ интегрированіе будемъ имѣть

$$C_i = c_i + \int_{x_0}^x \frac{Vdx}{\varphi_i(y_i)},$$

слѣдовательно, если положимъ

$$X = y_1 \int_{x_0}^x \frac{Vdx}{\varphi_1(y_1)} + y_2 \int_{x_0}^x \frac{Vdx}{\varphi_2(y_2)} + \dots + y_n \int_{x_0}^x \frac{Vdx}{\varphi_n(y_n)},$$

то общій интеграль уравненія (2) будетъ

$$y = X + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

гдѣ c_1, c_2, \dots, c_n произвольныя постоянныя. Мы видимъ, что онъ получится, если приложимъ функцію X къ общему интегралу уравненія (3).

Нужно замѣтить, что детерминантъ (9) никогда не можетъ быть нулемъ. Въ самомъ дѣлѣ, по предположенію, уравненіе (4) представляетъ общій интеграль уравненія (3),

когда рассматриваемъ C_1, C_2, \dots, C_n какъ произвольныя постоянныя; поэтому n уравненій (6) должны дать для C_1, C_2, \dots, C_n опредѣленные значенія функцій отъ $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, что не имѣло бы мѣста, если бы нашъ детерминантъ былъ нуль.

728. С п о с о б ъ К о ш и. — Способъ, который сейчасъ будемъ употреблять, основанный на *измѣненіи произвольныхъ*, имѣетъ большую важность въ Анализѣ, и онъ дастъ намъ очень вѣрное рѣшеніе предложенной нами задачи; но не будетъ однако бесполезно, показать здѣсь другое рѣшеніе, данное Коши, тому же самому вопросу.

Надлежитъ интегрировать уравненіе

$$(1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = F(x),$$

котораго вторую часть мы означили черезъ $F(x)$, предположивъ извѣстнымъ общій интегралъ $y = Y$ уравненія

$$(2) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = 0.$$

n произвольныхъ, входящихъ въ функцію Y , могутъ быть такъ опредѣлены, чтобы для $x = \alpha$ имѣли

$$(3) \quad Y = 0, \frac{dY}{d\alpha} = 0, \dots, \frac{d^{n-2}Y}{d\alpha^{n-2}} = 0 \text{ и } \frac{d^{n-1}Y}{d\alpha^{n-1}} = F(\alpha),$$

и я говорю, что уравненіе (1) удовлетворится, если положимъ

$$(4) \quad y = \int_0^x Y d\alpha.$$

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ дифференціалъ этой формулы (4) и означивъ черезъ (Y) значеніе Y для $\alpha = x$, имѣемъ

$$\frac{dy}{dx} + \int_0^x \frac{dY}{d\alpha} d\alpha + (Y),$$

или просто

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{dY}{d\alpha} d\alpha,$$

потому что формулы (3) имѣютъ мѣсто, когда замѣняемъ x черезъ α , а слѣдовательно, и когда замѣняемъ α черезъ x ; поэтому количество (Y) есть тождественно нуль.

Равнымъ образомъ, производныя $\frac{d^2 Y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-2} Y}{dx^{n-2}}$ уничтожаются для $\alpha = x$, поэтому черезъ послѣдовательныя дифференцированія имѣемъ

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = \int_0^x \frac{d^2 Y}{dx^2} d\alpha, \\ \frac{d^3 y}{dx^3} = \int_0^x \frac{d^3 Y}{dx^3} d\alpha, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int_0^x \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} d\alpha; \end{cases}$$

наконецъ, новое дифференцированіе дастъ

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \int_0^x \frac{d^n Y}{dx^n} d\alpha + \left(\frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} \right),$$

гдѣ $\left(\frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} \right)$ есть значеніе, принимаемое $\frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}}$ для $\alpha = x$.

Очевидно, что это значеніе есть $F(x)$, потому что по предположенію $\frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}}$ для $x = \alpha$ приводится къ $F(\alpha)$; такимъ образомъ имѣемъ

$$(7) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \int_0^x \frac{d^n Y}{dx^n} d\alpha + F(x).$$

Подставимъ теперь въ уравненіе (1) значенія $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$, выведенныя изъ формулъ (4), (5), (6) и (7); мы будемъ имѣть результатъ

$$\int_0^x \left(\frac{d^n Y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dY}{dx} + UY \right) d\alpha = 0,$$

это же есть вполнѣ тождество, потому что коэффициентъ при $d\alpha$ подъ знакомъ \int по предположенію есть нуль.

Мы знаемъ поэтому, черезъ этотъ способъ, рѣшеніе урав-

ненія (1); означимъ его черезъ X и положимъ

$$y = X + z.$$

Если вычеркнемъ уничтожающіеся члены, то результатъ подстановленія въ уравненіе (1) будетъ

$$\frac{d^n z}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dz}{dx} + Uz = 0,$$

это же есть ни что иное, какъ уравненіе (2), гдѣ буква y замѣнена черезъ x . Слѣдовательно, для полученія общаго интеграла уравненія (1), достаточно взять интеграль уравненія (2) и прибавить къ нему потомъ X .

Приведеніе линейнаго уравненія къ другому, низшаго порядка, въ томъ случаѣ, когда извѣстенъ одинъ или нѣсколько частныхъ интеграловъ уравненія безъ второй части.

729. Положимъ, какъ въ § 727,

$$(1) \quad \Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy,$$

гдѣ P, \dots, T, U данныя функціи отъ x . Мы сейчасъ покажемъ, что можно получить, посредствомъ квадратуръ, общій интеграль уравненія

$$(2) \quad \Phi(y) = V,$$

котораго вторая часть есть данная функція отъ x , когда извѣстенъ общій интеграль уравненія

$$(3) \quad \Phi(y) = 0,$$

или, что то же самое, когда извѣстны n различныхъ частныхъ интеграловъ этого уравненія, безъ произвольной постоянной. Мы намѣреваемся обобщить здѣсь этотъ результатъ, доказавъ, что интегрированіе уравненія (2) требуетъ только интегрированія линейнаго уравненія порядка $n - i$, когда извѣстны i частныхъ интеграловъ уравненія (3).

Предположимъ, что мы знаемъ частный интеграль y_1 уравненія (3); мы будемъ имѣть болѣе общій интеграль, если положимъ

$$(4) \quad y = C_1 y_1,$$

гдѣ C_1 есть произвольная, и, если рассматриваемъ C_1 какъ переменную, то уравненіе (4) будетъ въ состояніи представить общій интеграль уравненія (2); здѣсь это есть ни что иное, какъ то же измѣненіе переменныхъ, уже употребленное въ § 726. Уравненіе (4) черезъ дифференцирование дастъ (§ 64),

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{dC_1}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + 2 \frac{dC_1}{dx} \frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{d^2C_1}{dx^2}, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{d^ny}{dx^n} = C_1 \frac{d^ny_1}{dx^n} + \frac{n}{1} \frac{dC_1}{dx} \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \dots + y_1 \frac{d^n C_1}{dx^n}, \end{cases}$$

и такъ какъ $\Phi(y_1)$ по предположенію есть нуль, то внесеніе значеній (4) и (5) въ уравненіе (2) дастъ результатъ вида

$$(6) \quad \frac{d^n C_1}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} C_1}{dx^{n-1}} + \dots + T_1 \frac{dC_1}{dx} = V_1,$$

гдѣ P_1, \dots, T_1 и V_1 суть извѣстныя функціи отъ x . Уравненіе (6), откуда нужно получить значеніе C_1 , линейное и порядка n ; но такъ какъ оно содержитъ только производныя отъ C_1 и не содержитъ самой этой функціи, то мы его понизимъ до $n - 1$ порядка, положивъ

$$(7) \quad \frac{dC_1}{dx} = u;$$

въ этомъ случаѣ оно будетъ

$$(8) \quad \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + P_1 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \dots + T_1 u = V_1.$$

Если можемъ найти общій интеграль уравненія (8), то изъ уравненія (7), означивъ черезъ c_1 произвольную постоянную, будемъ имѣть

$$C_1 = c_1 + \int_{x_0}^x u dx;$$

наконецъ, уравненіе (4) дастъ

$$(9) \quad y = c_1 y_1 + y_1 \int_{x_0}^x u dx,$$

которое будетъ общимъ интеграломъ даннаго уравненія (2).

Такимъ образомъ, знаніе частнаго интеграла уравненія (3) позволяетъ понизить на единицу порядокъ уравненія (2), безъ уничтоженія линейнаго вида уравненія.

730. Предположимъ, что извѣстны i частныхъ интеграловъ

$$y_1, y_2, \dots, y_i$$

уравненія (3). Посредствомъ интеграла y_1 мы приведемъ, какъ мы только-что показали, интегрированіе уравненія (2) къ интегрированію уравненія (8), которое мы означимъ для краткости черезъ

$$(10) \quad \Psi(u) = V,$$

и я говорю, что мы знаемъ $i-1$ частныхъ интеграловъ уравненія

$$(11) \quad \Psi(u) = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что мы перейдемъ отъ уравненія (11) къ уравненію (3) черезъ внесеніе

$$u = \frac{d \frac{y}{y_1}}{dx},$$

а такъ какъ y_2, y_3, \dots, y_{i-1} суть рѣшенія этого уравненія (3), то уравненіе (11) будетъ удовлетворяться какимъ-нибудь однимъ изъ слѣдующихъ значеній u :

$$\frac{d \frac{y_2}{y_1}}{dx}, \frac{d \frac{y_3}{y_1}}{dx}, \dots, \frac{d \frac{y_i}{y_1}}{dx}.$$

Такимъ образомъ къ уравненію (10) можно приложить все то, что мы сказали объ уравненіи (2); разысканіе его интеграла приведется къ разысканію интеграла такого линейнаго уравненія порядка $n-2$, чтобы соотвѣтствующее уравненіе безъ второй части допускало $i-2$ извѣстныхъ частныхъ интеграловъ. Продолжая такимъ образомъ далѣе, образуемъ линейное уравненіе порядка $n-i$, котораго достаточно узнать общій интегралъ для полученія общаго интеграла даннаго уравненія.

731. З а м ѣ ч а н і я . — Знаніе частного интеграла y_1 уравненія (2) приводитъ, какъ мы видѣли, интегрированіе этого уравненія къ интегрированію уравненія (3); другими словами, оно даетъ средство уничтожить вторую часть, но не понизить порядокъ уравненія. Слѣдовательно, если извѣстно i частныхъ интеграловъ того же уравненія (2), то можно будетъ уничтожить вторую часть и понизить кромѣ того на $i - 1$ единицъ порядокъ уравненія, потому что интеграль y_1 былъ употребленъ для уничтоженія второй части; поэтому мы узнаемъ $i - 1$ интеграловъ $y_2 - y_1, y_3 - y_1, \dots, y_i - y_1$ преобразованнаго уравненія.

Если отношеніе V къ U есть постоянное, то, положивъ $y = \frac{V}{U}$, имѣемъ рѣшеніе уравненія (2); это уравненіе приводится поэтому къ уравненію (3).

Наконецъ изъ предъидущаго мы видимъ, что линейныя уравненія не допускаютъ особыхъ рѣшеній, для полученія которыхъ было бы необходимо прибѣгнуть къ общей теоріи этихъ рѣшеній. Мы видѣли, дѣйствительно, что если y_1 означаетъ рѣшеніе уравненія $\Phi(y) = 0$, то общій интеграль этого уравненія можно представить подъ видомъ

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n;$$

y_1 поэтому есть частный, интеграль. Также, если y_0 означаетъ рѣшеніе $\Phi(y) = V$, то общій интеграль этого уравненія будетъ вида

$$y = y_0 + C_1 y_1 + \dots + C_n y_n,$$

слѣдовательно y_0 опять есть частный интеграль.

Другой способъ приведенія линейнаго уравненія къ линейному уравненію низшаго порядка.

732. Приведеніе, которымъ мы занимались въ § 730, можетъ быть произведено другимъ способомъ; что мы здѣсь сейчасъ и покажемъ, чтобы дать новый примѣръ способа измѣненій переменныхъ.

Возьмемъ опять линейное уравненіе порядка n

$$(1) \quad \Phi(y) = V$$

и предположимъ, что намъ извѣстны i частныхъ интеграловъ и уравненіе безъ второй части

$$(2) \quad \mathbb{P}(y) = 0.$$

Мы будемъ имѣть болѣе общій частный интеграль уравненія (2), если положимъ

$$(3) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_i y_i,$$

гдѣ C_1, C_2, \dots, C_i произвольныя постоянныя, и если раз-
считываемъ эти произвольныя какъ переменныя функціи
отъ x , то уравненіе (3) будетъ способно представить общій
интегралъ уравненія (1); можно даже составить изъ произ-
вольныхъ $i - 1$ соотношеній, выбранныхъ по произволу.
Поступая здѣсь, какъ въ § 727, мы выберемъ соотношенія,
которыя должны быть такими, чтобы $i - 1$ первыхъ произ-
водныхъ отъ y имѣли, въ предположеніи переменныхъ произ-
вольныхъ, такія же выраженія, какъ и въ предположеніи по-
стоянныхъ произвольныхъ. Такимъ образомъ мы положимъ

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_i \frac{dC_i}{dx} = 0, \\ \frac{dy_1}{dx} \frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dC_2}{dx} + \dots + \frac{dy^i}{dx} \frac{dC_i}{dx} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{d^{i-2}y_1}{dx^{i-2}} \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{i-2}y_2}{dx^{i-2}} \frac{dC_2}{dx} + \dots + \frac{d^{i-2}y_i}{dx^{i-2}} \frac{dC_i}{dx} = 0 \end{array} \right.$$

И МЫ БУДЕМЪ ИМѢТЬ

[illegible]

Положимъ, сверхъ того

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d^{i-1}y_1}{dx^{i-1}} \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{i-1}y_2}{dx^{i-1}} \frac{dC_2}{dx} + \dots + \frac{d^{i-1}y_i}{dx^{i-1}} \frac{dC_i}{dx} = z, \\ \frac{d^i y_1}{dx^i} \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^i y_2}{dx^i} \frac{dC_2}{dx} + \dots + \frac{d^i y_i}{dx^i} \frac{dC_i}{dx} = z_1, \\ \dots, \\ \frac{d^{n-i} y_1}{dx^{n-i}} \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-i} y_2}{dx^{n-i}} \frac{dC_2}{dx} + \dots + \frac{d^{n-i} y_i}{dx^{n-i}} \frac{dC_i}{dx} = z_{n-i}; \end{cases}$$

и мы сделаемъ также, для сокращенія письма,

$$(7) \quad \begin{cases} Z = z, \\ Z_1 = \frac{dz}{dx} + z_1, \\ Z_2 = \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz_1}{dx} + z_2, \\ \dots, \\ Z_{n-i} = \frac{d^{n-i} z}{dx^{n-i}} + \dots + \frac{dz_{n-i-1}}{dx} + z_{n-i}; \end{cases}$$

взявъ дифференціалъ послѣдняго изъ уравненій (5) и повторивъ это дифференцирование до $n - i + 1$ порядка, получимъ

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d^i y}{dx^i} = C_1 \frac{d^i y_1}{dx^i} + C_2 \frac{d^i y_2}{dx^i} + \dots + C_i \frac{d^i y_i}{dx^i} + Z, \\ \frac{d^{i+1} y}{dx^{i+1}} = C_1 \frac{d^{i+1} y_1}{dx^{i+1}} + C_2 \frac{d^{i+1} y_2}{dx^{i+1}} + \dots + C_i \frac{d^{i+1} y_i}{dx^{i+1}} + Z_1, \\ \dots, \\ \frac{d^n y}{dx^n} = C_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + C_2 \frac{d^n y_2}{dx^n} + \dots + C_i \frac{d^n y_i}{dx^n} + Z_{n-i}. \end{cases}$$

Подставимъ теперь въ уравненіе (1) значенія y и его n первыхъ производныхъ, полученныхъ изъ формулъ (5) и (8); замѣчая, что y_1, y_2, \dots, y_i суть частные интегралы уравненія (2), будемъ имѣть

$$(9) \quad Z_{n-i} + PZ_{n-i-1} + \dots + SZ = V.$$

Но система, составленная изъ уравненій (4) и перваго уравненія (6), опредѣляетъ для

$$\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \dots, \frac{dC_i}{dx}$$

значенія вида

$$(10) \quad \frac{dC_1}{dx} = X_1 z, \quad \frac{dC_2}{dx} = X_2 z, \quad \dots, \quad \frac{dC_i}{dx} = X_i z,$$

гдѣ X_1, X_2, \dots, X_i данныя функціи отъ x , а $n - i$ послѣднихъ уравненій (6) даютъ для z_1, z_2, z_{n-i} значенія такія, какъ

$$(11) \quad z_1 = \Xi_1 z, \quad z_2 = \Xi_2 z, \quad \dots, \quad z_{n-i} = \Xi_{n-i} z,$$

гдѣ $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_{n-i}$ равнымъ образомъ данныя функціи отъ x . Слѣдовательно, количества, означенныя черезъ Z_k , суть линейныя функціи порядка k относительно z и его производныхъ; уравненіе (9), къ которому мы приводимъ данное, поэтому есть линейное, какъ и послѣднее, и къ тому же порядка $n - i$.

Общій интегралъ уравненія (9) содержитъ $n - i$ произвольныхъ постоянныхъ; этотъ интегралъ предполагается извѣстнымъ, поэтому изъ уравненій (10) будемъ имѣть

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = c_1 + \int_{x_0}^x X_1 z \, dx, \\ C_2 = c_2 + \int_{x_0}^x X_2 z \, dx, \\ \dots, \dots, \dots, \\ C_i = c_i + \int_{x_0}^x X_i z \, dx, \end{array} \right.$$

гдѣ c_1, c_2, \dots, c_i означаютъ i новыхъ произвольныхъ постоянныхъ. Если употребимъ эти значенія C_1, C_2, \dots, C_i , то уравненіе (3) дастъ общій интегралъ даннаго уравненія; онъ содержитъ вполнѣ, какъ мы видимъ, n произвольныхъ постоянныхъ.

О линейных уравненіяхъ втораго порядка.

733. Рассмотрим линейное уравнение второго порядка.

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = V,$$

гдѣ P , Q , V суть данныя функція отъ x . На основаніи теоріи, изложенной прежде (§ 729), если знаемъ рѣшеніе y_1 уравненія, полученнаго отъ замѣненія V нулемъ, интегрированіе даннаго уравненія будетъ зависѣть только отъ ли-

нейнаго уравненія перваго порядка, а такъ какъ такое уравненіе можетъ быть всегда интегрировано, то можно будетъ также опредѣлить общій интеграль уравненія (1). Мы очень легко получимъ этотъ интеграль, поступивъ слѣдующимъ образомъ. По предположенію, имѣемъ

$$(2) \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2} + P \frac{dy_1}{dx} + Q y_1 = 0.$$

Вычитая уравненія (1) и (2) одно изъ другаго, послѣ умноженія перваго на y_1 и втораго на y , получимъ

$$\left(y_1 \frac{d^2 y}{dx^2} - y \frac{d^2 y_1}{dx^2} \right) + P \left(y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} \right) = V y_1;$$

но если сдѣлаемъ

$$(3) \quad y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} = z,$$

то будемъ имѣть

$$y_1 \frac{d^2 y}{dx^2} - y \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{dz}{dx};$$

поэтому

$$(4) \quad \frac{dz}{dx} + Pz = V y_1.$$

Общій интеграль этого уравненія есть

$$(5) \quad z = e^{-\int_{x_0}^x P dx} \left(C_1 + \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^x P dx} V y_1 dx \right);$$

уравненіе (3) даетъ потомъ

$$\frac{d \frac{y}{y_1}}{dx} = \frac{z}{y_1^2},$$

откуда, взявъ интеграль,

$$(6) \quad y = C y_1 + y_1 \int_{x_0}^x \frac{z}{y_1^2} dx.$$

Это выраженіе (6) y содержитъ двѣ произвольныя постоянныя C, C_1 .

734. Здѣсь удобно указать, по Штурму, свойство интеграловъ уравненія безъ второй части

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0.$$

Пусть будутъ y_1 и y_2 два частныхъ интеграла, изъ которыхъ можно составить, какъ мы знаемъ, общій интегралъ. На основаніи предъидущаго будемъ имѣть

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = C_1 e^{-\int_{x_0}^x P dx},$$

откуда слѣдуетъ, что функція $y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx}$ имѣетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ и, слѣдовательно, y_1 и $\frac{dy_1}{dx}$ или y_2 и $\frac{dy_2}{dx}$ не могутъ уничтожиться для одного и того же значенія x . Предположимъ

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} > 0;$$

если функція y_1 уничтожается для $x = a$ и для $x = b$, то для того и другаго значенія x будемъ имѣть

$$y_1 \frac{dy_1}{dx} < 0,$$

и слѣдовательно y_2 и $\frac{dy_1}{dx}$ будутъ противныхъ знаковъ. Пусть $b > a$; когда x возрастаетъ отъ a до b , $\frac{dy_1}{dx}$ измѣняетъ знакъ для нѣкотораго значенія α переменнй x ; поэтому y_2 должно также измѣнить знакъ, прежде чѣмъ x сдѣлается равнымъ b . Слѣдовательно, если функція y_2 остается конечной, то она уничтожится для значенія x , заключающагося между a и b . Мы видимъ, что такимъ же образомъ y_1 необходимо уничтожается, если только остается непрерывнымъ, для значенія x , заключающагося между двумя значеніями, уничтожающими y_2 .

Отсюда слѣдуетъ, что при возрастаніи x , двѣ функціи y_1 и y_2 уничтожаются попеременно, пока онѣ остаются непрерывными.

О линейныхъ уравненіяхъ безъ второй части съ постоянными коэффициентами.

735. Пусть будетъ, какъ въ § 727,

$$(1) \quad \Phi(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy,$$

гдѣ P, \dots, T, U суть постоянныя или функціи отъ x , и положимъ сверхъ того

$$(2) \quad f(r) = r^n + P r^{n-1} + \dots + T r + U,$$

гдѣ r есть неопредѣленная величина; если замѣнимъ y показательной функціей e^{rx} , то будемъ имѣть

$$(3) \quad \Phi(e^{rx}) = e^{rx} f(r).$$

Эта формула (3) есть тождество; дифференцируемъ ее i разъ относительно r ; очевидно, производная порядка i первой части будетъ

$$\frac{d^i \Phi(e^{rx})}{dr^i} = \Phi\left(\frac{d^i e^{rx}}{dr^i}\right) = \Phi(x^i e^{rx}).$$

Что касается производной порядка i второй части формулы (3), то получимъ ее по правилу § 66, служащему для дифференцированія произведеній; такимъ образомъ, означивъ черезъ $f'(r), f''(r), \dots$ послѣдовательныя производныя полинома $f(r)$, будемъ имѣть

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(x^i e^{rx}) &= e^{rx} \left[f^{(i)}(r) + \frac{i}{1} x f^{(i-1)}(r) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} x^2 f^{(i-2)}(r) + \dots + x^i f(r) \right]. \end{aligned} \right.$$

Теперь рассмотримъ линейное уравненіе порядка n безъ второй части

$$(5) \quad \Phi(y) = 0,$$

также какъ и соотвѣтствующее алгебраическое уравненіе

$$(6) \quad f(r) = 0,$$

которое будетъ называться *характеристическимъ уравненіемъ*.

Если характеристическое уравненіе допускаетъ корень r_1 ,

независящій отъ x , то мы видимъ изъ формулы (3), что уравненіе (5) допустить частный интегралъ $e^{r_1 x}$. Сверхъ того если этотъ корень r_1 — кратный и если μ означаетъ степень его кратности, то онъ принадлежитъ уравненіямъ

$$f'(r) = 0, \quad f''(r) = 0, \quad \dots, \quad f^{\mu-1}(r) = 0,$$

и слѣдовательно, для значеній $1, 2, \dots, (\mu - 1)$ количества i , формула (4) даетъ

$$\Phi(x^i e^{r_1 x}) = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что уравненіе (1) допустить μ рѣшеній

$$e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \dots, x^{\mu-1} e^{r_1 x}.$$

Когда коэффициенты P, \dots, T, U уравненія (5) постоянны, то характеристическое уравненіе имѣетъ свои n корней, независящіе отъ x , и слѣдовательно, имѣемъ такую теорему:

ТЕОРЕМА. — Если коэффициенты линейнаго уравненія порядка n безъ второй части $\Phi(y) = 0$ постоянны, то каждый корень характеристическаго уравненія даетъ столько частныхъ интеграловъ, сколько имѣетъ корень единицы въ своей степени кратности, и слѣдовательно, полное число этихъ частныхъ интеграловъ равно порядку дифференціальнаго уравненія.

Эта теорема позволяетъ образовать общій интегралъ дифференціальнаго уравненія. Если корни характеристическаго уравненія неравные и если означимъ ихъ черезъ r_1, r_2, \dots, r_n общій интегралъ уравненія (5), будетъ

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x},$$

гдѣ C_1, C_2, \dots, C_n произвольныя постоянныя. Въ общемъ случаѣ, пусть будутъ r_1, r_2, \dots, r_i различные корни характеристическаго уравненія, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_i$ ихъ соотвѣтственные степени кратности, общій интегралъ уравненія (5) будетъ

$$y = P_1 e^{r_1 x} + P_2 e^{r_2 x} + \dots + P_i e^{r_i x},$$

гдѣ P_1, P_2, \dots, P_i суть полиномы въ x съ произвольными коэффициентами и соотвѣтственно степеней $\mu_1 - 1, \mu_2 - 1, \dots, \mu_i - 1$.

736. Чтобы рѣшеніе, образованное какъ сейчасъ было сказано, было дѣйствительно общимъ интеграломъ даннаго уравненія, необходимо, чтобы мы могли дать постояннымъ такія значенія, чтобы

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

принимали для $x = x_0$ произвольныя значенія

$$y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}.$$

Мы сейчасъ покажемъ, что это условіе выполнимо, ограничиваясь однако тѣмъ случаемъ, когда характеристическое уравненіе не имѣетъ равныхъ корней.

Если сдѣлаемъ вообще

$$C_i = c_i e^{-r_i x_0},$$

то значеніе y , полученное нами, приметъ видъ

$$y = c_1 e^{r_1(x-x_0)} + c_2 e^{r_2(x-x_0)} + \dots + c_n e^{r_n(x-x_0)},$$

и мы черезъ дифференцированіе получимъ

$$\frac{dy}{dx} = c_1 r_1 e^{r_1(x-x_0)} + c_2 r_2 e^{r_2(x-x_0)} + \dots + c_n r_n e^{r_n(x-x_0)},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = c_1 r_1^{n-1} e^{r_1(x-x_0)} + \dots + c_n r_n^{n-1} e^{r_n(x-x_0)}.$$

Для $x = x_0$ будемъ имѣть

$$y_0 = c_1 + c_2 + \dots + c_n,$$

$$y'_0 = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \dots + c_n r_n,$$

$$y''_0 = c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 + \dots + c_n r_n^2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_0^{(n-1)} = c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_2^{n-1} + \dots + c_n r_n^{n-1},$$

и намъ надлежитъ доказать, что изъ этихъ уравненій можно получить конечныя и опредѣленныя значенія для c_1, c_2, \dots, c_n , предположивъ различными корни $r_1,$

r_2, \dots, r_n . Для этого сложим предыдущія уравненія послѣ умноженія ихъ соотвѣтственно на множители

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}, 1;$$

будемъ имѣть

$$A = c_1 \varphi(r_1) + c_2 \varphi(r_2) + \dots + c_n \varphi(r_n),$$

положивъ для краткости

$$A = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y'_0 + \lambda_2 y''_0 + \dots + \lambda_{n-2} y_0^{(n-2)} + y_0^{(n-1)},$$

$$\varphi(r) = \lambda_0 + \lambda_1 r + \lambda_2 r^2 + \dots + \lambda_{n-2} r^{n-2} + r^{n-1}.$$

Предположимъ, что хотятъ опредѣлить c_i ; для этого слѣдуетъ распредѣлить неопредѣленные множители λ такимъ образомъ, чтобы было

$$\varphi(r_1) = 0, \quad \varphi(r_2) = 0, \quad \dots, \quad \varphi(r_n) = 0, \quad \text{исключая } \varphi(r_i) = 0,$$

и предыдущее уравненіе дастъ

$$c_i = \frac{A}{\varphi(r_i)}.$$

Условія, изъ которыхъ мы опредѣляемъ множители λ , выражаютъ, что уравненіе

$$\varphi(r) = 0$$

имѣетъ корнями r_1, r_2, \dots, r_n , исключая r_i . Но характеристическое уравненіе $f(r) = 0$ имѣетъ тѣ же самые корни, включая и r_i . Поэтому имѣемъ

$$\varphi(r) = \frac{f(r)}{r - r_i} = \frac{r^n + Pr^{n-1} + \dots + Tr + U}{r - r_i},$$

производя дѣленіе во второй части и сравнивая потомъ въ той и другой части коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ r , получимъ

$$\lambda_{n-2} = P + r_i,$$

$$\lambda_{n-3} = Q + Pr_i + r_i^2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\lambda_0 = T + \dots + Pr_i^{n-2} + r_i^{n-1},$$

уравненія, опредѣляющія множители λ .

Выраженіе $\varphi(r)$ для $r = r_i$ сдѣлается

$$\varphi(r_i) = f'(r_i),$$

откуда

$$c_i = \frac{\Lambda}{f'(r_i)},$$

это же есть опредѣленное значеніе, потому что уравненіе $f(r) = 0$ не имѣетъ кратныхъ корней и дѣлитель $f'(r_i)$ не можетъ быть нулемъ. Такимъ образомъ наше рѣшеніе даннаго дифференціального уравненія вполне удовлетворяетъ условію, которое долженъ выполнить общій интеграль.

737. С п о с о б ъ д'А л а м б е р а. — Мы доказали выше, что каждый корень характеристическаго уравненія даетъ столько частныхъ интеграловъ соотвѣтствующаго линейнаго уравненія, сколько единицъ въ его степени кратности. Но и безъ помощи этой теоремы можно легко перейти отъ случая неравныхъ корней къ случаю кратныхъ корней, употребивъ способъ, принадлежащій д'Аламберу и представляющій драгоценныя средства въ разныхъ вопросахъ анализа. Вотъ въ чемъ состоитъ этотъ методъ. Пусть будутъ, какъ обыкновенно,

$$(1) \quad \Phi(y) = 0$$

данное линейное уравненіе и

$$(2) \quad f(r) = 0$$

характеристическое уравненіе. Предположимъ, что это послѣднее уравненіе имѣетъ только одинъ кратный корень r_1 и что степень его кратности есть 2. Означимъ черезъ

$$(3) \quad \Psi(y) = 0$$

линейное уравненіе, отвѣчающее характеристическому уравненію

$$(4) \quad \frac{(r - r_1 - h)f(r)}{r - r_1} = 0,$$

гдѣ h есть количество какъ угодно малое.

Уравнение (4) не имѣетъ кратныхъ корней, поэтому общій интеграль уравненія (3) будетъ

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{(r_1+h)x} + C_3 e^{r_3 x} + \dots + C_n e^{r_n x}.$$

Но мы имѣемъ

$$e^{(r_1+h)x} = e^{r_1 x} \left(1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2 x^2}{1 \cdot 2} + \dots \right),$$

и если сдѣлаемъ

$$C_1 + C_2 = D_1, \quad C_2 h = D_2,$$

то значеніе y будетъ

$$y = e^{r_1 x} \left(D_1 + D_2 x + D_2 h \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots \right) + C_3 e^{r_3 x} + \dots + C_n e^{r_n x};$$

D_1 и D_2 суть двѣ произвольныя постоянныя, которыя можно подставить вмѣсто C_1 и C_2 . Теперь, если заставимъ h бесконечно убывать, то уравненіе (3) сдѣлается въ предѣлѣ тождественнымъ уравненію (1), и въ то же время предыдущее значеніе y станетъ

$$y = (D_1 + D_2 x) e^{r_1 x} + C_3 e^{r_3 x} + \dots + C_n e^{r_n x},$$

это же согласуется съ теоремой § 735.

Предположимъ теперь, что характеристическое уравненіе линейнаго уравненія $\Phi(y) = 0$ имѣетъ три корня, равныхъ r_1 ; уравненіе (4) будетъ имѣть два корня, равныхъ r_1 , и одинъ корень r_3 , равный $r_1 + h$; тогда общій интеграль уравненія (3) будетъ

$$y = (D_1 + D_2 x) e^{r_1 x} + C_3 e^{(r_1+h)x} + \dots + C_n e^{r_n x}.$$

Разложивъ e^{hx} въ рядъ и положивъ

$$D_1 + C_3 = E_1, \quad D_2 + C_3 h = E_2, \quad C_3 \frac{h^2}{1 \cdot 2} = E_3,$$

получимъ

$$y = \left(E_1 + E_2 x + E_3 x^2 + \frac{E_3 h}{3} x^3 + \dots \right) e^{r_1 x} + \dots + C_n e^{r_n x},$$

и если заставимъ h стремиться къ нулю, то въ предѣлѣ будемъ имѣть

$$y = (E_1 + E_2 x + E_3 x^2) e^{r_1 x} + \dots + C_n e^{r_n x},$$

это же есть общий интегралъ даннаго уравненія въ случаѣ тройнаго корня r_1 .

Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы увидимъ, что, если μ_1 означаетъ степень кратности корня r_1 , то общий интегралъ приметъ видъ

$$y = P_1 e^{r_1 x} + \dots + C_n e^{r_n x},$$

гдѣ P_1 есть произвольный полиномъ въ x , степени $\mu_1 - 1$; и поступая такимъ образомъ съ другими кратными корнями, которые можетъ имѣть уравненіе $f(r) = 0$, мы вполне воспроизведемъ результатъ, къ которому мы пришли въ § 735.

Въ томъ, что предшествовало, мы не дѣлали никакого предположенія о природѣ корней характеристическаго уравненія. Когда коэффициенты дѣйствительны, то два сопряженныхъ мнимыхъ корня вводятъ въ общий интегралъ члены, осложненные мнимыми величинами, и часто бываетъ полезно привести ихъ къ дѣйствительному виду.

Пусть будутъ $r_1 = \alpha + \beta \sqrt{-1}$, $r_2 = \alpha - \beta \sqrt{-1}$ два мнимыхъ сопряженныхъ корня характеристическаго уравненія. Если эти корни простые, то они введутъ въ общий интегралъ члены

$$C_1 e^{\alpha x} (\cos \beta x + \sqrt{-1} \sin \beta x) + C_2 e^{\alpha x} (\cos \beta x - \sqrt{-1} \sin \beta x),$$

которые можно замѣнить черезъ

$$(A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x},$$

положивъ

$$A = C_1 + C_2, \quad B = (C_1 - C_2) \sqrt{-1}.$$

Можно также положить

$$A = G \cos g, \quad B = -G \sin g,$$

и оба рассматриваемые нами члена будутъ замѣнены черезъ

$$G e^{\alpha x} \cos (\beta x + g),$$

гдѣ G и g двѣ произвольныя постоянныя.

Мы видимъ непосредственно, что если сопряженные корни r_1, r_2 имѣютъ степень кратности μ , то они введутъ въ общій интегралъ члены

$$e^{\alpha x} [G \cos (\beta x + g) + G_1 x \cos (\beta x + g_1) + \dots + G_{\mu-1} x^{\mu-1} \cos (\beta x + g_{\mu-1})],$$

гдѣ $G, G_1, \dots, G_{\mu-1}, g, g_1, \dots, g_{\mu-1}$ обозначаютъ 2μ произвольныхъ постоянныхъ

Разсмотримъ, на примѣръ, уравненіе

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = 0,$$

которымъ мы уже занимались въ § 703; характеристическое уравненіе здѣсь есть $r^2 + n^2 = 0$, и мы имѣемъ $r = \pm n \sqrt{-1}$; общій интегралъ поэтому будетъ

$$y = A \cos nx + B \sin nx,$$

или, если угодно,

$$y = G \cos (nx + g).$$

739. Теорема § 735 иногда приложима къ линейнымъ уравненіямъ, въ которыхъ коэффициенты не всѣ постоянны. Мы считаемъ необходимымъ дать примѣръ.

Пусть будетъ уравненіе четвертаго порядка

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - (x + 3) \frac{d^3 y}{dx^3} + 3(x + 1) \frac{d^2 y}{dx^2} - (3x + 1) \frac{dy}{dx} + xy = 0;$$

характеристическое уравненіе здѣсь есть

$$(r - 1)^3 (r - x) = 0;$$

оно имѣетъ три корня, равные 1, и, слѣдовательно, мы удовлетворимъ данному уравненію, если положимъ

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^x.$$

Зная три частныхъ интеграла, можно привести дифференціальное уравненіе къ первому порядку и, слѣдовательно, вполне его интегрировать (§ 732). Но мы придемъ скорѣе къ искомому результату, употребивъ просто рѣшеніе

$$y = Ce^x.$$

Разсматривая C какъ переменную, мы найдемъ такое преобразованное уравненіе въ C :

$$\frac{d^4 C}{dx^4} + (1 - x) \frac{d^3 C}{dx^3} = 0.$$

Положивъ

$$\frac{d^3 C}{dx^3} = u,$$

получимъ

$$\frac{du}{dx} + (1 - x) u = 0 \quad \text{или} \quad \frac{du}{u} = (x - 1) dx,$$

откуда

$$u = ce^{\frac{1}{2}(x-1)^2};$$

поэтому имѣемъ

$$\frac{d^3 C}{dx^3} = ce^{\frac{1}{2}(x-1)^2},$$

и взявъ интеграль по способу § 693, получимъ

$$C = c \int_0^x (x - z)^2 e^{\frac{1}{2}(z-1)^2} dz + c_0 + c_1 x + c_2 x^2;$$

интеграль даннаго уравненія такимъ образомъ есть

$$y = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) e^x + ce^x \int_0^x (x - z)^2 e^{\frac{1}{2}(z-1)^2} dz,$$

гдѣ c_0 , c_1 , c_2 , c четыре произвольныя постоянныя.

О линейныхъ уравненіяхъ со второй частью и съ постоянными коэффициентами.

740. Чтобы получить общій интеграль линейнаго уравненія

$$(1) \quad \Phi(y) = V,$$

достаточно, какъ мы видѣли, узнать частный интеграль безъ произвольной постоянной и приложить его къ общему инте-

гралу уравненія безъ второй части

$$(2) \quad \Phi(y) = 0.$$

Мы доказали въ § 727, что искомый частный интеграль $y = X$ получится, если положимъ

$$(3) \quad X = y_1 \int_{x_0}^x \frac{V dx}{\varphi_1(y_1)} + y_2 \int_{x_0}^x \frac{V dx}{\varphi_2(y_2)} + \dots + y_n \int_{x_0}^x \frac{V dx}{\varphi_n(y_n)}.$$

Въ этой формулѣ y_1, y_2, \dots, y_n означаютъ n частныхъ интеграловъ уравненія (2), а $\varphi_i(y)$ представляетъ функцію

$$\lambda_0 + \lambda_1 \frac{dy}{dx} + \lambda_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \dots + \lambda_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}},$$

гдѣ коэффициенты λ опредѣлены такъ, чтобы имѣли

$$\varphi_i(y_1) = 0, \varphi_i(y_2) = 0, \dots, \varphi_i(y_n) = 0, \text{ исключая } \varphi_i(y_i) = 0.$$

Приложимъ этотъ результатъ къ тому случаю, когда коэффициенты $\Phi(y)$ постоянны и характеристическое уравненіе не имѣетъ равныхъ корней. Здѣсь имѣемъ $y_i = e^{r_i x}$ и $\varphi_i(y)$ есть произведеніе $e^{r_i x}$ и полинома

$$\lambda_0 + \lambda_1 r + \lambda_2 r^2 + \dots + \lambda_{n-2} r^{n-2} + r^{n-1},$$

который долженъ уничтожиться, когда полагаемъ $r = r_1, r_2, \dots, r_n$, исключая r_i ; отсюда слѣдуетъ, что, если $f(r)$ означаетъ первую часть характеристическаго уравненія, то имѣемъ

$$\varphi_i(y) = e^{r_i x} \frac{f(r)}{r - r_i},$$

и для $y = y_i$ или $r = r_i$

$$\varphi_i(y_i) = e^{r_i x} f'(r_i).$$

Поэтому формула (3) дастъ

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{e^{r_1 x}}{f'(r_1)} \int_{x_0}^x e^{-r_1 x} V dx + \frac{e^{r_2 x}}{f'(r_2)} \int_{x_0}^x e^{-r_2 x} V dx + \dots \\ &+ \frac{e^{r_n x}}{f'(r_n)} \int_{x_0}^x e^{-r_n x} V dx. \end{aligned} \right.$$

Вотъ какое количество нужно прибавить къ общему инте-

гралу уравненія (2), чтобы получить общій интеграль уравненія (3). Мы получимъ ту же формулу, приложивъ способъ Коши, изложенный нами въ § 728.

Не трудно было бы вывести изъ формулы (4) тѣ формулы, которыя относятся къ случаямъ, когда характеристическое уравненіе имѣетъ кратные корни; но мы не считаемъ полезнымъ развить этотъ анализъ. Мы легко рѣшимъ вопросъ въ каждомъ случаѣ, если употребимъ формулу (3).

741. П р и м ѣ р ы. — 1) Пусть надлежитъ интегрировать уравненіе

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - n^2 y = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Разсматривая сначала уравненіе

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - n^2 y = 0,$$

получимъ характеристическое уравненіе $f(r) = r^2 - n^2 = 0$, откуда $r = \pm n$; общій интеграль поэтому есть

$$y = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}.$$

Обратимся къ данному; по причинѣ $f'(r) = 2r$ и

$$\int e^{-rx} V dx = -\frac{e^{-rx} V}{r} + \int \frac{e^{-rx}}{r} \frac{dV}{dx} dx,$$

имѣемъ

$$X = -\frac{1}{n^2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{e^{nx}}{2n^2} \int_0^x \frac{e^{-nx} dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{e^{-nx}}{2n^2} \int_0^x \frac{e^{nx} dx}{\sqrt{1+x^4}},$$

или, подставивъ α вмѣсто x подъ каждымъ знакомъ \int , имѣемъ

$$X = \frac{1}{2n^2} \int_0^x \left[\frac{e^{\frac{n(x-\alpha)}{2}} - e^{-\frac{n(x-\alpha)}{2}}}{\sqrt{1+\alpha^4}} \right] d\alpha;$$

искомый интеграль будетъ

$$y = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx} + X.$$

2) Разсмотримъ еще уравненіе

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2n \frac{dy}{dx} + n^2 y = V.$$

Уравненіе безъ второй части отвѣчаетъ характеристическому уравненію $(r - n)^2 = 0$, и отсюда слѣдуютъ два частныхъ интеграла $y_1 = e^{nx}$, $y_2 = xe^{nx}$; далѣе, сохраняя означенія § 740, имѣемъ

$$\varphi_1(y_1) = -\frac{e^{nx}}{x}, \quad \varphi_2(y_2) = e^{nx}.$$

Положивъ поэтому

$$X = -e^{nx} \int_{x_0}^x V xe^{-nx} dx + xe^{nx} \int_{x_0}^x V e^{-nx} dx,$$

для общаго интеграла даннаго уравненія будемъ имѣть

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{nx} + X,$$

гдѣ C_1 и C_2 двѣ произвольныя постоянныя.

742. вмѣсто того, чтобы прилагать общія формулы, можно приступить, въ каждомъ частномъ случаѣ, къ непосредственному изысканію по методу, посредствомъ котораго мы вывели эти формулы. Но мы должны указать на два случая, въ которыхъ непосредственно придемъ къ нахожденію частнаго интеграла, необходимаго для уничтоженія второй части дифференціального уравненія.

1) Если вторая часть V есть цѣлая функція

$$V = A_0 x^i + A_1 x^{i-1} + \dots + A_{i-1} x + A_i,$$

то положимъ

$$y = a_0 x^i + a_1 x^{i-1} + \dots + a_{i-1} x + a_i,$$

подставляя же въ данное уравненіе, получимъ $i + 1$ уравненій, которыя будутъ служить къ опредѣленію коэффициентовъ a_0, a_1, \dots, a_i .

2) Если вторая часть V имѣетъ видъ

$$V = A \cos \mu x + B \sin \mu x \quad \text{или} \quad V = A e^{\mu x} \sqrt{-1} + B e^{-\mu x} \sqrt{-1},$$

ТО ПОЛОЖИМЪ

$$y = a \cos \mu x + b \sin \mu x \quad \text{или} \quad y = ae^{\mu x \sqrt{-1}} + be^{-\mu x \sqrt{-1}},$$

и мы будемъ имѣть два уравненія, откуда получимъ значенія a и b . Но нужно замѣтить, что эти уравненія могутъ дать для a и b безконечныя значенія, и въ этомъ случаѣ необходимо измѣнить видъ значенія y . Данное уравненіе есть $\Phi(y) = V$, поэтому для какого угодно μ имѣемъ

$$\Phi(ae^{\pm \mu x \sqrt{-1}}) = ae^{\pm \mu x \sqrt{-1}} f(\pm \mu \sqrt{-1}),$$

откуда, взявъ дифференціалъ относительно $\pm \mu \sqrt{-1}$, имѣемъ

$$\Phi(axe^{\pm \mu x \sqrt{-1}}) = ae^{\pm \mu x \sqrt{-1}} [f'(\pm \mu \sqrt{-1}) + x f(\pm \mu \sqrt{-1})]$$

.....

На основаніи этихъ формулъ, если $f(\pm \mu \sqrt{-1})$ не есть нуль, можно будетъ положить $y = ae^{\mu x \sqrt{-1}} + be^{-\mu x \sqrt{-1}}$, или, что приведетъ къ тому же,

$$y = a \cos \mu x + b \sin \mu x.$$

Если $f(\pm \mu \sqrt{-1})$ есть нуль, но если $f'(\pm \mu \sqrt{-1})$ не нуль, то можно будетъ положить

$$y = x(a \cos \mu x + b \sin \mu x),$$

и такимъ образомъ далѣе.

Разсмотримъ, на примѣръ, уравненіе

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cos x;$$

здѣсь имѣемъ

$$f(\pm \mu \sqrt{-1}) = -\mu^2 + 1, \quad f'(\pm \mu \sqrt{-1}) = 2\mu \sqrt{-1},$$

а такъ какъ μ должно равняться 1, то должны положить

$$y = x(a \cos x + b \sin x),$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = x(-a \sin x + b \cos x) + (a \cos x + b \sin x),$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -x(a \cos x + b \sin x) + 2(-a \sin x + b \cos x);$$

подставляя, имѣемъ

$$2(-a \sin x + b \cos x) = \cos x,$$

откуда

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{2};$$

поэтому имѣемъ частный интегралъ $y = \frac{x \sin x}{2}$, и общій интегралъ есть

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{x \sin x}{2}.$$

О случаѣ линейныхъ уравненій, приводимомъ къ такому, гдѣ коэффициенты постоянныя.

743. Линейныя уравненія, о которыхъ здѣсь идетъ рѣчь, имѣютъ слѣдующій видъ

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{A_1}{ax+b} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{A_i}{(ax+b)^i} \frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n} y = V,$$

гдѣ A_1, A_2, \dots, A_n, a и b суть постоянныя, вторая же часть V есть какая-нибудь функція отъ x .

Предъидущее уравненіе можетъ быть преобразовано въ другое, въ которомъ коэффициенты постоянныя; достаточно для этого положить

$$ax + b = e^t$$

и взять t за независимую переменную вмѣсто x . Дѣйствительно, будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{a}{ax+b} \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{a^2}{(ax+b)^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Подставивъ эти значенія и умноживъ потомъ уравненіе на $(ax+b)^n$, получимъ преобразованное линейное уравненіе, въ которомъ коэффициенты будутъ постоянныя.

Но для полученія интеграла даннаго уравненія не представляется необходимости производить преобразование, о ко-

торомъ мы только-что говорили. Если представимъ уравненіе, для краткости, такъ

$$(1) \quad \Phi(y) = V,$$

то достаточно будетъ узнать общій интеграль уравненія

$$(2) \quad \Phi(y) = 0,$$

и мы придемъ къ этому слѣдующимъ образомъ. Замѣнимъ, въ $\Phi(y)$, y черезъ $(ax + b)^r$ или черезъ $e^{r \log(ax+b)}$; мы будемъ имѣть результатъ вида

$$(3) \quad \Phi[(ax + b)^r] = (ax + b)^{r-n} f(r),$$

гдѣ $f(r)$ есть цѣлый полиномъ степени n . Потомъ, если возьмемъ дифференціалъ формулы (3) i разъ относительно r , то получимъ

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Phi[(ax + b)^r \log^i(ax + b)] = (ax + b)^{r-n} \\ &\times \left[f^{(i)}(r) + \frac{i}{1} \log(ax + b) f^{(i-1)}(r) + \dots + \log^i(ax + b) f(r) \right], \end{aligned} \right.$$

и изъ формулъ (3) и (4) слѣдуетъ, что корню r_1 характеристическаго уравненія

$$f(r) = 0,$$

имѣющему степень кратности равную μ , отвѣчаютъ μ частныхъ интеграловъ уравненія (2), именно:

$$\begin{aligned} &(ax + b)^{r_1}, \\ &(ax + b)^{r_1} \log(ax + b), \\ &\dots\dots\dots \\ &(ax + b)^{r_1} \log^{\mu-1}(ax + b). \end{aligned}$$

съ тѣмъ, чтобы, въ случаѣ r_1 мнимаго, $(ax + b)^{r_1}$ представляло выраженіе $e^{r_1 \log(ax+b)}$.

Мы узнаемъ этимъ способомъ n частныхъ интеграловъ уравненія (2) и получимъ изъ нихъ, какъ видѣли прежде, общій интеграль уравненія (1).

744. П р и м ѣ р ъ. — Предположимъ, что нужно интегрировать уравненіе второго порядка

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - (2n - 1) x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0,$$

входящее въ классъ тѣхъ, которыми мы только-что занимались. Положивъ $y = x^r$ и уничтоживъ множитель x^r , образуемъ характеристическое уравненіе

$$r(r-1) - (2n-1)r + n^2 = 0$$

или

$$(r-n)^2 = 0.$$

Оба корня равны n ; поэтому имѣемъ два частныхъ интеграла

$$x^n, x^n \log x,$$

и слѣдовательно, общій интеграль даннаго уравненія есть

$$y = x^n (C + C' \log x),$$

гдѣ C и C' означаютъ произвольныя постоянныя.

О системахъ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій.

745. Интегрированіе какой-нибудь системы совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій можетъ быть приведено посредствомъ исключенія (§ 627) къ интегрированію одного или нѣсколькихъ дифференціальныхъ уравненій, содержащихъ каждое только двѣ переменныя. Очевидно, что эти послѣднія уравненія будутъ линейными, если уравненія данной системы были въ свою очередь линейными; мы дадимъ здѣсь два примѣра этого способа.

Пусть будутъ въ первомъ случаѣ два совмѣстныхъ линейныхъ уравненія

$$\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0, \quad \frac{dz}{dx} - y + z = 0.$$

Изъ втораго имѣемъ

$$y = \frac{dz}{dx} + z,$$

откуда, черезъ дифференцированіе,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx};$$

подставивъ эти значенія въ первое уравненіе, получимъ

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + 4 \frac{dz}{dx} + 4z = 0.$$

Это уравненіе есть линейное съ постоянными коэффициентами; характеристическое уравненіе, соотвѣтствующее ему, есть

$$(r + 2)^2 = 0;$$

его общій интегралъ, означивъ черезъ C_1, C_2 двѣ постоянныя, поэтому есть

$$z = (C_1 + C_2 x) e^{-2x},$$

и мы потомъ имѣемъ

$$y = [(C_2 - C_1) - C_2 x] e^{-2x}.$$

746. Предположимъ, что нужно теперь интегрировать два совмѣстныхъ уравненія

$$2 \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} - 9y + 2x = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{d^2 x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + y - 6x = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Рѣшимъ эти уравненія относительно y и $\frac{dy}{dt}$; будемъ имѣть два слѣдующихъ:

$$11 y = 2 \frac{d^2 x}{dt^2} - 11 \frac{dx}{dt} + 14x + 2 \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}},$$

$$11 \frac{dy}{dt} = 9 \frac{d^2 x}{dt^2} - 44 \frac{dx}{dt} + 52x + 9 \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Взявъ дифференціалъ перваго изъ этихъ уравненій и вычтя потомъ изъ результата второе уравненіе, получимъ

$$\frac{d^3 x}{dt^3} - 10 \frac{d^2 x}{dt^2} + 29 \frac{dx}{dt} - 26x = \frac{9}{2} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Первая часть $f(r)$ характеристическаго уравненія здѣсь есть

$$f(r) = r^3 - 10r^2 + 29r - 26,$$

откуда :

$$f'(r) = 3r^2 - 20r + 29;$$

сверхъ того, какая бы ни была функція V , имѣемъ

$$\int e^{-rt} V dt = -\frac{1}{r} e^{-rt} V + \frac{1}{r} \int e^{-rt} \frac{dV}{dt} dt,$$

и нетрудно видѣть, что частный интегралъ уравненія въ x получится, если возьмемъ сумму значеній, принимаемыхъ выраженіемъ

$$\frac{9 - 2r}{2r(r^2 - 8r + 13)} e^{rt} \int_0^t \frac{e^{-rt} dt}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{9}{2(r^2 - 8r + 13)} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

когда подставляемъ вмѣсто r три корня 2 , $4 + \sqrt{3}$, $4 - \sqrt{3}$ характеристическаго уравненія. Потомъ будемъ имѣть общій интегралъ, прибавивъ сумму

$$C_1 e^{2t} + C_2 e^{(4+\sqrt{3})t} + C_3 e^{(4-\sqrt{3})t},$$

гдѣ C_1 , C_2 , C_3 означаютъ произвольныя постоянныя. Такъ какъ значеніе x извѣстно, то мы будемъ имѣть значеніе y изъ одного изъ уравненій, написанныхъ выше.

747. Всѣ дифференціальныя уравненія, не имѣющія вида линейнаго, могутъ быть приведены къ нему черезъ введеніе новыхъ переменныхъ. Мы дадимъ сейчасъ примѣръ. Разсмотримъ три дифференціальныя уравненія, содержащихся въ формулѣ

$$(1) \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{x}.$$

Если введемъ новую переменную t , которой дифференціалъ равенъ каждому изъ отношеній предыдущей формулы, то будемъ имѣть четыре дифференціальныя уравненія

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = u, \quad \frac{du}{dt} = x,$$

откуда, взявъ dt за постоянный дифференціалъ, имѣемъ

$$(3) \quad y = \frac{dx}{dt}, \quad z = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad u = \frac{d^3x}{dt^3},$$

далѣе

$$(4) \quad \frac{d^4 x}{dt^4} - x = 0.$$

Характеристическое уравненіе, отвѣчающее уравненію (4), есть

$$r^4 - 1 = 0,$$

и мы имѣемъ

$$r = \pm 1, \quad r = \pm \sqrt{-1}.$$

Корни $\pm \sqrt{-1}$ вводятъ въ общій интеграль уравненія (4) часть $C \cos(t - t_0)$, гдѣ C и t_0 двѣ произвольныя; что же касается части, вводимой корнями ± 1 , то ее можно означить черезъ $Ae^{t-t_0} + Be^{-(t-t_0)}$, гдѣ A и B новыя произвольныя. Но переменная t зависитъ только отъ своего дифференціала, и мы можемъ написать t вмѣсто $t - t_0$; поэтому, замѣчая, что y, z, u опредѣляются уравненіями (3), будемъ имѣть

$$\begin{aligned} x &= Ae^t + Be^{-t} + C \cos t, \\ y &= Ae^t - Be^{-t} - C \sin t, \\ z &= Ae^t + Be^{-t} - C \cos t, \\ u &= Ae^t - Be^{-t} + C \sin t. \end{aligned}$$

Если положимъ

$$4C^2 = \alpha, \quad 16AB = \epsilon, \quad \log 4A = \gamma,$$

то изъ предъидущихъ уравненій получимъ

$$\begin{aligned} \alpha &= (x - z)^2 + (y - u)^2, \\ \epsilon &= (x + z)^2 - (y + u)^2, \\ \gamma &= \log(x + y + z + u) + \arctan \frac{y - u}{x - z}. \end{aligned}$$

эти уравненія, гдѣ α, ϵ, γ означаютъ три произвольныя постоянныя, представляютъ три интеграла данной системы.

Способъ д'Аламбера для приведенія системъ линейныхъ уравненій перваго порядка къ уравненіямъ съ двумя переменными.

748. Д'Аламберъ далъ замѣчательный способъ приведенія какой-нибудь системы совмѣстныхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій къ уравненіямъ перваго порядка съ

двумя переменными. Мы предположимъ здѣсь, что уравненія данной системы были приведены къ первому порядку черезъ введеніе, если необходимо, новыхъ переменныхъ, какъ это мы изложили въ § 615.

Случай двухъ уравненій. — Пусть будутъ линейныя уравненія

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + Py + Qz = V, \\ \frac{dz}{dx} + P'y + Q'z = V', \end{cases}$$

въ которыхъ P, Q, V, P', Q', V' суть данныя функціи независимой переменной x . Сложивъ эти уравненія послѣ умноженія втораго на неопредѣленный множитель λ , получимъ

$$(2) \quad \left(\frac{dy}{dx} + \lambda \frac{dz}{dx} \right) + (P + \lambda P')y + (Q + \lambda Q')z = V + \lambda V'.$$

Означимъ черезъ t новую переменную и положимъ

$$(3) \quad y + \lambda z = t,$$

откуда

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} + \lambda \frac{dz}{dx} + z \frac{d\lambda}{dx} = \frac{dt}{dx}.$$

Если замѣнимъ, въ уравненіи (2), y и $\frac{dy}{dx}$ ихъ значеніями, полученными изъ формулъ (3) и (4), то будемъ имѣть

$$\frac{dt}{dx} + (P + \lambda P')t - z \left[\frac{d\lambda}{dx} + (P + \lambda P')\lambda - (Q + \lambda Q') \right] = V + \lambda V'.$$

Можно выбрать неопредѣленный множитель λ такъ, чтобы z исчезло изъ этого уравненія, т. е. такъ, чтобы мы имѣли

$$(5) \quad \frac{d\lambda}{dx} + P'\lambda^2 + (P - Q')\lambda - Q = 0,$$

и уравненіе въ t тогда станетъ

$$(6) \quad \frac{dt}{dx} + (P + \lambda P')t = V + \lambda V'.$$

Уравненіе (6) есть линейное, и мы черезъ интегрированіе имѣемъ

$$(7) \quad t = e^{-\int_{x_0}^x (P + \lambda P') dx} \left[C + \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^x (P + \lambda P') dx} (V + \lambda V') dx \right],$$

или, для краткости,

$$(8) \quad t = F(x, \lambda, C),$$

гдѣ C произвольная постоянная.

Уравненіе (5), отъ котораго зависитъ λ , не линейное, но нѣтъ необходимости находить его общій интеграль; достаточно двухъ частныхъ значеній λ_1, λ_2 . Дѣйствительно, значенія t , отвѣчающія этимъ значеніямъ λ , суть $y + \lambda_1 z, y + \lambda_2 z$; уравненіе (8), написавъ въ немъ вмѣсто C послѣдовательно C_1, C_2 , поэтому дастъ

$$(9) \quad \begin{cases} y + \lambda_1 z = F(x, \lambda_1, C_1), \\ y + \lambda_2 z = F(x, \lambda_2, C_2). \end{cases}$$

Каждое изъ этихъ уравненій (9) есть интеграль данной системы.

749. Способъ д'Аламбера даетъ возможность узнать интегралы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, когда коэффициенты постоянныя.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ P, Q, P', Q' постоянными. Если корни уравненія

$$(10) \quad P' \lambda^2 + (P - Q') \lambda - Q = 0$$

неравны и если означимъ ихъ черезъ λ_1, λ_2 , то будемъ имѣть два искомыхъ рѣшенія уравненія (5), положивъ, послѣдовательно,

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_2;$$

здѣсь имѣемъ

$$t = e^{-(P + \lambda P')x} \left[C + \int_{x_0}^x e^{(P + \lambda P')x} (V + \lambda V') dx \right],$$

и уравненія (9) сдѣлаются такими:

$$(11) \quad \begin{cases} y + \lambda_1 z = e^{-(P+\lambda_1 P')x} \left[C_1 + \int_{x_0}^x e^{(P+\lambda_1 P')x} (V + \lambda_1 V') dx \right], \\ y + \lambda_2 z = e^{-(P+\lambda_2 P')x} \left[C_2 + \int_{x_0}^x e^{(P+\lambda_2 P')x} (V + \lambda_2 V') dx \right]. \end{cases}$$

Когда Q есть нуль, то одинъ изъ корней λ_1, λ_2 есть нуль; въ этомъ случаѣ одно изъ уравненій (11) есть интеграль перваго изъ данныхъ уравненій, которое не содержитъ z . Когда $P' = 0$, тогда одинъ изъ корней уравненія (10) есть безконечность; это аналогично случаю $Q = 0$; второе изъ данныхъ уравненій не содержитъ y и оно опредѣляетъ z въ функціи x ; y дается потомъ черезъ интегрированіе перваго уравненія.

Если оба корня уравненія (10) равны между собой, то пусть λ_1 ихъ значеніе; уравненіе (5) будетъ имѣть видъ

$$\frac{d\lambda}{dx} + P' (\lambda_1 - \lambda)^2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_1)^2} + P' dx = 0,$$

и мы черезъ интегрированіе имѣемъ

$$-\frac{1}{\lambda - \lambda_1} + P' x = G, \quad \text{откуда} \quad \lambda - \lambda_1 = \frac{1}{P' x - G},$$

гдѣ G есть произвольная постоянная. Достаточно будетъ дать G два частныхъ значенія, чтобы получить два необходимыя для насъ значенія λ ; сдѣлавъ $G = \infty$, далѣе $G = 0$, получимъ

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_1 + \frac{1}{P' x},$$

и соотвѣтствующія значенія $e^{-\int_{x_0}^x (P+\lambda P') dx}$ суть

$$e^{-(P+\lambda_1 P')x}, \quad \frac{1}{x} e^{-(P+\lambda_1 P')x}.$$

750. Нужно замѣтить, что формулы, относящіяся къ частному случаю $\lambda_2 = \lambda_1$, могутъ быть легко получены изъ формулъ (11), относящихся къ общему случаю. Дѣйствительно, равенство корней λ перестанетъ имѣть мѣсто, если соотвѣтственно измѣнимъ коэффиціенты; достаточно будетъ умно-

жить это уравнение на $\frac{-\lambda_1 - h}{\lambda - \lambda_1}$; ничто не мешает допустить, что P и P' не изменяются и что изменяются только коэффициенты Q и Q' , не входящие въ наши формулы. Если это такъ, то интегралы (11) могутъ быть представлены въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} y + \lambda_1 z &= F(x, \lambda_1, C_1), \\ y + (\lambda_1 + h) z &= F(x, \lambda_1 + h, C_1 + h C_2), \end{aligned}$$

гдѣ вмѣсто C_2 написано $C_1 + h C_2$. Второе уравнение можетъ быть замѣнено черезъ

$$z = \frac{F(x, \lambda_1 + h, C_1 + h C_2) - F(x, \lambda_1, C_1)}{h},$$

и въ предѣлѣ, для $h = 0$, оно приводится къ

$$z = \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} + C_2 \frac{\partial F}{\partial C_1}.$$

751. Примѣръ. — Требуется интегрировать два совместныхъ уравненія, уже разсмотрѣнныхъ въ § 745:

$$\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0, \quad \frac{dz}{dx} - y + z = 0.$$

Прилагая способъ д'Аламбера, имѣемъ

$$\frac{dt}{dx} + (3 - \lambda) t = 0$$

и

$$\frac{d\lambda}{dx} - (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Отсюда имѣемъ

$$\frac{d\lambda}{(\lambda - 1)^2} - dx = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{\lambda - 1} + x = G, \quad \text{или} \quad \lambda = 1 + \frac{1}{G - x}.$$

Поэтому здѣсь можно сдѣлать

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 - \frac{1}{x}.$$

Пусть будутъ t_1, t_2 значенія t , отвѣчающія значеніямъ λ ,
будемъ имѣть

$$\frac{dt_1}{dx} + 2t_1 = 0, \quad \frac{dt_2}{dx} + \left(2 + \frac{1}{x}\right)t_2 = 0,$$

откуда

$$y + z = C_1 e^{-2x}, \quad y + z - \frac{z}{x} = C_2 \frac{e^{-2x}}{x}.$$

752. СЛУЧАЙ КАКОГО-НИБУДЬ ЧИСЛА УРАВНЕНІЙ. — Способъ д'Аламбера прилагается къ какой-нибудь системѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Пусть будут n линейныхъ уравненій перваго порядка

[illegible]

въ которыхъ коэффициенты $P_i^{(j)}$ и вторыя части V_j суть данныя функціи независимой переменнѣй x . Сложимъ эти уравненія послѣ умноженія ихъ соотвѣтственно на неопредѣленные множители

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, 1;$$

сдѣлаемъ потомъ

$$(2) \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + x_n = t,$$

далѣе

[illegible]

И

$$(4) \quad \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_{n-1} V_{n-1} + V = Q,$$

будемъ имѣть

[illegible]

[illegible]

относительно произвольной a_μ ; будемъ имѣть

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial a_\mu} + \frac{\partial F_i}{\partial x'_1} \frac{\partial x'_1}{\partial a_\mu} \right) + \dots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial a_\mu} + \frac{\partial F_i}{\partial x'_n} \frac{\partial x'_n}{\partial a_\mu} \right) = 0,$$

тождественное уравненіе послѣ внесенія значеній (2). Но

$\frac{\partial x'_k}{\partial a_\mu}$ равно $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x_k}{\partial a_\mu}$; если же означимъ черезъ

$$U_i^{(k)}, V_i^{(k)}$$

значенія, принимаемыя $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}, \frac{\partial F_i}{\partial x'_k}$ послѣ внесенія значеній (2), то мы будемъ имѣть тождество

$$(3) \quad \left(U_i^{(1)} \frac{\partial X_1}{\partial a_\mu} + V_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial X_1}{\partial a_\mu} \right) + \dots + \left(U_i^{(n)} \frac{\partial X_n}{\partial a_\mu} + V_i^{(n)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial X_n}{\partial a_\mu} \right) = 0.$$

Теперь рассмотримъ n совмѣстныхъ линейныхъ уравненій

$$(4) \quad \begin{cases} \left(U_1^{(1)} z_1 + V_1^{(1)} \frac{dz_1}{dx} \right) + \dots + \left(U_1^{(n)} z_n + V_1^{(n)} \frac{dz_n}{dx} \right) = 0, \\ \left(U_2^{(1)} z_1 + V_2^{(1)} \frac{dz_1}{dx} \right) + \dots + \left(U_2^{(n)} z_n + V_2^{(n)} \frac{dz_n}{dx} \right) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \left(U_n^{(1)} z_1 + V_n^{(1)} \frac{dz_1}{dx} \right) + \dots + \left(U_n^{(n)} z_n + V_n^{(n)} \frac{dz_n}{dx} \right) = 0, \end{cases}$$

въ которыхъ z_1, z_2, \dots, z_n означаютъ неизвѣстныя функціи и въ которыхъ U, V есть данныя функціи отъ x и n постоянныхъ a_1, a_2, \dots, a_n . По причинѣ тождества (3), имѣющаго мѣсто для какого угодно i , уравненія (4) удовлетворяются, когда полагаемъ

$$z_1 = \frac{\partial X_1}{\partial a_\mu}, z_2 = \frac{\partial X_2}{\partial a_\mu}, \dots z_n = \frac{\partial X_n}{\partial a_\mu},$$

поэтому общіе интегралы системы (4) будутъ

$$(5) \quad \begin{cases} z_1 = C_1 \frac{\partial X_1}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial X_1}{\partial a_2} + \dots + C_n \frac{\partial X_1}{\partial a_n}, \\ z_2 = C_1 \frac{\partial X_2}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial X_2}{\partial a_2} + \dots + C_n \frac{\partial X_2}{\partial a_n}, \\ \dots \dots \dots \\ z_n = C_1 \frac{\partial X_n}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial X_n}{\partial a_2} + \dots + C_n \frac{\partial X_n}{\partial a_n}. \end{cases}$$

гдѣ C_1, C_2, \dots, C_n означаютъ n произвольныхъ постоянныхъ.

Такимъ образомъ всякая система совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій, которыхъ интегралы извѣстны, приводится къ системѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ переменными коэффициентами, которыхъ интегралы получаются черезъ простыя дифференцированія.

ГЛАВА X.

ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ ПОМОЩЬЮ РЯДОВЪ ИЛИ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

Употребленіе формуль Тейлора и Маклорена.

757. Такъ какъ математическій анализъ не обладаетъ никакимъ общимъ способомъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій, то въ приложеніяхъ мы должны прибѣгать къ способамъ приближенія, основаннымъ на употребленіи рядовъ. Но эти способы затруднительны въ случаѣ уравненій не только не можемъ линейныхъ, если ограничиться очень небольшимъ числомъ членовъ. Мы думаемъ дать въ этой главѣ основную мысль употребляемыхъ дѣйствій для произведенія интегрированія посредствомъ рядовъ.

Первый способъ состоитъ въ употребленіи формуль Тейлора и Маклорена. Мы уже употребляли формулу Тейлора для доказательства существованія интегральныхъ уравненій; вмѣсто нея можно брать формулу Маклорена, которая часто приводитъ къ болѣе простымъ результатамъ, но которая не всегда даетъ возможность узнать искомый общій интеграль. Это мы сейчасъ и покажемъ въ слѣдующемъ примѣрѣ.

758. Разсмотримъ уравненіе втораго порядка

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2n}{x} \frac{dy}{dx} - m^2 y = 0,$$

встрѣчающееся въ различныхъ вопросахъ математической физики и въ которомъ n и m^2 означаютъ два данныхъ дѣйствительныхъ, положительныхъ или отрицательныхъ, числа.

Умножимъ уравненіе (1) на x и возьмемъ потомъ $\mu - 1$ разъ дифференціалъ; будемъ имѣть

$$(2) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2n \frac{dy}{dx} - m^2 xy = 0,$$

$$(3) \quad \begin{cases} \left[x \frac{d^{\mu+1} y}{dx^{\mu+1}} + (\mu - 1) \frac{d^{\mu} y}{dx^{\mu}} \right] + 2n \frac{d^{\mu} y}{dx^{\mu}} \\ - m^2 \left[x \frac{d^{\mu-1} y}{dx^{\mu-1}} + (\mu - 1) \frac{d^{\mu-2} y}{dx^{\mu-2}} \right] = 0. \end{cases}$$

Для $x=0$ уравненія (2) и (3) даютъ

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad (2n + \mu - 1) \frac{d^{\mu} y}{dx^{\mu}} = (\mu - 1) m^2 \frac{d^{\mu-2} y}{dx^{\mu-2}},$$

въ случаѣ $\mu=2$ это послѣднее уравненіе есть

$$(5) \quad (2n + 1) \frac{d^2 y}{dx^2} = m^2 y.$$

Мы видимъ, что если $2n$ не есть цѣлое отрицательное число, то производныя отъ y нечетныхъ порядковъ суть нули, и что производныя четныхъ порядковъ даются формулой

$$\frac{d^{2i} y}{dx^{2i}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i - 1)}{(2n + 1)(2n + 3) \dots (2n + 2i - 1)} m^{2i} y.$$

Если же означимъ черезъ C значеніе y , отвѣчающее $x=0$, то формула Маклорена дастъ слѣдующій частный интегралъ уравненія (1)

$$(6) \quad \begin{cases} y = C \left[1 + \frac{m^2 x^2}{2 \cdot (2n + 1)} + \frac{m^4 x^4}{2 \cdot 4 (2n + 1)(2n + 3)} \right. \\ \left. + \frac{m^6 x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 (2n + 1)(2n + 3)(2n + 5)} + \dots \right]. \end{cases}$$

Формула (6) дѣлается неопредѣленной, когда $2n$ равно цѣлому нечетному числу; но, оставивъ этотъ случай въ сторонѣ, рядъ, входящій во вторую часть, есть сходящійся для какого-угодно x , потому что отношеніе члена мѣста $i+1$ къ члену мѣста i , именно

$$\frac{m^2 x^2}{2i(2n + 2i - 1)},$$

стремится къ нулю, когда i возрастаетъ безпредѣльно.

759. Разберемъ тотъ случай, когда $2n$ равно цѣлому отрицательному числу. Если это число нечетное, то мы видимъ изъ второй формулы (4), что производныя отъ y нечетныхъ порядковъ для $x=0$ суть нули, какъ и въ общемъ случаѣ. Та же формула показываетъ, что, для $\mu = 1 - 2n$, имѣемъ $\frac{d^{\mu-2}y}{dx^{\mu-2}} = 0$, и слѣдовательно

$$y = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}} = 0;$$

производная $\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}}$ произвольная, но всѣ производныя слѣдующихъ четныхъ порядковъ опредѣляются въ одно время съ ней. Поэтому, если означимъ черезъ C_1 произвольное значеніе

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (1 - 2n)} \frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}}$$

для $x=0$, то формула Маклорена дастъ

$$(7) \quad \left\{ y = C_1 x^{1-2n} \left[1 + \frac{m^2 x^2}{2 \cdot (3 - 2n)} + \frac{m^4 x^4}{2 \cdot 4 \cdot (3 - 2n) (5 - 2n)} + \frac{m^6 x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (3 - 2n) (5 - 2n) (7 - 2n)} + \dots \right] \right\}.$$

Если $2n$ есть цѣлое отрицательное четное число, то производныя отъ y нечетныхъ порядковъ уничтожаются для $x=0$, по формуламъ (4) до производныхъ которыхъ порядокъ есть $-1 - 2n$. Значеніе производной $\frac{d^{1-2n}y}{dx^{1-2n}}$ можетъ быть выбрано произвольно, какъ и въ предъидущемъ случаѣ, и производныя нечетныхъ порядковъ тогда будутъ опредѣленными. Сверхъ того, значеніе y , отвѣчающее $x=0$, въ настоящемъ случаѣ есть произвольное и оно опредѣляетъ значенія производныхъ четныхъ порядковъ. Поэтому формула Маклорена даетъ здѣсь рѣшеніе, содержащее двѣ произвольныя постоянныя, и которое, очевидно, получимъ, если возьмемъ сумму

рядовъ, содержащихся въ формулахъ (6) и (7). Это рѣшеніе есть общій интегралъ; мы его получили-бы во всѣхъ случаяхъ по формулѣ Тейлора, которой коэффициенты могутъ быть вычислены посредствомъ формулъ (2) и (3), но результатъ сложенъ и нѣтъ никакого интереса производить вычисленіе.

Измѣненіе переменныхъ, соединенное съ употребленіемъ формулы Маклорена.

760. Въ предъидущемъ параграфѣ мы получили частный интегралъ уравненія

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2n}{x} \frac{dy}{dx} - m^2 y = 0.$$

Чтобы получить его общій интегралъ, нужно было бы узнать второй частный интегралъ, а такъ какъ этотъ интегралъ не разложимъ, вообще, по формулѣ Маклорена, то было бы естественно изслѣдовать, не позволяетъ ли измѣненіе переменныхъ употребить эту формулу. Для этого мы положимъ

$$y = x^\mu z,$$

гдѣ μ есть неопредѣленный показатель, и z новая переменная. Дифференцированіе даетъ

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^\mu \frac{dz}{dx} + \mu x^{\mu-1} z, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= x^\mu \frac{d^2 z}{dx^2} + 2\mu x^{\mu-1} \frac{dz}{dx} + \mu(\mu-1) x^{\mu-2} z. \end{aligned}$$

Внеся эти значенія въ уравненіе (1) и раздѣливъ потомъ его на x^μ , получимъ

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2n + 2\mu}{x} \frac{dz}{dx} + \left[\frac{\mu(2n + \mu - 1)}{x^2} - m^2 \right] z = 0.$$

Это уравненіе будетъ имѣть такой же видъ, какъ и данное, если сдѣлаемъ

$$\mu = 1 - 2n;$$

дѣйствительно, преобразованное уравненіе будетъ

$$(2) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2(1-n)}{x} \frac{dz}{dx} - m^2 z = 0,$$

и оно получится изъ уравненія (1), если измѣнимъ n въ $1-n$ и напомнимъ z вмѣсто y ; такимъ образомъ, случай отрицательнаго n приводится къ положительному n . Послѣ этого очевидно, что мы получимъ новый частный интегралъ уравненія (1), если измѣнимъ въ томъ, который былъ полученъ въ предыдущемъ параграфѣ, n въ $1-n$ и умножимъ потомъ его на x^{1-2n} .

Изъ двухъ частныхъ интеграловъ мы образуемъ общій интегралъ даннаго уравненія, уже полученный въ томъ случаѣ, когда $2n$ есть отрицательное цѣлое четное число, именно:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} y = C & \left[1 + \frac{m^2 x^2}{2(2n+1)} + \frac{m^4 x^4}{2 \cdot 4 (2n+1)(2n+3)} + \dots \right] \\ & + C' x^{1-2n} \left[1 + \frac{m^2 x^2}{2(3-2n)} + \frac{m^4 x^4}{2 \cdot 4 (3-2n)(5-2n)} + \dots \right], \end{aligned} \right.$$

гдѣ C и C' двѣ произвольныя постоянныя. Однако, нужно исключить случай, когда $2n$ есть цѣлое нечетное положительное или отрицательное число. Если имѣемъ $2n = 1$, то оба частные интеграла сдѣлаются равными между собой, а если $2n$ есть цѣлое нечетное число, иное чѣмъ $+1$, то одинъ изъ двухъ интеграловъ дѣлается неопредѣленнымъ. Дальше мы снова вернемся къ этому исключительному случаю.

761. Нужно замѣтить случай $n = 1$; мы легко опредѣлимъ суммы обоихъ рядовъ, выражающихъ частные интегралы. Въ нашемъ случаѣ формула (3), написавъ Cm вмѣсто C , будетъ

$$y = \frac{C}{x} \left(\frac{mx}{1} + \frac{m^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m^5 x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \right) + \frac{C'}{x} \left(1 + \frac{m^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right)$$

или

$$y = \frac{C}{x} \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} + \frac{C'}{x} \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2};$$

означивъ черезъ A и B двѣ произвольныя постоянныя, можно будетъ также написать

$$y = \frac{Ae^{mx} + Be^{-mx}}{x}.$$

Преобразование, произведенное нами въ предыдущемъ параграфѣ, приводитъ непосредственно къ этому результату. Дѣйствительно, въ случаѣ $n = 1$, уравненіе (2) приводится къ такому

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - m^2 z = 0,$$

и его общій интегралъ есть

$$z = Ae^{mx} + Be^{-mx};$$

и мы непосредственно находимъ значеніе y , которое мы только-что получили.

Если m^2 отрицательное и если сдѣлаемъ $m^2 = -\mu^2$, то интегралъ даннаго уравненія долженъ быть написанъ такъ

$$y = \frac{C \sin \mu x + C' \cos \mu x}{x}.$$

Употребленіе способа неопредѣленныхъ коэффициентовъ.

762. Вмѣсто того, чтобы употреблять формулу Маклорена, можно съ выгодой употребить способъ неопредѣленныхъ коэффициентовъ, допускающій бѣольшую общность.

Возьмемъ снова уравненіе

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2n}{x} \frac{dy}{dx} - m^2 y = 0,$$

нами уже разсмотрѣнное, и попробуемъ удовлетворить ему, положивъ

$$(2) \quad y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \dots,$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ означаютъ возрастающіе показатели. Изъ формулы (2) находимъ

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + C\gamma x^{\gamma-1} + \dots, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} = A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + \dots \end{cases}$$

Внеся эти значенія въ уравненіе (1), получимъ

$$A [\alpha (\alpha + 2n - 1) x^{\alpha-2} - m^2 x^\alpha] \\ + B [\beta (\beta + 2n - 1) x^{\beta-2} - m^2 x^\beta] + \dots = 0,$$

это же должно приводиться къ тождеству. Самый малый показатель x въ этой формулѣ есть $\alpha - 2$, и для того, чтобы членъ этой степени уничтожился, нужно, чтобы мы имѣли

$$\alpha = 0 \text{ или } \alpha = 1 - 2n.$$

Между оставшимися членами, имѣющими наименьшія степени, суть тѣ, которые содержатъ множители x^α , $x^{\beta-2}$. Мы не можемъ имѣть $\beta - 2 > \alpha$, потому что мы должны бы были тогда имѣть $A = 0$, чего быть не можетъ. Поэтому имѣемъ

$$\beta - 2 = \alpha \text{ или } \beta - 2 < \alpha.$$

Если допустимъ второе предположеніе, то мы должны будемъ имѣть

$$\beta (\beta + 2n - 1) = 0,$$

т. е.

$$\beta = 0 \text{ или } \beta = 1 - 2n.$$

Это же возможно только тогда, когда беремъ для α наименьшее изъ значеній 0, $1 - 2n$; тогда можно будетъ взять для β наибольшее изъ тѣхъ же двухъ значеній. Но если выберемъ для α наибольшее изъ значеній 0, $1 - 2n$, то нужно будетъ сдѣлать $\beta = \alpha + 2$.

Предположимъ, что α и β получили значенія 0 и $1 - 2n$; такъ какъ γ не можетъ имѣть одного изъ этихъ значеній, то нужно будетъ, чтобы мы имѣли $\gamma = \alpha + 2$, далѣе $\delta = \beta + 2$ и т. д. Если эти показатели извѣстны, то мы непосредственно опредѣлимъ коэффициенты.

Но проще послѣдовательно употребить значенія $\alpha = 0$, $\alpha = 1 - 2n$ и предположить

$$\beta = \alpha + 2, \quad \gamma = \beta + 2, \quad \delta = \gamma + 2, \quad \dots$$

Такимъ образомъ сначала сдѣлаемъ

$$\alpha = 0, \quad \epsilon = 2, \quad \gamma = 4, \quad \delta = 6, \quad \dots,$$

и написавъ, что члены съ одинаковыми степенями въ x уничтожаются, найдемъ

$$B = \frac{m^2 A}{2(2n+1)}, \quad C = \frac{m^2 B}{4(2n+3)}, \quad D = \frac{m^2 C}{6(2n+5)}, \quad \dots$$

Сдѣлавъ потомъ

$$\alpha = 1 - 2n, \quad \epsilon = 3 - 2n, \quad \gamma = 5 - 2n, \quad \dots,$$

и поступивъ такимъ же образомъ, найдемъ

$$B = \frac{m^2 A}{2(3-2n)}, \quad C = \frac{m^2 B}{4(5-2n)}, \quad D = \frac{m^2 C}{6(7-2n)}, \quad \dots$$

Поэтому, предполагая въ томъ и другомъ случаѣ $A = 1$, имѣемъ такіе два частные интеграла

$$y_1 = 1 + \frac{m^2 x^2}{2(2n+1)} + \frac{m^4 x^4}{2 \cdot 4(2n+1)(2n+3)} + \dots,$$

$$y_2 = x^{1-2n} \left[1 + \frac{m^2 x^2}{2(3-2n)} + \frac{m^4 x^4}{2 \cdot 4(3-2n)(5-2n)} + \dots \right],$$

откуда находимъ общій интегралъ, уже полученный въ § 760,

$$y = C y_1 + C' y_2,$$

исключивъ, однако, тотъ случай, когда $2n$ есть цѣлое нечетное положительное или отрицательное число.

763. Намъ нужно здѣсь еще разобрать частный случай, когда $2n$ есть цѣлое нечетное число. Такъ какъ предположеніе n отрицательнымъ приводится къ предположенію n положительнаго, какъ мы это видѣли выше, то мы предположимъ

$$2n = 2\nu + 1,$$

гдѣ ν есть или нуль или положительное число. Данное уравненіе въ этомъ случаѣ сдѣлается

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2\nu + 1}{x} \frac{dy}{dx} - m^2 y = 0,$$

и мы знаемъ только одинъ частный интегралъ, именно

$$y_1 = 1 + \frac{m^2 x^2}{2(2\nu + 2)} + \frac{m^4 x^4}{2 \cdot 4(2\nu + 2)(2\nu + 4)} + \dots$$

Если употребимъ это значеніе y_1 , то общій интегралъ даннаго уравненія будетъ выражаться (§ 733) черезъ

$$y = Cy_1 + C' y_1 \int_{x_0}^x \frac{dx}{y_1^2 x^{2\nu+1}},$$

гдѣ C, C' суть двѣ произвольныя и x_0 какое-нибудь начальное значеніе x . Разсматривая функцію $\frac{1}{y_1^2 x^{2\nu+1}}$ какъ раціональную дробь, мы дадимъ ей видъ

$$\frac{a_0}{x^{2\nu+1}} + \frac{a_1}{x^{2\nu-1}} + \dots + \frac{a_{\nu-1}}{x} + \frac{Y}{y_1^2},$$

гдѣ Y есть функція, остающаяся конечной для $x = 0$. Слѣдовательно, будемъ имѣть

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{y_1^2 x^{2\nu+1}} = \frac{P}{x^{2\nu}} G \log x + V,$$

гдѣ P означаетъ полиномъ степени 2ν , G постоянную и V функцію, остающуюся конечной для $x = 0$. Отсюда слѣдуетъ, что данное уравненіе имѣетъ необходимо интегралъ вида

$$y = y_1 \left(\frac{P}{x^{2\nu}} + G \log x \right) + z,$$

гдѣ z есть функція, остающаяся конечной для $x = 0$. Поэтому естественно употребить подстановленіе, выражаемое предъидущей формулой, и приложить формулу Маклорена или формулу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ къ преобразованному уравненію въ z ; это послѣднее будетъ отличаться отъ даннаго только второй частью, введенной черезъ подстановленіе.

764. Мы здѣсь ограничимся изложеніемъ вычисленія самаго простаго случая, именно $\nu = 0$. Данное уравненіе въ этомъ случаѣ есть

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - m^2 y = 0,$$

и известный частный интегралъ есть

$$y_1 = 1 + \frac{m^2 x^2}{2^2} + \frac{m^4 x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{m^6 x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

или

$$y_1 = 1 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{m^{2i} x^{2i}}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2i)^2}.$$

Полиномъ, означенный черезъ P , приводится здѣсь къ постоянной, а произведение $P y_1$ можетъ быть включено въ z ; сверхъ того очевидно, что мы можемъ сдѣлать $G = 1$ и мы слѣдовательно, должны положить

$$y = y_1 \log x + z,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy_1}{dx} \log x + \frac{y_1}{x} + \frac{dz}{dx}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2 y_1}{dx^2} \log x + \frac{2}{x} \frac{dy_1}{dx} - \frac{y_1}{x^2} + \frac{d^2 z}{dx^2}, \end{aligned}$$

и внеся эти значенія въ данное уравненіе, получимъ преобразованное уравненіе

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} - m^2 z = -\frac{2}{x} \frac{dy_1}{dx}.$$

Положимъ

$$z = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots + a_i x^{2i} + \dots$$

и означимъ, для краткости, черезъ

$$A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \dots + A_i x^{2i} + \dots$$

значеніе y_i , подставимъ значенія z и y_1 въ дифференціальное уравненіе и сравнимъ въ обѣхъ частяхъ коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ x ; будемъ имѣть

$$4i^2 a_i - m^2 a_{i-1} = -4i A_i$$

или

$$\frac{a_i}{A_i} - \frac{a_{i-1}}{A_{i-1}} = -\frac{1}{i},$$

и слѣдовательно

$$\frac{a_i}{A_i} - \frac{a_0}{A_0} = - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{i} \right);$$

ничто не мѣшаетъ предположить $a_0 = 0$, тогда будемъ имѣть

$$a_i = - \frac{m^{2i}}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2i)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{i} \right).$$

Поэтому имѣемъ такой второй интегралъ даннаго уравненія

$$y_2 = y_1 \log x - \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{m^{2i} x^{2i}}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2i)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{i} \right).$$

765. Мы уже имѣли случай замѣтить, что бываетъ выгодно передъ разложеніемъ въ рядъ произвести измѣненіе переменныхъ. Мы дадимъ сейчасъ новый примѣръ, сохранивъ то же самое уравненіе

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2n}{x} \frac{dy}{dx} - m^2 y = 0.$$

Положимъ $\mu = \pm m$ и произведемъ подстановленіе

$$y = z e^{\mu x}, \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dz}{dx} + \mu z \right) e^{\mu x},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\mu \frac{dz}{dx} + \mu^2 z \right) e^{\mu x};$$

мы получимъ, по причинѣ $\mu^2 = m^2$, слѣдующее преобразованное уравненіе въ z :

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\mu \frac{dz}{dx} \right) + \frac{2n}{x} \left(\frac{dz}{dx} + \mu z \right) = 0.$$

Попытаемся теперь удовлетворить уравненію, положивъ

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i + \dots;$$

подставивъ это значеніе z и приравнявъ потомъ нулю коэффициентъ какой-нибудь степени x^{i-2} переменной x , получимъ

$$i(2n + i - 1) a_i + 2\mu(n + i - 1) a_{i-1} = 0.$$

Если $2n$ не есть цѣлое отрицательное число, то предыдущее уравненіе опредѣлитъ отношеніе коэффиціентовъ a_i, a_{i-1} и мы найдемъ значеніе a_i , именно

$$a_i = (-2\mu)^i \frac{n(n+1) \dots (n+i-1)}{1 \cdot 2 \dots i \times (2n)(2n+1) \dots (2n+i-1)} a_0;$$

первый коэффиціентъ остается произвольнымъ,

Предположимъ, что n есть цѣлое отрицательное число $-k$. Соотношеніе, полученное между a_i и a_{i-1} , показываетъ, что a_{k+1} есть нуль; это же относится и къ $a_{k+2}, a_{k+3}, \dots, a_{2k}$. Коэффиціентъ a_{2k+1} произвольный и слѣдующіе за нимъ коэффиціенты опредѣляются въ функціи a_{2k+1} . Поэтому въ томъ случаѣ, о которомъ идетъ рѣчь, мы получимъ два слѣдующихъ интеграла уравненія въ z ,

$$\begin{aligned} z &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k, \\ z &= a_{2k+1} x^{2k+1} + a_{2k+2} x^{2k+2} \dots, \end{aligned}$$

и слѣдовательно, изъ формулы, содержащей конечное число членовъ, имѣемъ частный интегралъ даннаго уравненія. Я прибавляю, что мы имѣемъ два частныхъ интеграла этого же рода, потому что можно предположить μ съ двойнымъ значеніемъ $\pm m$.

Отсюда слѣдуетъ, что если n есть цѣлое отрицательное, число, то можно въ конечномъ видѣ выразить общій интегралъ даннаго уравненія, тоже самое имѣетъ мѣсто когда n есть цѣлое положительное число, потому что этотъ случай приводится къ предыдущему, какъ это мы уже видѣли. Мы получимъ сверхъ того интегралъ въ очень замѣчательномъ видѣ, поступивъ нижеслѣдующимъ образомъ.

766. Положимъ

$$z = \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}};$$

дифференціальное уравненіе въ z будетъ

$$\left[x \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} + n \frac{d^n u}{dx^n} \right] + \left[(2\mu x + n) \frac{d^n u}{dx^n} + n \cdot 2\mu \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} \right] = 0;$$

первый членъ въ скобкахъ есть производная порядка n функціи

$x \frac{dy}{dx}$; равнымъ образомъ, второй членъ въ скобкахъ есть производная порядка n отъ $(2\mu x + n)u$. Поэтому, взявъ интеграль n разъ предыдущаго уравненія и означивъ черезъ P_{n-1} произвольный полиномъ въ x степени $n - 1$, получимъ

$$x \frac{du}{dx} + (2\mu x + n) u = P_{n-1}.$$

Но такъ какъ мы имѣемъ нужду только въ частномъ значеніи u , то мы можемъ сдѣлать $P_{n-1} = 0$; тогда предыдущее уравненіе, отдѣливъ переменныя, будетъ

$$\frac{du}{u} + \left(2\mu + \frac{n}{x}\right) dx = 0,$$

и, взявъ интеграль,

$$\log u + 2\mu x + n \log x = \text{const.};$$

сдѣлавъ постоянную, равную нулю, получимъ

$$u = e^{-2\mu x} x^{-n},$$

и слѣдовательно

$$z = \frac{d^{n-1} (e^{-2\mu x} x^{-n})}{dx^{n-1}}, \quad y = e^{\mu x} \frac{d^{n-1} (e^{-2\mu x} x^{-n})}{dx^{n-1}}.$$

Значеніямъ $+m$ и $-m$ количества μ отвѣчаютъ два частныхъ интеграла даннаго уравненія; поэтому, если означимъ черезъ C , C' двѣ произвольныя постоянныя, общій интеграль, въ случаѣ n цѣлаго положительнаго числа, есть

$$y = C e^{mx} \frac{d^{n-1} (e^{-2mx} x^{-n})}{dx^{n-1}} + C' e^{-mx} \frac{d^{n-1} (e^{2mx} x^{-n})}{dx^{n-1}}.$$

Если n есть цѣлое отрицательное число, то вмѣсто n нужно написать $1 - n$ и умножить полученный результатъ (§ 760) на x^{1-2n} . Общій интеграль въ этомъ случаѣ поэтому есть

$$y = C e^{mx} x^{1-2n} \frac{d^{-n} (e^{-2mx} x^{n-1})}{dx^{-n}} + C' e^{-mx} x^{1-2n} \frac{d^{-n} (e^{2mx} x^{n-1})}{dx^{-n}}.$$

Объ уравненіи Риккати.

767. Уравненіе Риккати, которымъ мы уже занимались въ § 663, есть

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m,$$

гдѣ a и b суть данныя постоянныя, m какой-нибудь показатель. Мы приведемъ его къ линейному уравненію, если положимъ

$$(2) \quad y = \frac{1}{a} \frac{dz}{dx} \frac{1}{z},$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{a} \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{z^2};$$

черезъ это внесеніе получимъ

$$(3) \quad \frac{d^2z}{dx^2} = ab x^m z.$$

Уравненіе (3) есть линейное, и его общій интегралъ имѣетъ видъ

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2;$$

гдѣ C_1 , C_2 суть двѣ произвольныя постоянныя. Внеся это значеніе въ формулу (2) и положивъ $\frac{C_2}{C_1} = C$, будемъ имѣть

$$(4) \quad y = \frac{1}{a} \frac{\frac{dz_1}{dx} + C \frac{dz_2}{dx}}{z_1 + C z_2};$$

уравненіе (4), содержащее произвольную постоянную C , есть общій интегралъ уравненія Риккати. Но намъ остается найти частные интегралы z_1 , z_2 уравненія (3). Мы получили бы безъ труда эти интегралы, если бы прямо приступили къ разложенію въ рядъ посредствомъ неопредѣленныхъ коэффициентовъ; но можно избѣжать этого новаго вычисленія, приводя уравненіе (3) къ тому, которымъ мы прежде занима-

лись. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ

$$x^{\frac{m+2}{2}} = t,$$

и вмѣсто x возьмемъ t за независимую переменную; будемъ имѣть

$$\frac{dz}{dx} = \frac{m+2}{2} x^{\frac{m}{2}} \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{(m+2)^2}{4} x^m \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m^2+2m}{4} x^{\frac{m-2}{2}} \frac{dz}{dt};$$

если внесемъ предыдущее значеніе $\frac{d^2z}{dx^2}$ въ уравненіе (3), то получимъ

$$(5) \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m}{m+2} \frac{1}{t} \frac{dz}{dt} + \frac{4ab}{(m+2)^2} z = 0;$$

въ то же время черезъ формулу (4) будемъ имѣть

$$(6) \quad y = \frac{(m+2)x^{\frac{m}{2}}}{2a} \frac{dz_1}{dt} + C \frac{dz_2}{dt},$$

гдѣ z_1, z_2 означаютъ два различные частные интеграла уравненія (5). Мы видимъ, что это уравненіе (5) есть ничто иное, какъ то, которое мы изучали въ § 758 и слѣдующихъ параграфахъ. Можно получить его интегралъ въ конечномъ видѣ, когда $\frac{m}{m+2}$ есть четное число $\pm 2i$, положительное или отрицательное, т. е. когда число m имѣетъ видъ

$$m = \frac{-4i}{1 \mp 2i};$$

такимъ образомъ мы снова находимъ случаи интегрированія, уже полученные въ § 665.

Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій посредствомъ определенныхъ интеграловъ.

768. Вмѣсто того, чтобы выражать интегралы дифференціальныхъ уравненій посредствомъ рядовъ, часто бываетъ

выгодно употреблять опредѣленные интегралы. Задача, которую тогда надлежитъ рѣшить, состоитъ въ томъ, чтобы выразить сумму опредѣленного ряда посредствомъ опредѣленного интеграла; невозможно дать общаго правила для этого случая; поэтому мы ограничимся здѣсь тѣмъ, что дадимъ одинъ примѣръ.

Возьмемъ снова дифференціальное уравненіе

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2n}{x} \frac{dy}{dx} - m^2 y = 0.$$

Мы видѣли, что оно допускаетъ интегралъ

$$(2) \quad y = A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \dots + A_i x^{2i} + \dots,$$

котораго коэффициенты A удовлетворяютъ условію

$$(3) \quad A_i = \frac{m^2}{2i(2n + 2i - 1)} A_{i-1}.$$

Если положимъ

$$(4) \quad \varphi(i) = \frac{2i - 1}{2n + 2i - 1} \varphi(i - 1),$$

то условіе (3) сдѣлается

$$\frac{A_i}{\varphi(i)} = \frac{m^2}{2i(2i - 1)} \frac{A_{i-1}}{\varphi(i - 1)},$$

изъ чего можно заключить, что

$$\frac{A_i}{\varphi(i)} = \frac{m^2}{1 \cdot 2 \dots 2i} \frac{A_0}{\varphi(0)};$$

если A_0 есть произвольная, то положимъ $A_0 = \varphi(0)$; будемъ имѣть

$$5) \quad A_i = \frac{m^{2i}}{1 \cdot 2 \dots 2i} \varphi(i).$$

Если n положительное, то посредствомъ интегрированія по частямъ мы узнаемъ, что уравненіе (4) удовлетворится, если положимъ

$$\varphi(i) = \int_0^\pi \cos^{2i} \omega \sin^{2n-1} \omega d\omega;$$

поэтому можно сдѣлать

$$A_i = \frac{m^{2i}}{1 \cdot 2 \dots 2i} \int_0^\pi \cos^{2i} \omega \sin^{2n-1} \omega d\omega,$$

и формула (2) дастъ такой интеграль уравненія (1)

$$y_1 = \int_0^\pi \left(1 + \frac{m^2 x^2 \cos^2 \omega}{1 \cdot 2} + \frac{m^4 x^4 \cos^4 \omega}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right) \sin^{2n-1} \omega d\omega,$$

или

$$y_1 = \int_0^\pi \frac{e^{mx \cos \omega} + e^{-mx \cos \omega}}{2} \sin^{2n-1} \omega d\omega.$$

Чтобы получить второй интеграль, достаточно (§ 760) измѣнить n въ $1 - n$ и потомъ умножить первый интеграль на x^{1-2n} ; поэтому имѣемъ

$$y_2 = x^{1-2n} \int_0^\pi \frac{e^{mx \cos \omega} + e^{-mx \cos \omega}}{2} \sin^{1-2n} \omega d\omega;$$

но это предполагаетъ $n < 1$, потому что иначе интеграль, содержащійся въ этой формулѣ, будетъ безконечность.

769. Если m^2 отрицательное, то пусть $m^2 = -\mu^2$, общій интеграль уравненія

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2n}{x} \frac{dy}{dx} + \mu^2 y = 0,$$

гдѣ n заключается между 0 и 1, будетъ

$$y = C \int_0^\pi \cos(\mu x \cos \omega) \sin^{2n-1} \omega d\omega + C' x^{1-2n} \int_0^\pi \cos(\mu x \cos \omega) \sin^{1-2n} \omega d\omega,$$

гдѣ C и C' суть двѣ произвольныя постоянныя.

Когда $n = \frac{1}{2}$, тогда оба частные интеграла, содержащіеся въ этой формулѣ, дѣлаются одинаковыми; но нетрудно получить общій интеграль, отвѣчающій этому случаю, употребивъ способъ, съ которымъ мы уже нѣсколько разъ имѣли дѣло. Положимъ $2n = 1 - h$, будемъ имѣть

$$\sin^{2n-1}\omega = 1 - h \log \sin \omega + \frac{h^2 \log^2 \sin \omega}{1 \cdot 2} (\sin \omega)^{\theta h},$$

$$(x \sin \omega)^{1-2n} = 1 + h \log (x \sin \omega) + \frac{h^2 \log^2 (x \sin \omega)}{1 \cdot 2} (x \sin \omega)^{\lambda h}.$$

гдѣ θ и λ заключаются между 0 и 1. Если внесемъ эти значенія въ предыдущую формулу, если замѣнимъ $C + C'$ черезъ C_1 , $C'h$ черезъ C_2 и если потомъ сдѣлаемъ $h = 0$, то получимъ

$$y = \int_0^\pi \cos(\mu x \cos \omega) d\omega + C_2 \int_0^\pi \cos(\mu x \cos \omega) \log(x \sin^2 \omega) d\omega;$$

это же есть общій интегралъ уравненія

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \mu^2 y = 0.$$

Этотъ результатъ нетрудно бы было вывести изъ анализа § 764.

Объ отысканіи опредѣленныхъ интеграловъ посредствомъ дифференціальныхъ уравненій.

770. Задача, о которой идетъ здѣсь рѣчь, обратна той, которою мы только-что занимались. Когда опредѣленный интегралъ содержитъ переменный параметръ, то можно образовать дифференціальное уравненіе, которому онъ удовлетворяетъ и которое будетъ освобождено отъ знака \int . Если умѣемъ интегрировать полученное дифференціальное уравненіе, то мы будемъ въ состояніи опредѣлить значеніе даннаго опредѣленнаго интеграла; мы дадимъ сейчасъ примѣръ.

Разсмотримъ опредѣленный интегралъ

$$(1) \quad y = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{(1 + \alpha^2)^{n+1}} d\alpha,$$

гдѣ показатель $n+1$ предполагается положительнымъ. Интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int \frac{\cos \alpha x}{(1 + \alpha^2)^{n+1}} d\alpha = \frac{\sin \alpha x}{x(1 + \alpha^2)^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{x} \int \frac{\sin \alpha x}{(1 + \alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha,$$

откуда

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1 + \alpha^2)^{n+1}} d\alpha = \frac{2(n+1)}{x} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{(1 + \alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha$$

или

$$(2) \quad xy = 2(n+1) \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{(1 + \alpha^2)^{n+2}} \alpha d\alpha.$$

Дифференцируя два раза уравнение (2), имѣемъ

$$(3) \quad \frac{d^2(xy)}{dx^2} = -2(n+1) \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{(1 + \alpha^2)^{n+1}} \alpha^3 d\alpha,$$

откуда черезъ вычитаніе

$$(4) \quad \frac{d^2(xy)}{dx^2} - xy = -2(n+1) \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{(1 + \alpha^2)^{n+1}} \alpha d\alpha.$$

Но дифференцированіе уравненія (1) также даетъ

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = - \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{(1 + \alpha^2)^{n+1}} \alpha d\alpha,$$

и мы изъ формуль (4) и (5) имѣемъ

$$\frac{d^2(xy)}{dx^2} - xy = 2(n+1) \frac{dy}{dx},$$

или

$$(6) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2n}{x} \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Это уравненіе опять то, которымъ мы занимались въ предъидущихъ параграфахъ. Мы можемъ его интегрировать въ конечномъ видѣ, когда n есть цѣлое; поэтому можно будетъ опредѣлить, въ этомъ предположеніи, значенія даннаго интеграла.

Пусть будетъ, напримѣръ, $n = 0$. Уравненіе (6) приводится къ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0,$$

и его общій интегралъ есть

$$y = Ce^x + C'e^{-x}.$$

Намъ остается опредѣлить постоянныя C и C' . Сперва, предположивъ x положительнымъ, имѣемъ $C = 0$, такъ какъ данный интегралъ не можетъ безпредѣльно возрастать вмѣстѣ съ x . Далѣе, такъ какъ этотъ интегралъ для $x = 0$ приводится къ $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, т. е. къ $\frac{\pi}{2}$, то имѣемъ $C' = \frac{\pi}{2}$; поэтому въ случаѣ $x > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha x},$$

какъ это мы получили въ § 496.

Примѣръ опредѣленія суммы даннаго ряда посредствомъ дифференціального уравненія.

771. Иногда можно опредѣлить сумму ряда, котораго члены зависятъ отъ переменнѣй, образовавъ дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяла бы сумма даннаго ряда, и взявъ потомъ интегралъ этого уравненія. Часто также достигается посредствомъ этого дѣйствія преобразование рядовъ въ другіе, болѣе удобные для численнаго вычисленія; мы дадимъ сейчасъ примѣръ.

Предположимъ, что нужно найти сумму сходящагося ряда

$$(1) \quad X = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{x^4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n+1)} + \dots$$

Если переменная x предполагается дѣйствительной и положительной, то положимъ

$$y = X\sqrt{x},$$

будемъ имѣть

$$(2) \quad y = x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots + (-1)^n \frac{x^{\frac{4n+1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n+1)} + \dots$$

Взявъ два раза дифференціалъ формулы (2) и умноживъ ее на 4, получимъ

$$(3) \quad 4 \frac{d^2 y}{dx^2} = -x^{-\frac{3}{2}} - \left[x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{1.3.5} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{1.3.5.7.9} - \dots \right];$$

далѣе, сложивъ уравненія (2) и (3), получимъ

$$(4) \quad 4 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = -x^{-\frac{3}{2}}.$$

Это уравненіе линейное и съ постоянными коэффициентами; прилагая къ нему правила, изложенныя нами, получимъ его общій интегралъ

$$(5) \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \left(C + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{x}{2} dx \right) \\ + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \left(C' + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{x}{2} dx \right), \end{cases}$$

откуда находимъ

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \sin \frac{x}{2} \left(C + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{x}{2} dx \right) \\ + \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2} \left(C' + \int_0^x x^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{x}{2} dx \right). \end{cases}$$

Для опредѣленія постоянныхъ C , C' , мы сдѣлаемъ $x = 0$ и сравнимъ уравненія (5) и (6) съ уравненіемъ (2) и съ слѣдующимъ

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1.3} + \dots,$$

которое получается отъ дифференцированія уравненія (2). Вторыя части уравненій (2) и (7) уничтожаются для $x=0$; слѣдовательно, то же самое должно быть и со вторыми частями уравненій (5) и (6); это же требуетъ того, чтобы мы имѣли $C = 0$, $C' = 0$. Подставивъ поэтому въ формулѣ (5) $X\sqrt{x}$ вмѣсто y , будемъ имѣть

$$(8) \quad X\sqrt{x} = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \int_0^x x^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{x}{2} dx + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \int_0^x x^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{x}{2} dx.$$

Такъ какъ значеніе x было предположено положительнымъ, то мы имѣемъ (§ 516)

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-\alpha \frac{x}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}} d\alpha$$

или

$$x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \alpha^{-\frac{1}{2}} d\alpha;$$

если же замѣнимъ $x^{-\frac{1}{2}}$ во второй части формулы (8) этимъ значеніемъ, то, нарушивъ порядокъ интегрированій, получимъ

$$\begin{aligned} X \sqrt{x} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cos \frac{x}{2} \int_0^{\infty} \alpha^{-\frac{1}{2}} d\alpha \int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \cos \frac{x}{2} dx \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sin \frac{x}{2} \int_0^{\infty} \alpha^{-\frac{1}{2}} d\alpha \int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \sin \frac{x}{2} dx. \end{aligned}$$

Сверхъ того (§ 488),

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \cos \frac{x}{2} dx &= 2e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \left(\frac{-\alpha \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{1 + \alpha^2} \right) + \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}, \\ \int_0^x e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \sin \frac{x}{2} dx &= 2e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \left(\frac{-\cos \frac{x}{2} - \alpha \sin \frac{x}{2}}{1 + \alpha^2} \right) + \frac{2}{1 + \alpha^2}; \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} X \sqrt{x} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{x}{2} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{\frac{1}{2}} d\alpha}{1 + \alpha^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin \frac{x}{2} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{-\frac{1}{2}} d\alpha}{1 + \alpha^2} \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha \frac{x}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} d\alpha}{1 + \alpha^2}. \end{aligned}$$

Оба интеграла $\int_0^{\infty} \frac{\alpha^{\frac{1}{2}} d\alpha}{1 + \alpha^2}$, $\int_0^{\infty} \frac{\alpha^{-\frac{1}{2}} d\alpha}{1 + \alpha^2}$ приводятся, и тотъ и другой, къ

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{1}{4}-1} dz}{1+z} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

если положимъ въ первомъ $\alpha = z^{-\frac{1}{2}}$, а во второмъ $\alpha = z^{\frac{1}{2}}$; слѣдовательно имѣемъ

$$(9) \quad X = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha \frac{x}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} dx}{1+\alpha^2},$$

или

$$(10) \quad X = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) - V,$$

гдѣ

$$(11) \quad V = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha \frac{x}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} d\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Произведение $V \sqrt{2\pi x}$ уничтожается для $x = +\infty$; слѣдовательно, если значеніе x очень большое, очень близко будемъ имѣть

$$(12) \quad X = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right);$$

очевидно, что, для такихъ значеній x , употребленіе формулы (1) было бы затруднительно. Но мы можемъ идти дальше, разложивъ V въ рядъ, очень удобный для вычисленія X , въ случаѣ большихъ значеній x . Дѣйствительно, имѣемъ

$$\frac{1}{1+\alpha^2} = 1 - \alpha^2 + \alpha^4 - \dots + (-1)^{n-1} \alpha^{2n-2} + (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^2},$$

откуда

$$V = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha \frac{x}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} d\alpha - \int_0^{\infty} e^{-\alpha \frac{x}{2}} \alpha^{\frac{3}{2}} d\alpha + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{n-1} \int_0^{\infty} e^{-\alpha \frac{x}{2}} \alpha^{\frac{2n-3}{2}} d\alpha + (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha \frac{x}{2}} \alpha^{\frac{2n+1}{2}}}{1+\alpha^2} d\alpha \right].$$

Послѣдній интеграль можетъ быть означенъ черезъ $\theta \int_0^\infty e^{-\alpha \frac{x}{2}} \alpha^{\frac{4n+1}{2}} d\alpha$, гдѣ θ есть количество, заключающееся между 0 и 1; сверхъ того имѣемъ (§ 516)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha \frac{x}{2}} \alpha^{\frac{4i+1}{2}} d\alpha = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{4i+3}{2}} \Gamma\left(\frac{4i+3}{2}\right) \\ = \sqrt{2\pi x} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4i+1)}{x^{2i+2}};$$

поэтому

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} V &= \frac{1}{x^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{x^4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n-3)}{x^{2n}} \\ &\quad + \theta (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n-1)}{x^{2n+2}}. \end{aligned} \right.$$

Заставивъ возрастать n безпредѣльно, мы получили бы расходящійся рядъ; но такъ какъ ошибка, получающаяся при остановкѣ ряда на какомъ-нибудь членѣ, меньше слѣдующаго члена, то рядъ можетъ съ пользою служить для вычисленія V при большихъ значеніяхъ x . Онъ, какъ мы видимъ, аналогиченъ ряду Штирлинга. Въ частности, если $x > 10000$, то мы будемъ въ состояніи вычислить X по приближенной формулѣ (12) съ семью точными десятичными знаками.

Нетрудно доказать, что уравненіе $X = 0$ имѣетъ безконечное число дѣйствительныхъ корней и что положительные корни, расположенные по ихъ численной величинѣ, все менѣе и менѣе отличаются отъ соотвѣтствующихъ корней уравненія

$$\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} = 0,$$

которые содержатся въ формулѣ $x = (4i+3) \frac{\pi}{2}$; но мы предоставимъ читателю вывести эти слѣдствія изъ нашего анализа.

ГЛАВА XI.

ОБЪ УРАВНЕНІЯХЪ СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ИЛИ СЪ ПОЛНЫМИ ДИФФЕРЕНЦІАЛАМИ.

Объ уравненіяхъ съ частными производными, къ которымъ можно приложить способы интегрированія, относящіеся къ обыкновеннымъ дифференціальнымъ уравненіямъ.

772. Уравненіе съ частными производными содержитъ двѣ или большее число независимыхъ переменныхъ, одну или нѣсколько неизвѣстныхъ функцій и нѣкоторыя изъ ихъ частныхъ производныхъ. Въ задачахъ, которыя приводятъ къ такимъ уравненіямъ, число этихъ уравненій вообще равно числу неизвѣстныхъ функцій; мы здѣсь ограничимся изученіемъ случая одного уравненія, содержащаго одну неизвѣстную функцію.

Задача, имѣющая предметомъ интегрированіе уравненія съ частными производными, должна быть рассматриваема рѣшенной, когда она приведена къ интегрированію системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Приведеніе, о которомъ мы говоримъ, само собою имѣетъ мѣсто, когда частныя производныя, входящія въ данное уравненіе, всѣ относятся къ одной переменной. Въ этомъ случаѣ, очевидно, можно поступить такъ, какъ будто другія переменныя суть постоянныя параметры; но нужно будетъ рассматривать постоянныя, введенныя черезъ интегрированіе, какъ произвольныя функціи тѣхъ же переменныхъ.

Разсмотримъ, напримѣръ, уравненіе съ частными производными

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z f(x, y) = F(x, y),$$

въ которомъ z есть неизвѣстная функція переменныхъ x, y , и гдѣ f, F означаютъ данныя функціи тѣхъ же переменныхъ. Если рассматриваемъ переменную y какъ постоянную, то интегрированіе даетъ (§ 658)

$$z = e^{-\int_{x_0}^x f(x, y) dx} \left[C + \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^x f(x, y) dx} F(x, y) dx \right];$$

но здѣсь постоянная C есть произвольная функція отъ y ; написавъ $\varphi(y)$ вмѣсто C , будемъ имѣть

$$z = e^{-\int_{x_0}^x f(x, y) dx} \left[\varphi(y) + \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^x f(x, y) dx} F(x, y) dx \right].$$

773. Точно также можно поступить въ случаѣ нѣкоторыхъ уравненій, содержащихъ производныя, относящіяся къ нѣсколькимъ независимымъ переменнымъ. Разсмотримъ, напри-
мѣръ, уравненіе

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y),$$

гдѣ a есть данная постоянная и $f(x, y)$ данная функція независимыхъ переменныхъ x, y . Если положимъ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p,$$

то данное уравненіе будетъ

$$\frac{\partial p}{\partial y} + ap = f(x, y);$$

въ этомъ же видѣ оно входитъ въ разрядъ тѣхъ, которыми мы только-что занимались. Если возьмемъ интегралъ, раз-

смаатривая x какъ постоянную и означивъ черезъ X' произвольную постоянную, то получимъ

$$p = X' e^{-ay} + e^{-ay} \int_{y_0}^y e^{ay} f(x, y) dy.$$

Въ этомъ уравненіи, X' нужно разсматривать какъ произвольную функцію отъ x ; подставимъ $\frac{\partial z}{\partial x}$ вмѣсто p , получимъ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X' e^{-ay} + e^{-ay} \int_{y_0}^y e^{ay} f(x, y) dy.$$

Интегрируемъ теперь это уравненіе, разсматривая y какъ постоянную; означивъ черезъ Y произвольную постоянную и черезъ X произвольную функцію отъ x , имѣющую производною X' , будемъ имѣть

$$z = Y + X e^{-ay} + e^{-ay} \int_{x_0}^x dx \int_{y_0}^y e^{ay} f(x, y) dx.$$

Очевидно, что эта формула даетъ самое общее рѣшеніе даннаго уравненія; она содержитъ двѣ произвольныя функціи X , Y ; первая не зависитъ отъ y , вторая не зависитъ отъ x .

Объ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка, линейныхъ относительно производныхъ.

774. Далѣе мы дадимъ опредѣленіе *общаго интеграла* уравненія съ частными производными перваго порядка и мы докажемъ, что отысканіе этого интеграла можетъ всегда быть приведено къ интегрированію системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, какое бы ни было число независимыхъ переменныхъ. Но мы будемъ здѣсь исключительно заниматься частнымъ случаемъ уравненій съ частными производными перваго порядка, въ которыя производныя входятъ только въ первой стѣпени и не перемножаются между собой.

Случай двухъ независимыхъ переменныхъ. — Пусть будутъ x, y, z три переменныя, изъ которыхъ послѣд-

ная рассматривается какъ функція двухъ другихъ; положимъ также

$$dz = p dx + q dy;$$

это же показываетъ, что p и q представляютъ частныя производныя отъ z относительно x и y .

Уравненіе съ частными производными, которымъ мы сейчасъ будемъ заниматься, — слѣдующее:

$$(1) \quad Pp + Qq = R;$$

P , Q , R означаютъ здѣсь данныя функціи трехъ переменныхъ x , y , z .

Мы видѣли (§ 83), что, если u и v означаютъ данныя функціи отъ x , y , z , то получимъ уравненіе съ частными производными одного вида съ даннымъ, если исключимъ произвольную функцію φ изъ уравненія

$$(2) \quad v = \varphi(u),$$

посредствомъ уравненій, получаемыхъ изъ него черезъ дифференцированіе относительно x и y . Естественно, поэтому, посмотрѣть, можно ли удовлетворить во всѣхъ случаяхъ уравненію (1), взявъ для z функцію, опредѣляемую уравненіемъ (2), гдѣ φ означаетъ произвольную функцію и гдѣ u , v суть функціи отъ x , y , z , надлежащимъ образомъ выбранныя.

Взявъ дифференціалъ уравненія (2) относительно x и относительно y , найдемъ

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} + p \frac{\partial v}{\partial z} = \varphi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial y} + q \frac{\partial v}{\partial z} = \varphi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial z} \right); \end{cases}$$

слѣдовательно, чтобы уравненіе (2) давало рѣшеніе уравненія (1), нужно и достаточно, чтобы мы получили тождественное уравненіе послѣ исключенія p и q изъ уравненій (1) и (3). Чтобы произвести это исключеніе, достаточно сложить уравненія (3) между собою послѣ умноженія ихъ соотвѣтственно на P и Q ; тогда, воспользовавшись уравненіемъ (1), получимъ

$$\left(P \frac{\partial v}{\partial x} + Q \frac{\partial v}{\partial y} + R \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \varphi'(u) \left(P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

и это уравнение будетъ имѣть мѣсто, какая бы ни была функція φ , если только имѣемъ тождественно

$$(4) \quad \begin{cases} P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ P \frac{\partial v}{\partial x} + Q \frac{\partial v}{\partial y} + R \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Но мы видѣли (§ 626), что если означимъ черезъ

$$(5) \quad u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

два интеграла обыкновенныхъ совмѣстныхъ дифференціаль-
ныхъ уравненій

$$(6) \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

то функції u и v удовлетворяютъ уравненіямъ (4); если по-
этому возьмемъ для u и v , въ уравненіи (2), функції, такимъ
образомъ опредѣленныя, то это уравненіе (2) дастъ рѣшеніе дан-
наго уравненія (1), какая бы при этомъ ни была функція φ .

775. Я прибавляю, что всякое рѣшеніе уравненія (1) за-
ключается въ уравненіи (2). Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ,
что уравненіе (1) удовлетворяется значеніемъ z , опредѣляе-
мымъ уравненіемъ

$$(7) \quad F(x, y, z) = 0.$$

Черезъ дифференцированіе имѣемъ

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} = 0;$$

если же значенія p и q , полученные изъ этихъ уравненій,
подставимъ въ уравненіе (1), то, по нашему предположенію,
будемъ имѣть

$$(8) \quad P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} + R \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

уравненіе, которое, въ силу уравненія (7), должно сдѣлаться
тождествомъ.

Но количества, означенныя нами черезъ u и v , суть дан-
ныя функції отъ x, y, z ; поэтому y, z можно разсматривать,

какъ функціи отъ u, v, x или какъ функціи отъ u, v, y .
Слѣдовательно, пусть будетъ

$$(9) \quad F(x, y, z) = f(u, v, x) = f_1(u, v, y);$$

будемъ имѣть

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z};$$

внесеніе же этихъ значеній въ уравненіе (8), по причинѣ уравненій (4), дастъ

$$P \frac{\partial f}{\partial x} = 0;$$

формула (9) равнымъ образомъ дастъ

$$Q \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0.$$

Если первая часть уравненія (7) не приводится къ функціи только однѣхъ переменныхъ u, v , то производныя $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}$ не будутъ тождественно нули, и мы не можемъ допустить, что одно изъ уравненій $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$ имѣетъ мѣсто, въ силу уравненія (7), $f(u, v, x) = 0$ или $f_1(u, v, y) = 0$, потому что исключеніе x или y дало бы конечное уравненіе между u и v ; это же заключаетъ въ себѣ противорѣчіе. Поэтому нужно, чтобы P и Q уничтожались въ силу уравненія (7), что требуетъ, чтобы R было также нуль. Очевидно, что если P, Q, R уничтожаются одновременно для нѣкотораго значенія z , то данное уравненіе будетъ удовлетворяться въ то же самое время; но мы не примемъ во вниманіе этихъ рѣшеній, а тогда мы видимъ, что уравненіе (7) имѣетъ необходимо видъ

$$\Phi(u, v) = 0,$$

откуда для v находимъ значеніе

$$v = \varphi(u),$$

которое зависит только от u .

776. СЛУЧАЙ КАКОГО-УГОДНО ЧИСЛА ПЕРЕМѢННЫХЪ. — Предъидущій анализъ прилагается ко всѣмъ уравненіямъ съ частными производными перваго порядка, линейнымъ относительно производныхъ, съ какимъ угодно числомъ независимыхъ переменныхъ. Это есть то, что мы сейчасъ будемъ доказывать.

Мы означимъ черезъ

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

n независимыхъ переменныхъ, черезъ x главную переменную, т. е. неизвѣстную функцію независимыхъ переменныхъ; мы сдѣлаемъ, сверхъ того,

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n.$$

Теперь, общій видъ рассматриваемыхъ нами уравненій съ частными производными есть

$$(1) \quad P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_n p_n = P,$$

гдѣ P_1, P_2, \dots, P_n и P означаютъ данныя функціи отъ $n+1$ переменныхъ x, x_1, x_2, \dots, x_n .

Мы видѣли (§ 83), что если

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

суть данныя функціи переменныхъ x, x_1, x_2, \dots, x_n и если Φ означаетъ произвольную функцію, то уравненіе

$$(2) \quad \Phi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0,$$

черезъ исключеніе произвольной функціи, приведетъ къ уравненію съ частными производными, такому, какъ уравненіе (1). Поэтому посмотримъ, возможно ли удовлетворить уравненію (1) уравненіемъ (2), опредѣливъ прилично функціи u_1, u_2, \dots, u_n , входящія въ него.

Взявъ дифференціалъ уравненія (2) относительно каждой изъ независимыхъ переменныхъ, получимъ

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_n}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_n}{\partial x} \right) = 0, \\ \dots \dots \dots, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_n}{\partial x} \right) = 0; \end{cases}$$

чтобы уравнение (2) удовлетворяло данному, нужно и достаточно, чтобы исключение производных p_1, p_2, \dots, p_n изъ уравнений (1) и (3) приводило къ тождеству. Мы произведемъ исключение, о которомъ идетъ рѣчь, если сложимъ уравненія (3), послѣ умноженія ихъ соотвѣтственно на P_1, P_2, \dots, P_n , и воспользуемся потомъ уравненіемъ (1); такимъ образомъ найдемъ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \left(P \frac{\partial u_1}{\partial x} + P_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + P_n \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \right) \\ & + \dots \dots \dots, \dots \dots \dots \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n} \left(P \frac{\partial u_n}{\partial x} + P_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \dots + P_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) = 0. \end{aligned}$$

Это уравненіе будетъ удовлетворяться при какой угодно функціи Φ , если только тождественно имѣемъ

$$(4) \quad \begin{cases} P \frac{\partial u_1}{\partial x} + P_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + P_n \frac{\partial u_1}{\partial x_n} = 0, \\ P \frac{\partial u_2}{\partial x} + P_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dots + P_n \frac{\partial u_2}{\partial x_n} = 0, \\ \dots \dots \dots, \\ P \frac{\partial u_n}{\partial x} + P_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \dots + P_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0, \end{cases}$$

и мы знаемъ (§ 626), что эти послѣднія уравненія будутъ дѣйствительно имѣть мѣсто, если функціи u_1, u_2, \dots, u_n были такъ выбраны, чтобы уравненія

$$u_1 = \text{const.}, \quad u_2 = \text{const.}, \quad \dots, \quad u_n = \text{const.}$$

составляли n интеграловъ системы совмѣстныхъ уравнений

$$(5) \quad \frac{dx}{P} = \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n}.$$

777. Посредствомъ разсужденія § 775 можно, кромѣ того,

доказать, что всякое рѣшеніе уравненія (1) необходимо заключается въ уравненіи (2); дѣйствительно, пусть

$$(6) \quad F(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

будетъ такое рѣшеніе; черезъ дифференцированіе будемъ имѣть

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial F}{\partial x} = 0;$$

опредѣливъ отсюда значенія p_1, p_2, \dots, p_n для внесенія ихъ въ уравненіе (1), получимъ

$$(7) \quad P \frac{\partial F}{\partial x} + P_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + P_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

Предположимъ, что мы выразили переменныя x, x_1, x_2, \dots, x_n , исключая x_i , въ функціи u_1, u_2, \dots, u_n и x_i , и пусть будетъ

$$F(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = f_i(u_1, u_2, \dots, u_n, x_i),$$

будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} &= \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial F}{\partial x_{i-1}} &= \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_{i-1}} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_{i-1}}, \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} &= \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_n}, \end{aligned}$$

внеся эти значенія въ уравненіе (7) и упростивъ посредствомъ уравненій (4), получимъ

$$P_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0.$$

Если же коэффициенты P_1, P_2, \dots, P_n и P , въ силу уравненія (6), не уничтожаются, то будемъ имѣть тождество

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что уравненіе (6) имѣетъ вполнѣ видъ (2).

778. Предъидущій методъ даетъ самое общее рѣшеніе даннаго уравненія и мы можемъ этому рѣшенію дать названіе *общаго интеграла*. Изложенные нами результаты заключаются въ слѣдующемъ предложеніи:

ТЕОРЕМА. — Пусть будутъ $n+1$ переменныхъ x, x_1, x_2, \dots, x_n , изъ которыхъ первая есть функція другихъ; $p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$ полный дифференціалъ dx отъ x ; P, P_1, P_2, \dots, P_n данныя функціи переменныхъ x, x_1, x_2, \dots, x_n . Чтобы найти общій интегралъ уравненія съ частными производными первого порядка.

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_n p_n = P,$$

достаточно взять интегралъ обыкновенныхъ совместныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx}{P} = \frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_n}{P_n}.$$

Если означимъ черезъ

$$u_1 = \text{const.}, \quad u_2 = \text{const.}, \quad \dots, \quad u_n = \text{const.}$$

интегралы этихъ уравненій, рѣшенные относительно произвольныхъ постоянныхъ, то общій интегралъ уравненія съ частными производными будетъ

$$\Phi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0,$$

гдѣ Φ означаетъ произвольную функцію.

Произвольная функція должна быть опредѣлена въ каждой задачѣ, посредствомъ частныхъ условій. Можно, напри- мѣръ, задаться тѣмъ условіемъ, что x приводится къ данной функціи отъ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , когда дають переменнѣй x_n опредѣленное значеніе ξ_n . Нетрудно видѣть, что функція Φ можетъ постоянно быть выбрана такъ, чтобы удовлетворяла этому условію.

Въ самомъ дѣлѣ, если ξ_n означаетъ опредѣленное значеніе и f данную функцію, и если предположимъ

$$x_n = \xi_n, \quad x = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

то u_1, u_2, \dots, u_n сдѣлаются функціями отъ $n - 1$ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Пусть будетъ

$$\begin{aligned} u_1 &= \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \\ u_2 &= \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \\ &\dots\dots\dots, \\ u_n &= \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}); \end{aligned}$$

исключеніе x_1, x_2, \dots, x_{n-1} изъ этихъ уравненій дастъ такой результатъ

$$\Psi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0,$$

и очевидно, что мы выполнимъ искомое условіе, взявъ для Φ функцію Ψ .

Приложеніе предъидущей теоріи къ нѣсколькимъ примѣрамъ.

779. П Р И М Ѣ Р Ъ I. — *Требуется найти уравненіе цилиндровъ по уравненію съ частными производными, принадлежащими этой поверхности.*

Означивъ прямолинейныя координаты черезъ x, y, z , мы положимъ, какъ обыкновенно, $dz = p dx + q dy$. Такъ какъ касательная плоскость параллельна опредѣленной прямой, то мы получимъ (§ 348) для цилиндровъ уравненіе съ частными производными

$$(I) \quad ap + bq = 1,$$

гдѣ a и b данныя постоянныя; требуется интегрировать это уравненіе.

Для этого мы положимъ совмѣстныя уравненія

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

или

$$dx - adz = 0, \quad dy - b dz = 0.$$

Интегралы этихъ уравненій суть

$$x - az = \text{const.}, \quad y - bz = \text{const.};$$

слѣдовательно, интеграль уравненія съ частными производ-

ными есть

$$(2) \quad \Phi(x - az, y - bz) = 0.$$

Предположимъ, что мы желаемъ опредѣлить произвольную функцію изъ того условія, что цилиндръ проходитъ черезъ данную кривую, имѣющую уравненіями

$$(3) \quad \varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0.$$

Положимъ

$$x - az = u, \quad y - bz = v,$$

уравненія (3) могутъ быть написаны такимъ образомъ:

$$\varphi(u + az, v + bz, z) = 0, \quad \psi(u + az, v + bz, z) = 0.$$

Исключивъ z , будемъ имѣть такое конечное уравненіе

$$\Psi(u, v) = 0 \quad \text{или} \quad \Psi(x - az, y - bz) = 0;$$

слѣдовательно, для Φ нужно взять функцію Ψ .

Предположимъ теперь, что мы желаемъ опредѣлить функцію Φ изъ того условія, что цилиндръ описанъ около данной поверхности, имѣющей уравненіемъ

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Достаточно будетъ опредѣлить кривую соприкосновенія этой поверхности съ цилиндромъ, потому что, если эта кривая извѣстна, будемъ имѣть условія предъидущаго случая. Составимъ уравненія касательныхъ плоскостей въ точкѣ (x, y, z) къ данной поверхности и цилиндру, именно:

$$(X - x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (Z - z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \\ Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

Такъ какъ касательныя плоскости, о которыхъ идетъ рѣчь, совпадаютъ, то имѣемъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

и, по причинѣ уравненія (1),

$$a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Это и уравнение поверхности опредѣляютъ кривую соприкосновенія; дальше мы - должны поступать какъ и въ предъидущемъ случаѣ.

780. П р и м ѣ р ъ II. — Требуется найти уравненіе конусовъ по уравненію съ частными производными этихъ поверхностей.

Уравненіе съ частными производными коническихъ поверхностей получится (§ 349), если покажемъ, что касательная плоскость проходитъ черезъ опредѣленную точку, которая есть вершина поверхности. Въ системѣ прямолинейныхъ координатъ это уравненіе есть

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = z - z_0,$$

гдѣ x_0, y_0, z_0 суть координаты вершины.

Для интегрированія этого уравненія нужно искать интегралы совмѣстныхъ уравненій

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0}.$$

Эти интегралы суть

$$\log(x - x_0) - \log(z - z_0) = \text{const.},$$

$$\log(y - y_0) - \log(z - z_0) = \text{const.}$$

или

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = \text{const.}, \quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = \text{const.};$$

отсюда слѣдуетъ, что интегралъ уравненія съ частными производными есть

$$\Phi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0,$$

гдѣ Φ означаетъ произвольную функцію.

Мы поступимъ такъ же, какъ въ § 779, если пожелаемъ опредѣлить функцію Φ изъ того условія, что конусъ проходитъ черезъ данную кривую или описанъ около данной поверхности.

781. П Р И М Ъ Р Ъ III. — *Найти уравнение коноидальных поверхностей по ихъ уравненію съ частными производными.*

Уравненіе съ частными производными этихъ поверхностей получится (§ 360), если выразимъ, что касательная плоскость къ каждой точкѣ содержитъ образующую, проходящую здѣсь. Это уравненіе въ прямолинейныхъ координатахъ есть

$$px + qy = 0,$$

если беремъ направляющую за ось z и направляющую плоскость за плоскость xy . Для интегрированія этого уравненія отыщемъ интегралы совмѣстныхъ уравненій

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0},$$

которые суть

$$\frac{y}{x} = \text{const.}, \quad z = \text{const.};$$

поэтому для уравненія коноидовъ имѣемъ

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

гдѣ φ есть произвольная функція.

782. П Р И М Ъ Р Ъ IV. — *Найти уравненіе поверхностей вращенія по ихъ уравненіямъ съ частными производными.*

Это уравненіе съ частными производными есть

$$py - qx = 0,$$

если только предположимъ, что оси координатъ прямоугольны и ось z совпадаетъ съ осью поверхности; это получается (§ 351), если выражаемъ, что нормаль встрѣчаетъ ось.

Здѣсь нужно интегрировать совмѣстныя уравненія

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}$$

или

$$x dx + y dy = 0, \quad dz = 0;$$

интегралы этихъ уравненій суть

$$x^2 + y^2 = \text{const.}, \quad z = \text{const.};$$

поэтому интеграль уравненія съ частными производными есть

$$x^2 + y^2 = \varphi(z),$$

гдѣ φ означаетъ произвольную функцію.

783. П Р И М Ъ Р Ъ V. — Требуется интегрировать уравненіе съ частными производными

$$(1) \quad z = px + qy + f(x, y),$$

гдѣ $f(x, y)$ есть данная функція.

Обыкновенныя дифференціальныя уравненія, которыя нужно разсматривать здѣсь, суть

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - f(x, y)}$$

или

$$(2) \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{x} + \frac{f(x, y)}{x} = 0.$$

Изъ перваго находимъ $\log y = \log x + \text{const.}$ или

$$(3) \quad y = Cx;$$

внеся это значеніе y во второе уравненіе, получимъ

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -\frac{f(x, Cx)}{x}.$$

Это уравненіе линейное и для его интеграла найдемъ

$$(4) \quad z = C'x - x \int_{x_0}^x \frac{f(x, Cx)}{x^2} dx,$$

гдѣ C' есть вторая постоянная и x_0 какое-нибудь начальное значеніе x . Теперь два интеграла (3) и (4), которые мы только-что получили, нужно рѣшить относительно постоянныхъ C, C' и составить изъ нихъ произвольное соотношеніе; но для этого необходимо подъ знакомъ \int , содержащимся въ урав-

неніи (4), замѣнить x другой буквой, ξ . Тогда получимъ

$$z = C'x - x \int_{x_0}^x \frac{f(\xi, C\xi)}{\xi^2} d\xi,$$

или, замѣнивъ C его значеніемъ, полученнымъ изъ уравненія (3),

$$(5) \quad z = C'x - x \int_{x_0}^x \frac{f\left(\xi, \frac{y\xi}{x}\right)}{\xi^2} d\xi.$$

Намъ остается опредѣлить изъ уравненій (3) и (5) значенія C и C' , чтобы подставить ихъ въ уравненіе

$$(6) \quad C' = \varphi(C),$$

гдѣ φ означаетъ произвольную функцію; это приводитъ къ исключенію C и C' изъ уравненій (3), (5), (6). Такимъ образомъ имѣемъ

$$(7) \quad z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x \int_{x_0}^x \frac{f\left(\xi, \frac{y\xi}{x}\right)}{\xi^2} d\xi.$$

Это уравненіе (7) есть искомый общій интеграль.

Предположимъ, что функція $f(x, y)$ есть

$$f(x, y) = \frac{axy}{\sqrt{a^2 + x^2} \sqrt{a^2 + y^2}},$$

гдѣ a есть данная постоянная. Уравненіе къ интегрированію есть

$$z = px + qy + \frac{axy}{\sqrt{a^2 + x^2} \sqrt{a^2 + y^2}},$$

и по формулѣ (7), сдѣлавъ $x_0 = 0$, общій интеграль будетъ

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - ay \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 + \xi^2} \sqrt{a^2 + \frac{y^2\xi^2}{x^2}}}$$

или, предположивъ $x > 0$ и сдѣлавъ, подъ знакомъ \int , $\xi = ax$,

$d\xi = x d\alpha$, найдемъ

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - axy \int \frac{dz}{\sqrt{a^2 + x^2 z^2} \sqrt{a^2 + y^2 z^2}}$$

Объ уравненіяхъ съ полными дифференціалами.

784. Прежде чѣмъ продолжать изученіе уравненій съ частными производными, мы должны сказать объ уравненіяхъ съ полными дифференціалами, которыя встрѣчаются въ нѣкоторыхъ изысканіяхъ. Мы ограничимся случаемъ трехъ переменныхъ x, y, z , изъ которыхъ одна рассматривается какъ функція двухъ другихъ; уравненіе, которымъ мы сейчасъ будемъ заниматься, есть

$$(1) \quad Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

гдѣ P, Q, R суть данныя функціи отъ x, y, z . Нужно узнать, существуетъ ли функція z отъ x и y , способная удовлетворить уравненію (1), и если она существуетъ, то найти ее. Если сдѣлаемъ

$$dz = p dx + q dy,$$

и если подставимъ это значеніе dz въ уравненіе (1), то, такъ какъ оставшіеся дифференціалы dx, dy произвольны, нужно чтобы ихъ коэффиціенты были нули; поэтому имѣемъ

$$(2) \quad P + Rp = 0, \quad Q + Rq = 0.$$

Такимъ образомъ намъ нужно однимъ и тѣмъ же значеніемъ z удовлетворить двумъ уравненіямъ съ частными производными; это же возможно только въ томъ случаѣ, когда нѣкоторое условіе будетъ выполнено.* Дифференцируемъ первое уравненіе (2) относительно y и второе относительно x ; будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + p \frac{\partial R}{\partial y}\right) + q \left(\frac{\partial P}{\partial z} + p \frac{\partial R}{\partial z}\right) + R \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + q \frac{\partial R}{\partial x}\right) + p \left(\frac{\partial Q}{\partial z} + q \frac{\partial R}{\partial z}\right) + R \frac{\partial q}{\partial x} &= 0; \end{aligned}$$

вычитая эти уравненія одно изъ другаго и замѣчая, что $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, получимъ

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + p \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + q \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) = 0,$$

исключивъ p и q посредствомъ уравненій (2), найдемъ

$$(3) \quad P \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0;$$

таково условіе, которому должны подчиняться функціи P , Q , R , когда уравненіе (1) интегрируемо. Остается доказать, что этого условія достаточно; мы станемъ доказывать это, приступивъ прямо къ отысканію рѣшеній, которыя можетъ допустить уравненіе (1).

785. Означимъ черезъ μ множитель, способный сдѣлать выраженіе $Qdy + Rdz$ точнымъ дифференціаломъ функціи u переменныхъ y и z ; множитель μ и функція u будутъ зависѣть вообще отъ x . Положимъ, вслѣдствіе этого,

$$(4) \quad \mu Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial u}{\partial z},$$

и сдѣлаемъ, сверхъ того,

$$(5) \quad \mu P = \frac{\partial u}{\partial x} + X,$$

гдѣ X означаетъ нѣкоторую функцію отъ x , y , z . Уравненіе (1), будучи помножено на μ , сдѣлается такимъ

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + X\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0$$

или

$$(6) \quad du + Xdx = 0.$$

Такъ какъ u есть функція отъ x , y , z , то z можно разсматривать, какъ функцію отъ x , y , u , и тогда X сдѣлается функціей тѣхъ же переменныхъ. Но такъ какъ дифференціалы du , dx только одни входятъ въ уравненіе (6), то u зависитъ только отъ x ; поэтому нужно, для возможности задачи, чтобы X не содержало y и было функціей только переменныхъ x и u . Когда это условіе выполнено, тогда существуетъ множитель, функція отъ x и отъ u , обращающій первую часть уравненія (6) въ точный дифференціалъ; если такой множи-

тель означимъ черезъ $\frac{\lambda}{\mu}$, то очевидно, что λ будетъ множителемъ, способнымъ привести первую часть даннаго уравненія къ полному дифференціалу. Такимъ образомъ, имѣемъ слѣдующую теорему:

Когда уравненіе $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ интегрируемо, то существуетъ такой множитель λ , что $\lambda(Pdx + Qdy + Rdz)$ есть полный дифференціалъ dU ; поэтому уравненіе удовлетворяется, когда полагаемъ $U = C$, гдѣ C есть произвольная постоянная.

786. Обратимся къ условію возможности; оно выражается уравненіемъ $\frac{\partial X}{\partial y} = 0$, если только z рассматривается, какъ функція отъ x, y, u ; но такъ какъ X выражается въ x, y, z , то оно будетъ

$$\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

значеніе $\frac{\partial z}{\partial y}$ должно быть получено изъ уравненія, выражающаго u въ функціи x, y, z , и мы слѣдовательно имѣемъ

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій $\frac{\partial z}{\partial y}$, для нашего условія получимъ

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial X}{\partial z} = 0.$$

Сверхъ того, изъ формулъ (4) и (5) имѣемъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \\ \frac{\partial X}{\partial z} &= \frac{\partial(\mu P)}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z} - \frac{\partial(\mu R)}{\partial x}, \end{aligned}$$

если эти значенія, а также и значенія $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, полученные изъ формулъ (4), подставимъ въ условное уравненіе (7), то оно сдѣлается

$$\mu Q \left[\frac{\partial(\mu R)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu P)}{\partial z} \right] + \mu R \left[\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \right] = 0.$$

Наконецъ, приложивъ тождество

$$\mu P \left[\frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} - \frac{\partial(\mu R)}{\partial y} \right] = 0,$$

вытекающее изъ уравненій (4), произведя дифференцированія и уничтоживъ множитель μ , найдемъ

$$(8) \quad P \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0,$$

это же есть условное уравненіе, уже полученное въ § 784.

Мы видимъ, что, если это условіе выполнено, количество X , входящее въ уравненіе (6), будетъ функціей только переменныхъ x и u . Теперь это уравненіе (6), которое есть нечто иное, какъ преобразованное данное, будетъ обыкновеннымъ дифференціальнымъ уравненіемъ, котораго общій интеграль можно будетъ представить въ видѣ

$$U = C,$$

гдѣ C есть произвольная постоянная и U функція отъ x и отъ u , т. е. функція отъ x, y, z .

Предъидущій анализъ показываетъ, что необходимо и достаточно условнаго уравненія (8), для того, чтобы данное уравненіе допускало интеграль; оно даетъ сверхъ того средство опредѣлить этотъ интеграль, когда онъ существуетъ.

787. Случай, когда P, Q, R суть однородныя функціи одной степени. — Предположимъ, что условіе возможности интегрированія выполнено, и положимъ

$$x = x'z, \quad y = y'z, \\ P = P'z^n, \quad Q = Q'z^n, \quad R = R'z^n,$$

гдѣ P', Q', R' суть функціи отъ x' и y' . Данное уравненіе (1), раздѣленное на z^{n+1} , сдѣлается

$$(P'dx' + Q'dy') + (P'x' + Q'y' + R') \frac{dz}{z} = 0$$

или

$$\frac{dz}{z} + \frac{P'dx' + Q'dy'}{P'x' + Q'y' + R'} = 0;$$

второй членъ этого уравненія зависитъ только отъ переменныхъ x' , y' и онъ, въ силу условнаго уравненія, долженъ быть полнымъ дифференціаломъ.

Разсмотримъ, наприимѣръ, уравненіе

$$(y^2 + yz + z^2) dx + (x^2 + xz + z^2) dy + (x^2 + xy + y^2) dz = 0.$$

Здѣсь имѣемъ

$$P' = y'^2 + y' + 1, \quad Q' = x'^2 + x' + 1, \quad R' = x'y' + x' + y',$$

и данное уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$\frac{dz}{z} + \frac{(y'^2 + y' + 1) dx' + (x'^2 + x' + 1) dy'}{(x'y' + x' + y')(x' + y' + 1)} = 0.$$

Черезъ разложеніе на простыя дроби имѣемъ

$$\begin{aligned} \frac{y'^2 + y' + 1}{(x'y' + x' + y')(x' + y' + 1)} &= \frac{y' + 1}{x'y' + x' + y'} - \frac{1}{x' + y' + 1}, \\ \frac{x'^2 + x' + 1}{(x'y' + x' + y')(x' + y' + 1)} &= \frac{x' + 1}{x'y' + x' + y'} - \frac{1}{x' + y' + 1}, \end{aligned}$$

это же позволяетъ представить наше уравненіе въ такомъ видѣ:

$$\frac{dz}{z} + \frac{d(x'y' + x' + y')}{x'y' + x' + y'} - \frac{d(x' + y' + 1)}{x' + y' + 1} = 0.$$

Мы видимъ, что каждый членъ есть полный дифференціалъ; интегрированіе даетъ

$$\log z + \log(x'y' + x' + y') - \log(x' + y' + 1) \log \alpha,$$

гдѣ α есть произвольная постоянная, отсюда имѣемъ

$$z = \frac{\alpha(x' + y' + 1)}{x'y' + x' + y'}.$$

Подставивъ наконецъ $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ вмѣсто x' , y' , получимъ

$$xy + yz + zx = \alpha(x + y + z),$$

это же есть интегралъ даннаго уравненія.

**Определение общего интеграла уравнения съ частными производными
перваго порядка. — О полныхъ интегралахъ.**

788. Переменная x рассматривается какъ функція отъ n переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n , положимъ

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n.$$

Всякое уравненіе такое, какъ

$$F(x, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

есть уравненіе съ частными производными перваго порядка.

Если можемъ найти значеніе x , функцію отъ x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющее данному уравненію и обращающееся въ данную произвольную функцію ξ отъ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , когда даемъ x_n , определенное значеніе ξ_n , выбранное по произволу, то уравненіе, определяющее это значеніе x , будетъ называться *общимъ интеграломъ* даннаго уравненія.

Данное уравненіе и тѣ, которыя получаются изъ него посредствомъ послѣдовательныхъ дифференцированій, определяютъ значенія x и его производныхъ различныхъ порядковъ, относительно x_n , въ функціи x, x_1, x_2, \dots, x_n и производныхъ x относительно x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Не трудно заключить отсюда, что общій интеграль, если только онъ существуетъ, единственный.

Существованіе интеграла было доказано прежде относительно уравненій линейныхъ относительно производныхъ, и оно будетъ вообще доказано для всѣхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, посредствомъ того же самаго способа, который будетъ служить для его отысканія.

789. Лагранжъ назвалъ *полнымъ интеграломъ* уравненія съ частными производными перваго порядка, съ n независимыми переменными, всякое уравненіе между $n+1$ переменными, удовлетворяющее уравненію съ частными производными и содержащее n произвольныхъ постоянныхъ.

Пусть будетъ

$$(1) \quad F(x, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$$

уравненіе съ частными производными перваго порядка, съ n независимыми переменными x_1, x_2, \dots, x_n , и

$$(2) \quad f(x, x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

полный интегралъ уравненія (1). Если продифференцируемъ послѣдовательно этотъ интегралъ относительно каждой независимой переменнѣй, то будемъ имѣть

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Уравненіе (1) должно сдѣлаться тождествомъ, когда замѣнимъ въ немъ x и p_1, p_2, \dots, p_n значеніями, полученными изъ уравненій (2) и (3); поэтому мы должны воспроизвести уравненіе (1), когда исключимъ n произвольныхъ a_1, a_2, \dots, a_n изъ уравненій (2) и (3).

Такъ какъ общій интегралъ уравненія (1) содержитъ произвольную функцію отъ $n - 1$ переменныхъ, то очевидно, что изъ него можно получить безконечное число полныхъ интеграловъ. Но замѣчательно то, что, и обратно, изъ полного интеграла мы можемъ получить рѣшеніе, содержащее произвольную функцію отъ $n - 1$ переменныхъ, которая вообще тождественна съ общимъ интеграломъ.

Для доказательства этого важнаго предложенія станемъ разсматривать произвольную постоянную уравненія (2) a_n , какъ произвольную функцію $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ отъ $n - 1$ другихъ произвольныхъ. Уравненіе (2), удовлетворяющее уравненію (1), въ предположеніи постоянныхъ произвольныхъ, не перестанетъ удовлетворять ему, если предположимъ произвольныя переменными, если только уравненія (3) существуютъ въ этомъ послѣднемъ предположеніи.

Возьмемъ полный дифференціалъ уравненія (2), разсматривая произвольныя какъ переменныя, но предполагая, что a_n замѣнено значеніемъ

$$(4) \quad a_n = \varphi(a_1, a_2, \dots, a_{n-1});$$

напишемъ также $p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n$ вмѣсто dx ; получимъ

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx_n \\ & + \frac{\partial f}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} da_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} da_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что мы получимъ уравненія (3) изъ предыдущаго, если произвольныя a_1, a_2, \dots, a_{n-1} будутъ опредѣлены уравненіями

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial a_{n-1}} = 0.$$

Если бы мы могли исключить a_1, a_2, \dots, a_{n-1} изъ уравненій (2) и (5), то получили бы уравненіе, содержащее произвольную функцію отъ $n - 1$ количествъ и удовлетворяющую данному уравненію; такое уравненіе не можетъ отличаться отъ общаго интеграла. Но исключеніе, о которомъ мы только что говорили, невозможно, по причинѣ произвольной функціи φ , входящей въ уравненіе (2), и которой частныя производныя входятъ въ уравненія (5); поэтому нужно сохранить систему уравненій (2) и (5), опредѣляющую достаточно общій интеграль.

Нужно замѣтить, что каждому полному интегралу даннаго уравненія отвѣчаетъ опредѣленнаго вида общій интеграль и что, относительно этого вида, полный интеграль играетъ роль особаго рѣшенія. Мы видимъ, наконецъ, что всякое уравненіе съ частными производными перваго порядка происходитъ отъ исключенія произвольной функціи по способу, изложенному въ § 87; это предполагаетъ однако, что существованіе общаго интеграла доказано.

790. Предыдущія замѣчанія прилагаются ко всѣмъ уравненіямъ съ частными производными перваго порядка. Но мы видѣли въ § 778, что, въ случаѣ уравненій, линейныхъ относительно производныхъ, общій интеграль можетъ быть представленъ въ частной формѣ, которая годится только для этого рода уравненій; этотъ интеграль долженъ быть тождественъ тому, который получается изъ полнаго интеграла. Мы пояснимъ это сейчасъ примѣромъ.

Разсмотримъ уравненіе

$$z = px + qy,$$

линейное относительно производныхъ; z есть неизвѣстная функція переменныхъ x, y , и мы сдѣлаемъ, какъ обыкновенно,

$$dz = p dx + q dy.$$

Мы удовлетворимъ данному уравненію, если положимъ

$$z = ax + by,$$

гдѣ a и b суть постоянныя, такъ какъ отсюда имѣемъ $p = a$, $q = b$. Предъидущее уравненіе поэтому есть полный интегралъ даннаго уравненія. Для полученія общаго интеграла, нужно, по методу § 789, замѣнить b произвольной функціей $\varphi(a)$ отъ a и исключить a изъ двухъ уравненій

$$z = ax + y\varphi(a), \quad 0 = x + y\varphi'(a),$$

изъ которыхъ второе получается отъ дифференцированія перваго относительно a . На основаніи этого втораго уравненія, $\varphi'(a)$ равно $-\frac{x}{y}$; поэтому a и $\varphi(a)$ суть функціи отъ $\frac{y}{x}$, и первое изъ нашихъ двухъ уравненій показываетъ, что

$$\frac{z}{x} = \psi\left(\frac{y}{x}\right);$$

ничто не опредѣляетъ функцію ψ , и мы снова находимъ по этому способу интегралъ, къ которому приводитъ методъ § 778.

Интегрированіе уравненій съ частными производными перваго порядка, въ случаѣ двухъ независимыхъ переменныхъ.

791. Задача, составляющая интегрированіе уравненій съ частными производными, теперь вполнѣ рѣшена для того случая, который принадлежитъ уравненіямъ перваго порядка, т. е. что такое уравненіе можетъ быть всегда приведено, какое бы ни было число независимыхъ переменныхъ, къ интегрированію системы совмѣстныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Между способами, достигающими этой цѣли, нужно однако отличить способы Якоби и Коши; я возьму здѣсь за исходный пунктъ анализъ Коши, но въ то же время я представлю здѣсь нѣкоторыя подробности, относящіяся къ затрудненію, сопряженному съ этимъ анализомъ.

792. Мы рассмотрим сначала случай двухъ независи-
мыхъ переменныхъ. Пусть будетъ

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

данное уравненіе, въ которомъ z означаетъ неизвѣстную
функцію двухъ независимыхъ переменныхъ x, y , и въ кото-
ромъ p, q представляютъ соотвѣтственно частныя производныя
 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Надлежитъ найти значеніе z , удовлетворяющее уравне-
нію (1) для всѣхъ значеній x и y и обращающееся для
даннаго значенія x_0 переменной x въ данную произвольную
функцію $f(y)$ отъ y . Такимъ образомъ мы должны имѣть
одновременно

$$x = x_0, \quad z = f(y), \quad q = \frac{df(y)}{dy} = f'(y);$$

данная задача вполне опредѣляется этими равенствами.

Введемъ, согласно Коши, функцію, теперь неопредѣленную,
 y_0 отъ x и y ; можно будетъ разсматривать y какъ функцію
отъ x и y_0 , и тогда z, p, q будутъ также функціи тѣхъ
же переменныхъ. Поэтому будемъ имѣть

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial y_0} dy_0,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y_0} dy_0;$$

если же внесемъ эти значенія dz и dy въ уравненіе

$$dz = p dx + q dy,$$

опредѣляющее p и q , то получимъ

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y_0} dy_0 = p dx + q \left(\frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial y_0} dy_0 \right).$$

Такъ какъ это уравненіе имѣетъ мѣсто для какихъ угодно
дифференціаловъ dx и dy_0 , то имѣемъ

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = p + q \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial y_0} = q \frac{\partial y}{\partial y_0}.$$

Если возьмемъ дифференціалы уравненія (2) относительно y_0 и уравненія (3) относительно x , потомъ вычтемъ одинъ изъ другаго полученные результаты, то получимъ

$$(4) \quad \frac{\partial p}{\partial y_0} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial q}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Теперь означимъ черезъ

$$dF = Xdx + Ydy + Zdz + Pdp + Qdq$$

полный дифференціалъ первой части уравненія (1); взявъ дифференціалъ этого уравненія (1) относительно y_0 , будемъ имѣть

$$(5) \quad Y \frac{\partial y}{\partial y_0} + Z \frac{\partial z}{\partial y_0} + P \frac{\partial p}{\partial y_0} + Q \frac{\partial q}{\partial y_0} = 0,$$

если же внесемъ въ уравненіе (5) значенія $\frac{\partial z}{\partial y_0}$ и $\frac{\partial p}{\partial y_0}$, полученные изъ уравненій (3) и (4), то получимъ

$$(6) \quad \left(Y + Zq + P \frac{\partial q}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial y_0} + \left(Q - P \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial q}{\partial y_0} = 0.$$

Но функція отъ x и отъ y , которая означается черезъ y и которую мы ввели, до сихъ поръ не опредѣлена; мы ее такъ выберемъ, чтобы имѣли

$$(7) \quad P \frac{\partial y}{\partial x} - Q = 0,$$

и мы подчинимъ ее, сверхъ того, тому условію, чтобы она обращалась въ y_0 для $x=x_0$. Такимъ образомъ будемъ имѣть одновременно

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad q = q_0, \quad p = p_0,$$

гдѣ для краткости сдѣлано

$$z_0 = f(y_0), \quad q_0 = f'(y_0),$$

и гдѣ p_0 опредѣлено изъ уравненія

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$$

которое есть ничто иное, какъ уравненіе (1), въ которомъ x , y , z , p , q соотвѣтственно замѣнены черезъ x_0 , y_0 , z_0 , p_0 , q_0 .

Уравненіе (7) приводитъ уравненіе (6) къ

$$(8) \quad Y + Zq + P \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

слѣдовательно, данная задача приводится къ нахожденію четырехъ функцій y, z, p, q двухъ независимыхъ переменныхъ x и y_0 , которыя удовлетворяютъ вообще пяти уравненіямъ (1), (2), (3), (7) и (8), и которыя для $x = x_0$ приводятся соотвѣтственно къ y_0, z_0, p_0, q_0 ; мы не говоримъ объ уравненіи (4), потому что оно вытекаетъ, какъ мы видѣли, изъ уравненій (2) и (3).

793. Но уравненій (1), (2), (7), (8) вполне достаточно, какъ мы увидимъ далѣе, для опредѣленія неизвѣстныхъ y, z, p, q ; поэтому уравненіе (3) есть лишнее, и нужно, чтобы оно само собою удовлетворялось. Вотъ какъ Коши доказалъ эту важную теорему.

Предположимъ, что изъ уравненій (1), (2), (7), (8) мы получили для y, z, p, q опредѣленные значенія въ функціи отъ x и отъ y_0 , приводящіяся соотвѣтственно для $x = x_0$ къ y_0, z_0, p_0, q_0 ; обѣ части уравненія (3) будутъ также опредѣленные функціи отъ x и отъ y_0 , и, означивъ черезъ T ихъ разность, будемъ имѣть

$$(9) \quad \frac{\partial z}{\partial y_0} = q \frac{\partial y}{\partial y_0} + T.$$

Если возьмемъ дифференціалъ этого уравненія относительно x , и если потомъ вычтемъ уравненіе (2), продифференцированное предварительно относительно y_0 , то вмѣсто уравненія (4) будемъ имѣть

$$(10) \quad \frac{\partial p}{\partial y_0} = \left(\frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial q}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial x},$$

далѣе, внеся въ уравненіе (5) значенія $\frac{\partial z}{\partial y_0}$ и $\frac{\partial p}{\partial y_0}$, полученные изъ уравненій (9) и (10), найдемъ

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(Y + Zq + P \frac{\partial q}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial y_0} + \left(Q - P \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial q}{\partial y_0} \\ & + P \frac{\partial T}{\partial x} + ZT = 0; \end{aligned} \right.$$

Наконецъ, по причинѣ уравненій (7) и (8), это уравненіе приводится къ

$$P \frac{\partial T}{\partial x} + ZT = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{Z}{P}.$$

Количество $-\frac{Z}{P}$ выражается въ функціи x и y_0 ; если интеграль $-\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx$ имѣетъ конечное и опредѣленное значеніе, то изъ предъидущаго уравненія найдемъ

$$(12) \quad \log \frac{T}{T_0} = -\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx, \quad T = T_0 e^{-\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx},$$

гдѣ T_0 означаетъ значеніе, принимаемое T для $x = x_0$. Но такъ какъ предположеніе $x = x_0$ приводитъ $\frac{\partial z}{\partial y_0}$ къ q_0 и $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ къ 1, то уравненіе (9) показываетъ, что $T_0 = 0$, и слѣдовательно, на основаніи уравненія (12), вообще будемъ имѣть

$$T = 0.$$

Мы разберемъ далѣе единственный случай, въ которомъ интеграль $\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx$ перестаетъ имѣть конечное и опредѣленное значеніе.

794. На основаніи предшествовавшаго, мы рассматривали только уравненія (1), (2), (7) и (8). Можно даже, если угодно, замѣнить уравненіе (1) его производной относительно x ; эта производная на самомъ дѣлѣ не имѣетъ болѣе общности, чѣмъ уравненіе (1), потому что значенія y , z , p , q должны для $x = x_0$ приводиться къ y_0 , z_0 , p_0 , q_0 . Искомая производная есть

$$X + Y \frac{\partial y}{\partial x} + Z \frac{\partial z}{\partial x} + P \frac{\partial p}{\partial x} + Q \frac{\partial q}{\partial x} = 0;$$

если замѣнимъ въ ней $\frac{\partial z}{\partial x}$, Q и Y значеніями, полученными изъ уравненій (2), (7) и (8), то она приведется къ

$$(13) \quad X + Zp + P \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Задача, которой мы занимаемся, приводится поэтому къ нахожденію, посредствомъ четырехъ изъ уравненій (1), (2), (7), (8), (13), значеній y , z , p , q въ функціяхъ x и y_0 , приводящихся для $x = x_0$ соответственно къ y_0 , z_0 , p_0 , q_0 .

Уравненія (2), (7), (8), (13) образуютъ дѣйствительно систему четырехъ совмѣстныхъ уравненій съ частными производными; но такъ какъ эти уравненія не содержатъ независимой переменнѣй y_0 , то они должны быть разсматриваемы, какъ обыкновенныя дифференціальныя уравненія; они заключаются въ слѣдующей формулѣ

$$(14) \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Rr + Qq} = \frac{-dp}{X + Zp} = \frac{-dq}{Y + Zq},$$

одно же изъ нихъ, мы должны повторить, можетъ быть замѣнено уравненіемъ (1).

Если первая часть уравненія (1) есть линейная функція относительно производныхъ p и q , то, такъ какъ ея дифференціалъ, взятый относительно p и q , есть $Pdp + Qdq$, P и Q будутъ независимы отъ p и q и F будетъ имѣть видъ $Pp + Qq - R$, гдѣ R , какъ P и Q , функція отъ x , y , z . Въ этомъ случаѣ два первыхъ уравненія, содержащихся въ формулѣ (14), именно

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

позволяютъ безъ помощи другихъ опредѣлить значенія y , z въ функціи x и y_0 . Такимъ образомъ уравненія, линейныя относительно производныхъ, приведены къ правилу § 774.

795. Предположимъ, вообще, что значенія y , z , p , q , опредѣленные изъ уравненій (14), приводятся для $x = x_0$ къ y_0 , z_0 , p_0 , q_0 ; пусть будутъ

$$(15) \quad \begin{cases} y = f_1(x, y_0, z_0, q_0), \\ z = f_2(x, y_0, z_0, q_0), \\ p = f_3(x, y_0, z_0, q_0), \\ q = f_4(x, y_0, z_0, q_0) \end{cases}$$

Эти значенія; мы не пишемъ буквы p_0 въ этихъ выраженіяхъ, потому что можно всегда предположить, что она замѣнена ея значеніемъ, полученнымъ изъ уравненія $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$;

что же касается x_0 , то это есть численное определенное значение, которым мы здѣсь не занимаемся.

Два первыя уравненія (15) дадутъ рѣшеніе данной задачи, если замѣнимъ въ нихъ z_0 черезъ $f(y_0)$ и q_0 черезъ $f'(y_0)$. Если дадимъ функціи $f(y_0)$ определенный видъ и если мы будемъ въ состояніи исключить y_0 изъ двухъ уравненій, о которыхъ мы говоримъ, то будемъ имѣть выраженіе неизвестной функціи z въ x и y . Но если функція $f(y_0)$ или z_0 остается неопределенной, то исключеніе y_0 будетъ невозможно, развѣ только въ томъ случаѣ, когда значенія y и z будутъ то и другое независимы отъ q_0 ; въ этомъ случаѣ, если рѣшимъ два первыя уравненія (15) относительно y_0 и z_0 , получимъ выраженія вида

$$y_0 = \psi(x, y, z), \quad z_0 = \varphi(x, y, z),$$

и рѣшеніе задачи будетъ дано уравненіемъ

$$\varphi = f(\psi),$$

откуда заключаемъ, какъ извѣстно, что данное уравненіе (1) есть необходимо линейное относительно-производныхъ p и q .

Если исключить случай линейнаго уравненія, то никакое изъ выраженій y и z не можетъ быть независимымъ отъ q_0 . Въ самомъ дѣлѣ, внесемъ въ уравненіе (3) значенія y, z, q , полученные изъ уравненій (15); будемъ имѣть

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial y_0} + \frac{\partial f_2}{\partial z_0} q_0 + \frac{\partial f_2}{\partial q_0} \frac{\partial q_0}{\partial y_0} \right) - f_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_0} + \frac{\partial f_1}{\partial z_0} q_0 + \frac{\partial f_1}{\partial q_0} \frac{\partial q_0}{\partial y_0} \right) = 0;$$

это уравненіе должно быть тождествомъ и, слѣдовательно, члены, умноженные на $\frac{\partial q_0}{\partial y_0}$, должны уничтожаться. Поэтому еще тождественно имѣемъ

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_0} - f_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_0} = 0;$$

множитель $f_1 = q$ вообще не можетъ быть нулемъ, отсюда слѣдуетъ, что если одно изъ количествъ $\frac{\partial f_1}{\partial q_0}, \frac{\partial f_2}{\partial q_0}$ тождественно есть нуль, другое также должно быть нуль; поэтому обѣ функціи f_1 и f_2 зависятъ отъ q_0 или

онѣ не зависятъ отъ этого количества: этотъ послѣдній случай можетъ имѣть мѣсто, какъ мы видѣли, только тогда, когда данное уравненіе есть линейное относительно производныхъ p и q .

Теперь, если исключимъ q_0 изъ двухъ первыхъ уравненій (15), то получимъ уравненіе, которое будетъ въ состояніи замѣнить второе изъ нихъ и которое я означу черезъ

$$(16) \quad V(x, y, z, y_0, z_0) = 0 \text{ или } V = 0.$$

Если возьмемъ полный дифференціалъ этого уравненія и если замѣнимъ въ немъ dz_0 черезъ $q_0 dy_0$, dz черезъ $p dx + q dy$, то получимъ

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z}\right) dy + \left(\frac{\partial V}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial V}{\partial z_0}\right) dy_0 = 0;$$

но первое уравненіе (15) даетъ

$$dy = \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_0} + \frac{\partial f_1}{\partial z_0} q_0 + \frac{\partial f_1}{\partial q_0} \frac{\partial q_0}{\partial y_0}\right) dy_0,$$

если внесемъ это значеніе dy въ предъидущее уравненіе, то въ немъ останутся только два независимые дифференціала dx и dy_0 ; приравняемъ поэтому коэффициенты при нихъ нулю, получаемъ

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z}\right) \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 0, \\ \left(\frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_0} + \frac{\partial f_1}{\partial z_0} q_0 + \frac{\partial f_1}{\partial q_0} \frac{\partial q_0}{\partial y_0}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial V}{\partial z_0}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравненія должны сдѣлаться тождествами, когда замѣнимъ въ нихъ y, z, p, q значеніями, полученными изъ формулъ (15). Но эти формулы не содержатъ произвольнаго количества $\frac{\partial q_0}{\partial y_0}$; поэтому необходимо, чтобы это послѣднее количество исчезло изъ послѣдняго уравненія. Такъ какъ мы исключили тотъ случай, когда данное уравненіе (1) есть линейное, то производная $\frac{\partial f_1}{\partial q_0}$ не можетъ быть нулемъ; поэтому нужно, чтобы уничтожилось $\frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z}$ и слѣдовательно, изъ предъидущихъ уравненій одновременно имѣемъ

$$(17) \quad \frac{\partial V}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial V}{\partial z_0} = 0$$

и

$$(18) \quad \frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Такимъ образомъ четыре уравненія (16), (17) и (18) дѣлаются тождественными въ силу уравненій (15); они опредѣляютъ сверхъ того значенія y , z , p , q и, слѣдовательно, они могутъ замѣнить уравненія (15).

Въ частности, если замѣнимъ z_0 въ V черезъ (yf_0) , то искомый интеграль уравненія (1) будетъ результатъ исключенія y_0 изъ двухъ уравненій

$$(19) \quad V = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y_0} \right) = 0,$$

гдѣ $\left(\frac{\partial V}{\partial y_0} \right)$ означаетъ производную отъ V , взятую относительно y_0 , но рассматривая при этомъ z_0 , какъ функцію отъ y_0 . Поэтому, для полученія этого интеграла достаточно знать функцію V , и мы его получимъ, исключивъ p , q , p_0 , q_0 изъ четырехъ интеграловъ уравненій (14) и уравненія $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$.

796. Мы должны замѣтить, что уравненіе

$$V = 0$$

составляетъ полный интеграль даннаго уравненія (1), если только y_0 и z_0 рассматриваемъ, какъ двѣ произвольныя постоянныя.

Въ самомъ дѣлѣ, въ общемъ рѣшеніи, только-что нами изложенномъ, мы снова получили уравненіе (1), исключивъ y_0 и z_0 изъ уравненій (16) и (18). Но если вмѣсто того, чтобы рассматривать y_0 и z_0 какъ переменныя, способныя удовлетворять уравненію (17), мы станемъ рассматривать эти количества какъ постоянныя, то ясно, что уравненія (18) будутъ существовать и, черезъ исключеніе y_0 и z_0 , будутъ давать съ уравненіемъ (16) уравненіе (1). Это уравненіе (16), содержащее такимъ образомъ двѣ произвольныя постоянныя, поэтому есть полный интеграль уравненія (1).

797. Примѣръ. — Чтобы дать приложеніе предыдущей теоріи, рассмотримъ уравненіе

$$z - apq = 0,$$

гдѣ a означаетъ постоянную. Здѣсь имѣемъ

$$\begin{aligned} X &= 0, & Y &= 0, & Z &= 1, \\ P &= -aq, & Q &= -ap, & Pr + Qq &= -2apq = -2z, \end{aligned}$$

и совмѣстныя уравненія къ интегрированію здѣсь суть

$$\frac{dx}{aq} = \frac{dy}{ap} = \frac{dz}{2z} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q},$$

мы непосредственно находимъ четыре слѣдующихъ интеграла

$$\frac{p}{p_0} = \frac{q}{q_0} = \frac{Vz}{Vz_0}, \quad \frac{x - x_0}{aq_0} = \frac{y - y_0}{ap_0} = \frac{Vz - Vz_0}{Vz_0},$$

исключимъ потомъ p_0 и q_0 изъ двухъ послѣднихъ, употребивъ при этомъ уравненіе $z_0 - ap_0q_0 = 0$; имѣемъ

$$\frac{(Vz - Vz_0)^2}{z_0} = \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{a^2 p_0 q_0} = \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{az_0}.$$

Если поэтому сдѣлаемъ

$$V = a [Vz - Vz_0]^2 - (x - x_0)(y - y_0),$$

то общій интеграль уравненія $z = apq$ будетъ результатъ исключенія y_0 изъ уравненій

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y_0} = 0.$$

798. Методъ, изложенный только-что нами, предполагаетъ, что интеграль $\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx$ сохраняетъ конечное и определенное значеніе; мы сейчасъ займемся этимъ интеграломъ.

Предположимъ, для краткости, что уравненіе (16) рѣшено относительно z и что мы получили значеніе $z = M$, гдѣ M есть данная функція отъ x, y, y_0, z_0 . Уравненія (16) и (17), дающія искомое рѣшеніе (1), будутъ болѣе просто

$$(20) \quad z = M,$$

$$(21) \quad \frac{\partial M}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial M}{\partial z_0} = 0,$$

и уравненія (18), опредѣляющія значенія p и q , будутъ

$$(22) \quad p = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Чтобы снова получить данное уравненіе (1), нужно исключить y_0 и z_0 изъ уравненій (20) и (22); слѣдовательно, полный дифференціалъ dF первой части этого уравненія получится, если сложимъ полные дифференціалы функцій $M - z$, $\frac{\partial M}{\partial x} - p$, $\frac{\partial M}{\partial y} - q$, соотвѣтственно умноженные на множители λ , μ , ν , способные уничтожить дифференціалы dy_0 и dz_0 , которые должны быть рассматриваемы какъ независимые; поэтому будемъ имѣть

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} dF &= \left(\lambda \frac{\partial M}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} \right) dx \\ &+ \left(\lambda \frac{\partial M}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) dy - \lambda dz - \mu dp - \nu dq, \end{aligned} \right.$$

и множители λ , μ , ν должны удовлетворять двумъ слѣдующимъ уравненіямъ:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda \frac{\partial M}{\partial y_0} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y_0} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0} &= 0, \\ \lambda \frac{\partial M}{\partial z_0} + \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0} + \nu \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Изъ уравненія (23) находимъ

$$-\frac{Z}{P} = -\frac{\lambda}{\mu},$$

по причинѣ же уравненій (24), имѣемъ

$$-\frac{Z}{P} = \frac{\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} - \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0}}{\frac{\partial M}{\partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0}}.$$

Чтобы получить искомый интегралъ, нужно въ этомъ выраженіи замѣнить y его значеніемъ, полученнымъ изъ

уравненія (21), умножить потомъ его на dx и интегрировать между предѣлами x_0 и x ; но можно избѣгнуть исключенія y , поступивъ слѣдующимъ образомъ. Если къ числителю предъидущаго выраженія $-\frac{Z}{P}$ приложимъ, а потомъ вычтемъ количество

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y_0}\right) \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0} - \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0}}{\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}\right) \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} - \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0}},$$

то получимъ

$$-\frac{Z}{P} dx = \frac{\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0} \left(\frac{\partial M}{\partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0} \right) dx + \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} \left(\frac{\partial M}{\partial z_0} \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y_0} - \frac{\partial M}{\partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0} \right) dx}{\frac{\partial M}{\partial z_0} \left(\frac{\partial M}{\partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0} \right)}$$

но если возьмемъ дифференціалъ уравненія (21), представленнаго въ видѣ

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y_0}\right)}{\left(\frac{\partial M}{\partial z_0}\right)} + q_0 = 0,$$

въ предположеніи только однѣхъ переменныхъ x и y , то найдемъ

$$\left(\frac{\partial M}{\partial z_0} \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y_0} - \frac{\partial M}{\partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0} \right) dx = \left(\frac{\partial M}{\partial y_0} \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z_0} - \frac{\partial M}{\partial z_0} \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial y_0} \right) dy,$$

это же приводитъ предъидущее выраженіе $-\frac{Z}{P} dx$ къ

$$-\frac{Z}{P} dx = \frac{\partial \log \frac{\partial M}{\partial z_0}}{\partial x} dx + \frac{\partial \log \frac{\partial M}{\partial z_0}}{\partial y} dy = d \log \frac{\partial M}{\partial z_0}.$$

Такъ какъ функція M должна для $x = x_0$ и $y = y_0$ обратиться въ z_0 , то изъ этого слѣдуетъ, что, въ томъ же предположеніи, $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ обращается въ единицу. Поэтому, взявъ интеграль предъидущаго уравненія между предѣлами x_0 и x , получимъ

$$(25) \quad - \int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx = \log \frac{\partial M}{\partial z_0}.$$

799. Анализ § 793 дѣлается невѣрнымъ, когда интегралъ $\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx$ перестаетъ имѣть конечное и опредѣленное значеніе. Какъ замѣтилъ Бертранъ, это обстоятельство представляется не только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, но въ случаѣ болѣе общемъ. И въ самомъ дѣлѣ, достаточно дать функціи $f(y)$ или $f(y_0)$ или z_0 приличный видъ, чтобы интегралъ, о которомъ идетъ рѣчь, сдѣлался безконечною. Но я говорю, что:

Если для частнаго вида функціи $f(y)$ интегралъ $\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx$ перестаетъ имѣть конечное и опредѣленное значеніе, то выведенныя нами формулы дѣлаются неопредѣленными и онѣ неспособны дать рѣшеніе данной задачи. Это рѣшеніе дается, въ этомъ случаѣ, полнымъ интеграломъ Лагранжа, отвѣчающимъ общему интегралу.

Въ самомъ дѣлѣ, мы видимъ изъ уравненія (25), что если интегралъ $\int_{-x_0}^x \frac{Z}{P} dx$ перестаетъ имѣть конечное и опредѣленное значеніе для нѣкотораго вида функціи $f(y)$, то частная производная $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ дѣлается нулемъ, безконечною или неопредѣленною послѣ внесенія значенія y , полученнаго изъ уравненія (21). Но тогда очевидно, что мы не можемъ получить изъ этого уравненія (21) опредѣленнаго значенія y , приводящагося для $x = x_0$ къ y_0 , потому что двойное предположеніе $x = x_0$, $y = y_0$ должно приводить $\frac{\partial M}{\partial z_0}$ къ единицѣ. Изъ того, что невозможно получить изъ уравненія (21) опредѣленнаго значенія для y , приводящагося для $x = x_0$ къ y_0 , мы должны заключить, что предположеніе $x = x_0$ уничтожаетъ y въ первой части этого уравненія, а такъ какъ это уравненіе удовлетворяется, когда дѣлаемъ сразу $x = x_0$, $y = y_0$, то очевидно, что оно удовлетворяется тождественно, какое бы ни было y , когда дѣлаемъ $x = x_0$. Отсюда слѣдуетъ, что y_0 уничтожается въ уравненіи (20), когда сдѣлаемъ $x = x_0$, потому что производная второй части

относительно y_0 тождественно равна нулю; это уравнение, въ предположеніи $x = x_0$, поэтому дастъ

$$z = f(y),$$

ибо мы знаемъ, что оно тождественно имѣетъ мѣсто, когда дѣлаемъ $y = y_0$, $z = z_0$ и что $z_0 = f(y_0)$. Заключаемъ поэтому, что въ частномъ случаѣ, которымъ мы занимаемся, рѣшеніе данной задачи будетъ даваться не системой уравненій (20) и (21), но только однимъ уравненіемъ (20).

800. Мы пояснимъ предъидущее примѣромъ. Пусть будетъ уравненіе

$$F = rz - rqu - aq = 0,$$

гдѣ a означаетъ данную постоянную. Здѣсь имѣемъ

$$X = 0, \quad Y = -rq, \quad Z = r,$$

$$P = z - qu = \frac{aq}{r}, \quad Q = -ry - a = -\frac{rz}{q};$$

совмѣстныя уравненія къ интегрированію суть

$$\frac{-r dx}{aq} = \frac{q dy}{rz} = \frac{dz}{rqu} = \frac{dr}{r^2} = \frac{dq}{0},$$

и мы безъ труда находимъ

$$q = q_0, \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2} + \frac{2(x - x_0)}{aq_0},$$

$$\frac{z}{r} = \frac{z_0}{r_0} + (x - x_0), \quad \frac{y}{r} = \frac{y_0}{r_0} - \frac{x - x_0}{q_0},$$

откуда, замѣнивъ r_0 его значеніемъ $\frac{aq_0}{z_0 - q_0 y_0}$, имѣемъ

$$y = \frac{y_0(z_0 - q_0 y_0) - a(x - x_0)}{V(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)},$$

$$z = \frac{z_0(z_0 - q_0 y_0) + aq_0(x - x_0)}{V(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)},$$

$$r = \frac{aq_0}{V(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)},$$

$$q = q_0;$$

такія значенія въ функціи x , y_0 , z_0 , q_0 имѣютъ y , z , r , q .
Потомъ имѣемъ

$$-\frac{Z}{P} = -\frac{p^2}{aq} = -\frac{aq_0}{(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}$$

и

$$-\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx = \log \frac{z_0 - q_0 y_0}{V(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}.$$

Мы видимъ, что интеграль $\int_{x_0}^x \frac{Z}{P} dx$ дѣлается безконечностію, если имѣемъ

$$z_0 - q_0 y_0 = 0 \text{ или } \frac{dz_0}{dy_0} = \frac{z_0}{y_0};$$

въ этомъ случаѣ значеніе z_0 есть

$$z_0 = \alpha y_0, \text{ откуда } q_0 = \alpha,$$

гдѣ α означаетъ произвольную постоянную. Но если предположимъ, что z_0 имѣетъ это значеніе, то наши формулы сдѣлаются неопредѣленными, потому что онѣ даютъ для y и для z значенія

$$y = -\sqrt{\frac{a}{2\alpha}(x - x_0)}, \quad z = \sqrt{\frac{a\alpha}{2}(x - x_0)},$$

которыя не зависятъ отъ y_0 .

Исключимъ q_0 изъ двухъ уравненій, опредѣляющихъ значенія y и z . Изъ этихъ уравненій имѣемъ

$$\begin{aligned} z + q_0 y &= \frac{z_0^2 - q_0^2 y_0^2}{V(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0)}, \\ z - q_0 y &= V(z_0 - q_0 y_0)^2 + 2aq_0(x - x_0), \end{aligned}$$

перемноживъ же эти уравненія, получимъ

$$z^2 - z_0^2 = q_0^2 (y^2 - y_0^2);$$

возвысивъ въ квадратъ второе уравненіе и упростивъ его только-что полученнымъ, найдемъ

$$q_0 (y^2 - y_0^2) = (yz - y_0 z_0) + a(x - x_0).$$

Исключеніе q_0 изъ двухъ послѣднихъ уравненій производится непосредственно; находимъ

$$(y^2 - y_0^2)(z^2 - z_0^2) - [(yz - y_0 z_0) + a(x - x_0)]^2 = 0$$

или

$$z^2 - 2 \left[z_0 - \frac{a(x - x_0)}{y_0} \right] \frac{y}{y_0} z + \frac{y^2}{y_0^2} z_0^2 - \frac{2a(x - x_0)}{y_0} z_0 + \frac{a^2(x - x_0)^2}{y_0^2} = 0;$$

это есть то уравнение, которое мы вообще означили через $V = 0$; изъ него находимъ

$$z = \left[z_0 - \frac{a(x - x_0)}{y_0} \right] \frac{y}{y_0} + \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right) \left(\frac{x - x_0}{y_0}\right) \left(2a z_0 - a^2 \frac{x - x_0}{y_0}\right)},$$

формулу, вторая часть которой есть количество, означенное через M . Нетрудно видѣть, что уравнение

$$\frac{\partial M}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial M}{\partial z_0} = 0$$

дастъ значеніе y , полученное прежде; подставивъ это значеніе въ выраженіе $\frac{\partial M}{\partial z_0}$, находимъ.

$$\frac{\partial M}{\partial z_0} = \frac{z_0 - q_0 y_0}{V(z_0 + q_0 y_0)^2 + 2a q_0 (x - x_0)},$$

это же согласуется съ общими результатами, выведенными изъ нашей теоріи.

Если въ уравненіи $z = M$ сдѣлаемъ $z_0 = \alpha y_0$, то получимъ

$$z = \left[\alpha - \frac{a(x - x_0)}{y_0^2} \right] y + \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right) \left(\frac{x - x_0}{y_0}\right) \left(2\alpha y_0 - a^2 \frac{x - x_0}{y_0}\right)}$$

это значеніе z удовлетворяетъ данному уравненію, когда рассматриваемъ α и y_0 какъ произвольныя постоянныя; сверхъ того, оно приводится для $x = x_0$ къ

$$z = \alpha y;$$

поэтому оно, вполнѣ даетъ рѣшеніе данной задачи въ томъ случаѣ, когда предполагаемъ функцію $f(y)$ равною αy .

Распространеніе предъидущаго метода на случай какого угодно числа независимыхъ переменныхъ.

801. Предъидущій методъ прилагается къ какому угодно

числу переменныхъ; это мы сейчасъ изложимъ здѣсь кратко, не входя въ подробности.

Означимъ черезъ x_1, x_2, \dots, x_n n независимыхъ переменныхъ, черезъ x главную переменную; положимъ, сверхъ того,

$$(1) \quad dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n,$$

и рассмотримъ уравненія съ частными производными

$$(2) \quad F(x, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

въ которомъ первая часть есть данная функція отъ $2n+1$ переменныхъ

$$x, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n.$$

Неизвѣстная функція x не вполне опредѣляется тѣмъ условіемъ, что она удовлетворяетъ уравненію (2); но она вообще сдѣлается опредѣленной, если заставимъ ее обращаться въ данную функцію

$$\xi = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

отъ $n-1$ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , когда даемъ x_n частное значеніе ξ_n . Тогда, если положимъ

$$d\xi = \bar{\omega}_1 dx_1 + \bar{\omega}_2 dx_2 + \dots + \bar{\omega}_{n-1} dx_{n-1},$$

то должны будемъ имѣть для $x_n = \xi_n$ не только $x = \xi$, но еще

$$p_1 = \bar{\omega}_1, \quad p_2 = \bar{\omega}_2, \quad \dots, \quad p_{n-1} = \bar{\omega}_{n-1}.$$

Теперь означимъ черезъ

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$$

неопредѣленные функціи отъ

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n;$$

можно будетъ рассматривать обратно,

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$$

какъ функціи отъ

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, x_n.$$

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, & \dots, & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, & \dots, & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_2}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}}, & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_{n-1}}, & \dots, & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}}. \end{array}$$

не может быть нуль. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}} d\xi_{n-1}, \\ \dots, \\ dx_{n-1} &= \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \dots + \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}} d\xi_{n-1}, \end{aligned}$$

если бы детерминантъ D былъ нуль, то мы могли бы образовать черезъ исключеніе дифференціаловъ $d\xi_1, d\xi_2, \dots, d\xi_{n-1}$ одно или нѣсколько уравненій вида

$$M_1 dx_1 + M_2 dx_2 + \dots + M_n dx_n = 0,$$

это же можетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, когда существуетъ соотношеніе между переменными x_1, x_2, \dots, x_n . Эти же переменныя независимы, поэтому D не можетъ быть нулемъ, и уравненія (8) необходимо имѣютъ мѣсто.

На основаніи этого данная задача приводится къ нахожденію $2n$ функцій

$$x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, p_1, p_2, \dots, p_n$$

отъ n переменныхъ

$$x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1},$$

удовлетворяющихъ $3n - 1$ уравненіямъ (2), (3), (4), (7) (8), которыя для $x_n = \xi_n$ соотвѣтственно приводятся къ

$$\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_n.$$

802. Но достаточно $2n$ уравненій (2), (3), (7), (8) для опредѣленія $2n$ неизвѣстныхъ функцій; поэтому нужно, чтобы уравненія (4) сами собой удовлетворялись, и это мы можемъ доказать такъ, какъ въ § 793. Предположимъ по-

этому что мы вывели изъ уравненій (2), (3), (7), (8) значенія $x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, p_1, p_2, \dots, p_n$ функцій отъ $x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$, которыя для $x_n = \xi_n$ обращаются соотвѣтственно въ $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_n$. Означимъ черезъ T_1, T_2, \dots, T_n разности между обѣими частями соотвѣтствующихъ уравненій системы (4), такъ что имѣемъ

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_i} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \dots + p_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} + T_i.$$

Если возьмемъ дифференціалъ этого уравненія относительно x_n и если вычтемъ потомъ изъ него уравненіе (3), продифференцированное предварительно относительно ξ_i , то будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} &= \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \right) + \dots \\ &+ \left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} \right) + \frac{\partial T_i}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

Употребивъ предъидущія значенія $\frac{\partial x}{\partial \xi_i}$ и $\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i}$ вмѣсто тѣхъ, которыя даютъ уравненія (4) и (5), мы образуемъ уравненіе, которое будетъ только тѣмъ отличаться отъ уравненія (6), что его первая часть будетъ содержать новые члены

$$X T_i + P_n \frac{\partial T_i}{\partial x_n},$$

а такъ какъ всѣ остальные члены въ силу уравненій (7) и (8), уничтожаются, то будемъ имѣть

$$X T_i + P_n \frac{\partial T_i}{\partial x_n} = 0,$$

гдѣ индексъ i можетъ принимать $n - 1$ значеній $1, 2, \dots, (n - 1)$.

(Отсюда имѣемъ

$$- \int_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{P} dx_n$$

$$T_i = \Theta_i e$$

гдѣ Θ_i означаетъ значеніе, принимаемое T_i для $x_n = \xi_n$.

Мы непосредственно видимъ, что Θ_i есть нуль, и слѣдовательно также имѣемъ

$$T_i = 0,$$

если только интеграль $\int_{\xi_n}^{x_n} \frac{X}{p_n} dx_n$ сохраняетъ конечное и опредѣленное значеніе. Для разбора случаевъ, гдѣ интеграль, о которомъ идетъ рѣчь, дѣлается безконечнымъ или неопредѣленнымъ, я отсылаю читателя къ Мемуарамъ, о которыхъ я уже говорилъ *).

803. На основаніи предъидущаго, намъ достаточно разсмотримъ $2n$ уравненій (2), (3), (7) и (8). Можно даже уравненіе (1) замѣнить его дифференціаломъ относительно x_n , именно

$$\begin{aligned} X \frac{\partial x}{\partial x_n} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \dots + X_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + X_n \\ + P_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_n} + \dots + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x_n} = 0, \end{aligned}$$

потому что данная задача не содержитъ никакой неопредѣленности въ своемъ изложеніи. Замѣнивъ въ предъидущемъ уравненіи $\frac{\partial x}{\partial x_n}$ его значеніемъ, полученнымъ изъ уравненія (3), потомъ $\frac{\partial x_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}$ и $\frac{\partial p_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}$ значеніями, выведенными изъ уравненій (7) и (8), получимъ

$$(9) \quad X_n + X p_n + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x_n} = 0.$$

Мы приведены поэтому къ нахожденію, посредствомъ $2n$ уравненій (3), (7), (8) и (9), значеній $x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, p_1, p_2, \dots, p_n$, обращающихся для $x_n = \xi_n$ соотвѣственно въ $\xi, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_{n-1}$.

Уравненія, о которыхъ идетъ рѣчь, въ дѣйствительности съ частными производными; но такъ какъ они не со-

*) См. *Les Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, t. LIII, или *les Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure*, t. III.

по случаю, дать уравненіямъ (11), а я отсылаю для этого предмета къ поименованнымъ уже Мемуарамъ.

Замѣчаніе о частныхъ рѣшеніяхъ, которыя могутъ быть допущены уравненіями съ частными производными перваго порядка.

805. Не входя въ подробности, которыхъ не допускаютъ предѣлы настоящаго труда, мы должны замѣтить, что анализъ, только что нами употребленный, позволяетъ опредѣлить нѣкоторыя частныя рѣшенія уравненій съ частными производными перваго порядка.

Дѣйствительно, пусть будетъ $F = 0$ уравненіе съ частными производными, содержащее переменныя x_1, x_2, \dots, x_n , функцію x этихъ переменныхъ и ея производныя p_1, p_2, \dots, p_n ; пусть будетъ также $V = 0$ полный интегралъ этого уравненія, въ которое входятъ n произвольныхъ a_1, a_2, \dots, a_n .

Уравненіе $V = 0$ можетъ выражать какое угодно соотношеніе, когда рассматриваемъ произвольныя a_1, a_2, \dots, a_n какъ переменныя, поэтому очевидно, что оно дастъ всѣ рѣшенія уравненія съ частными производными, если только производныя a_1, a_2, \dots, a_n заставимъ удовлетворять уравненію

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2} da_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = 0.$$

Предположивъ дифференціалы da_1, da_2, \dots, da_n равными нулю, мы снова получимъ полный интегралъ; сверхъ того, какъ мы видѣли, общій интегралъ получается отъ составленія произвольнаго соотношенія между a_1, a_2, \dots, a_n ; далѣе, отъ исключенія посредствомъ этого соотношенія одного изъ дифференціаловъ da_1, da_2, \dots, da_n и приравненія коэффиціентовъ при остальныхъ дифференціалахъ нулю. Мы также удовлетворимъ предыдущему уравненію, если положимъ

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0.$$

Исключение изъ этихъ уравненій и полного интеграла $V = 0$ количествъ a_1, a_2, \dots, a_n даетъ вообще особое рѣшеніе даннаго уравненія.

806. Разсмотримъ, напริมѣръ, уравненіе

$$z - px - qy = f(p, q),$$

содержащее независимыя переменныя x, y , функцію z и ея производныя p, q ; $f(p, q)$ означаетъ данную функцію отъ p и q . Это уравненіе допускаетъ полный интеграль

$$z - ax - by = f(a, b),$$

гдѣ a и b постоянныя. Общій интеграль произойдетъ отъ исключенія a изъ этого уравненія и его производной относительно a , если только b разсматриваемъ какъ произвольную функцію отъ a . Наконецъ, мы будемъ имѣть особое рѣшеніе, если исключимъ a и b изъ трехъ уравненій

$$z - ax - by = f(a, b), \quad x + \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad y + \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Если предположимъ, что x, y, z означаютъ прямолинейныя координаты, то полный интеграль будетъ представлять цѣлый рядъ плоскостей, общій интеграль разверзающуюся поверхность, огибающую движущуюся плоскость, которой уравненіе содержитъ произвольную функцію; наконецъ особое рѣшеніе будетъ принадлежать поверхности, опредѣляющей касательную къ плоскостямъ полного интеграла и къ поверхностямъ общаго интеграла. Эти результаты согласуются съ тѣмъ, что мы сказали въ § 354.

Объ интегрированіи одного класса уравненій съ частными производными втораго порядка съ двумя независимыми переменными.

807. Анализъ не даетъ никакого общаго метода для интегрированія уравненій съ частными производными порядковъ выше перваго. Однако, имѣются нѣсколько способовъ, которые въ нѣкоторыхъ случаяхъ удаются; въ этомъ отношеніи мы особенно должны отмѣтить классъ уравненій втораго

порядка съ двумя независимыми переменными, изученных въ первый разъ Монжемъ (Monge) и потомъ снова разобранныхъ Амперомъ (Ampère) въ Мемуарахъ, составляющихъ часть *Journal de l'Ecole Polytechnique* (вып. XVII и XVIII). Мы считаемъ необходимымъ изложить здѣсь результаты, къ которымъ пришли только-что названные геометры.

Означимъ переменныя черезъ x, y, z , потомъ сдѣлаемъ

$$dz = p dx + q dy, \quad dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy.$$

Теперь, означимъ черезъ u и v двѣ данныя функціи отъ x, y, z, p, q , именно

$$u = f(x, y, z, p, q), \quad v = f_1(x, y, z, p, q),$$

и рассмотримъ уравненіе перваго порядка

$$(1) \quad \Phi(u, v) = 0,$$

въ которомъ Φ означаетъ произвольную функцію. Поступивъ здѣсь такъ же, какъ и въ § 82, мы будемъ въ состояніи исключить произвольную функцію и образовать такимъ образомъ уравненіе съ частными производными втораго порядка. Дѣйствительно, дифференцированіе относительно x и дифференцированіе относительно y даютъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial z} + r \frac{\partial u}{\partial p} + s \frac{\partial u}{\partial q} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + p \frac{\partial v}{\partial z} + r \frac{\partial v}{\partial p} + s \frac{\partial v}{\partial q} \right] &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + q \frac{\partial u}{\partial z} + s \frac{\partial u}{\partial p} + t \frac{\partial u}{\partial q} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + q \frac{\partial v}{\partial z} + s \frac{\partial v}{\partial p} + t \frac{\partial v}{\partial q} \right] &= 0, \end{aligned}$$

исключивъ же отношеніе производныхъ $\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}$, получимъ уравненіе вида

$$(2) \quad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

въ которомъ H, K, L, M, N данныя функціи отъ x, y, z, p, q .

Уравненіе (1), изъ котораго мы получили уравненіе (2), можетъ быть представлено въ видѣ $v = \varphi(u)$, гдѣ φ означаетъ произвольную функцію отъ u ; она называется *промежуточнымъ интеграломъ* уравненія (2); задача же, которая

имѣетъ цѣлью *интегрированіе* уравненія (2), приводится къ интегрированію уравненія (1).

808. Предположимъ, что H, K, L, M, N означаютъ въ уравненіи (2) данныя функціи отъ x, y, z, p, q . Можетъ случиться, что это уравненіе (2) не допускаетъ промежуточнаго интеграла; но когда такой интегралъ существуетъ, то его можно опредѣлить слѣдующимъ способомъ.

Введемъ, согласно Амперу, функцію отъ x и отъ y дѣйствительно неопредѣленную и которую мы означимъ черезъ α ; можно будетъ y рассматривать какъ функцію отъ x и отъ α , тогда же z, p, q сдѣлаются также функціями отъ x и отъ α . Изъ формулъ, относящихся къ измѣненію независимыхъ переменныхъ, имѣемъ

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = p + q \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = q \frac{\partial y}{\partial \alpha},$$

$$(4) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = r + s \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial \alpha} = s \frac{\partial y}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = s + t \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial \alpha} = t \frac{\partial y}{\partial \alpha}.$$

Исключеніе s и t изъ трехъ послѣднихъ уравненій (4) сначала дастъ

$$(5) \quad \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial q}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial x},$$

потомъ изъ тѣхъ же уравненій (4) имѣемъ,

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} t &= \frac{\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}, \\ s &= \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}, \\ r &= \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \frac{\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}, \end{aligned} \right.$$

откуда

$$(7) \quad rt - s^2 = - \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}.$$

Подставимъ въ уравненіе (2) значенія r , s , t , $rt - s^2$, полученные изъ значеній (6) и (7); получимъ

$$(8) \quad P + Q \frac{\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}} = 0,$$

гдѣ для краткости сдѣлано

$$(9) \quad \begin{cases} P = H \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \right) + 2K \frac{\partial q}{\partial x} + M - N \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2, \\ Q = H \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - 2K \frac{\partial y}{\partial x} + L + N \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \right). \end{cases}$$

Выберемъ теперь неопредѣленную функцію отъ x и отъ α , означенную черезъ y , такъ, чтобы имѣли $Q = 0$; уравненіе (8) приведетъ къ $P = 0$; задача поэтому будетъ приведена къ нахожденію четырехъ функцій y , z , p , q отъ x и отъ α , удовлетворяющихъ двумъ уравненіямъ (3), уравненію (5) и двумъ уравненіямъ

$$P = 0, \quad Q = 0.$$

Если во второй формулѣ (9) вмѣсто $\frac{\partial p}{\partial x}$ и $\frac{\partial q}{\partial x}$ подставимъ значенія, полученные изъ формулъ (4), то получимъ

$$Q = (H + Nt) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - 2(K - Ns) \frac{\partial y}{\partial x} + (L + Nr);$$

слѣдовательно, уравненіе $Q = 0$ дастъ

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{(K - Ns)^2 - (H + Nt)(L + Nr)}}{H + Nt},$$

или, положивъ для краткости

$$(10) \quad G = K^2 - HL + MN,$$

и принимая во вниманіе уравненіе (2), найдемъ

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{G}}{H + Nt};$$

отсюда имѣемъ

$$H \frac{\partial y}{\partial x} + N \left(s + t \frac{\partial q}{\partial x} \right) = K \pm \sqrt{G};$$

подставивъ же вмѣсто $s + t \frac{\partial y}{\partial x}$ въ это уравненіе $\frac{\partial q}{\partial x}$, получимъ

$$(11) \quad H \frac{\partial y}{\partial x} + N \frac{\partial q}{\partial x} - K \mp \sqrt{G} = 0.$$

Что касается уравненія $P = 0$, то, если замѣнимъ въ немъ $H \frac{\partial y}{\partial x}$ его значеніемъ, полученнымъ изъ уравненія (11), оно станетъ такимъ:

$$(12) \quad H \frac{\partial p}{\partial x} + (K \mp \sqrt{G}) \frac{\partial q}{\partial x} + M = 0.$$

Когда N не есть нуль, уравненіе (12) можетъ быть замѣнено слѣдующимъ:

$$(13) \quad N \frac{\partial p}{\partial x} - (K \mp \sqrt{G}) \frac{\partial y}{\partial x} + \Gamma = 0,$$

которое получится отъ исключенія $\frac{\partial q}{\partial x}$ изъ двухъ предыдущихъ уравненій.

809. Введеніе переменнѣй α имѣетъ цѣлью сдѣлать очевиднымъ образованіе, посредствомъ кривой, поверхности, опредѣляемой даннымъ уравненіемъ съ частными производными. Этотъ параметръ α есть постоянная для одной и той же образующей, и слѣдовательно, $d\alpha$ есть нуль. Уравненія (11) и (12), имѣющія мѣсто для этой кривой, такъ же какъ первое уравненіе (3), могутъ поэтому также быть написаны слѣдующимъ образомъ

$$(14) \quad \begin{cases} H dy + N dq - (K \mp \sqrt{G}) dx = 0, \\ H dp + (K \mp \sqrt{G}) dq + M dx = 0, \\ dz - p dx - q dy = 0. \end{cases}$$

Методъ интегрированія, который мы имѣемъ въ виду, удобенъ только въ томъ случаѣ, когда возможно найти функцію V отъ x, y, z, p, q , которой полный дифференціалъ,

въ силу трехъ уравненій (14), приводится къ нулю. Имѣемъ

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial p} dp + \frac{\partial V}{\partial q} dq;$$

исключимъ dp , dq , dz изъ уравненій (14) и уравненія $dV = 0$; приравняемъ потомъ нулю коэффициенты при оставшихся дифференціалахъ dx , dy ; получимъ

$$(15) \quad \begin{cases} N \frac{\partial V}{\partial x} + Np \frac{\partial V}{\partial z} - L \frac{\partial V}{\partial p} + (K \pm \sqrt{G}) \frac{\partial V}{\partial q} = 0, \\ N \frac{\partial V}{\partial y} + Nq \frac{\partial V}{\partial z} + (K \mp \sqrt{G}) \frac{\partial V}{\partial p} - H \frac{\partial V}{\partial q} = 0, \end{cases}$$

откуда, черезъ исключеніе $\frac{\partial V}{\partial q}$,

$$(16) \quad \begin{cases} H \frac{\partial V}{\partial x} + (K \pm \sqrt{G}) \frac{\partial V}{\partial y} \\ + [Hp + (K \pm \sqrt{G}) q] \frac{\partial V}{\partial z} - M \frac{\partial V}{\partial p} = 0; \end{cases}$$

два уравненія (15) приводятся къ одному, когда $N = 0$; въ этомъ случаѣ вмѣсто одного изъ нихъ нужно взять уравненіе (16).

Функция V должна поэтому сразу удовлетворять двумъ уравненіямъ съ частными производными перваго порядка. Обратно, нетрудно доказать, что, если существуетъ функция V , способная удовлетворять уравненіямъ (15), а слѣдовательно и уравненію (16), мы удовлетворимъ данному уравненію, если положимъ

$$(17) \quad dV = 0 \quad \text{или} \quad V = \text{const.}$$

Въ самомъ дѣлѣ уравненіе (17), черезъ дифференцированіе его относительно x и y , даетъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z} + r \frac{\partial V}{\partial p} + s \frac{\partial V}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z} + s \frac{\partial V}{\partial p} + t \frac{\partial V}{\partial q} &= 0. \end{aligned}$$

Опредѣливъ отсюда значенія $\frac{\partial V}{\partial x}$ и $\frac{\partial V}{\partial y}$ для внесенія ихъ въ уравненія (15), которыя мы предположимъ тождествами, получимъ

$$-(L + Nr) \frac{\partial V}{\partial p} \pm (K \pm \sqrt{G} - Ns) \frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

$$(K \mp \sqrt{G} - Ns) \frac{\partial V}{\partial p} - (H + Nt) \frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

исключение производных $\frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}$ даетъ потомъ

$$(L + Nr)(H + Nt) - (K - Ns)^2 + G = 0,$$

откуда, сдѣлавъ приведеніе, получимъ

$$Nr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0.$$

810. Предположимъ, на основаніи этого, что уравненія (15) допускаютъ общее рѣшеніе; если это рѣшеніе содержитъ произвольную функцію, то оно дастъ промежуточный интеграль даннаго уравненія. Наше предположеніе будетъ выполнено, если мы будемъ въ состояніи найти двѣ функціи u и v отъ x, y, z, p, q , которыхъ дифференціалы, въ силу уравненій (14), приводятся къ нулю, потому что то же самое свойство будетъ принадлежать функціи $\Phi(u, v)$, какая бы ни была эта функція Φ ; слѣдовательно, мы удовлетворимъ уравненіямъ (15), если возьмемъ $V = \Phi(u, v)$, и мы будемъ имѣть промежуточный интеграль

$$\Phi(u, v) = 0 \quad \text{или} \quad v = \varphi(u),$$

гдѣ φ означаетъ, какъ и Φ , произвольную функцію. Что касается образующей поверхности, представленной этимъ интеграломъ, то она опредѣляется двумя уравненіями

$$u = \alpha, \quad v = \varphi(\alpha),$$

гдѣ α есть переменный параметръ.

Намъ остается интегрировать уравненіе съ частными производными перваго порядка. Но если количество, означенное черезъ G , не есть нуль, то нашъ методъ можетъ намъ дать два промежуточныхъ интеграла

$$v = \varphi(u), \quad v_1 = \varphi(u_1),$$

если радикаль \sqrt{G} взять послѣдовательно съ знакомъ $+$ и съ знакомъ $-$; тогда опредѣленіе z будетъ зависѣть еще только

отъ интегрированія уравненія съ полными дифференціалами

$$dz = p dx + q dy,$$

гдѣ p и q опредѣляются въ функціи отъ x, y, z двумя промежуточными интегралами. Чтобы произвести это послѣднее вычисленіе, надлежитъ взять за независимыя переменныя количества, отъ которыхъ зависятъ произвольныя функціи.

811. Предъидущій анализъ можетъ быть безъ труда распространенъ на всѣ уравненія съ частными производными втораго порядка, допускающія промежуточные интегралы. Но когда дѣло идетъ объ уравненіи, не имѣющемъ предположенной нами формы, то такія уравненія, какъ (14), къ которымъ приводитъ методъ, содержатъ производныя r, s, t ; поэтому къ нимъ нужно прибавить два уравненія

$$dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy.$$

Вычисленіе то же самое, только немного сложнѣе, но мы не можемъ болѣе останавливаться на этомъ предметѣ.

Приложеніе предъидущей теоріи къ нѣкоторымъ примѣрамъ.

812. П Р И М Ѣ Р Ъ. I. — *Требуется интегрировать уравненіе*

$$r - a^2 t = 0,$$

гдѣ a есть постоянная.

Здѣсь имѣемъ

$$H = 1, \quad K = 0, \quad L = -a^2, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad \sqrt{G} = a;$$

уравненія (14) § 809 даютъ

$$dy \mp a dx = 0, \quad dp \mp a dq = 0,$$

откуда

$$y \mp ax = \text{const.}, \quad p \mp aq = \text{const.};$$

поэтому имѣемъ два промежуточные интеграла

$$p + aq = 2a\varphi'(y + ax), \quad p - aq = -2a\psi'(y - ax),$$

гдѣ φ и ψ суть произвольныя функціи, имѣющія производными φ' и ψ' . Отсюда имѣемъ

$$\begin{aligned} p &= a\varphi'(y+ax) - a\psi'(y-ax), \\ q &= \varphi'(y+ax) + \psi'(y-ax), \end{aligned}$$

далѣе

$$dz = \varphi'(y+ax)(dy+adx) + \psi'(y-ax)(dy-adx),$$

и слѣдовательно

$$z = \varphi(y+ax) + \psi(y-ax);$$

безполезно прибавлять постоянную, потому что функціи φ и ψ произвольны.

813. Уравненіе $r - a^2 t = 0$ есть то, къ которому приводитъ задача о *сотрясеніи струнъ*; можно прямо получить интеграль этого уравненія безъ помощи теоріи § 808 и слѣдующихъ; дѣйствительно, достаточно положить

$$y+ax = \alpha, \quad y-ax = \beta$$

и взять α и β за независимыя переменныя. Будемъ имѣть

$$p = a\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial z}{\partial \beta}\right), \quad q = \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\right),$$

далѣе

$$r = a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} \right),$$

$$t = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} \right);$$

данное уравненіе тогда будетъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0,$$

и мы имѣемъ

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \psi'(\beta),$$

гдѣ $\psi'(\beta)$ есть производная отъ произвольной функціи $\psi(\beta)$.

Второе интегрированіе даетъ

$$z = \varphi(x) + \psi(y),$$

гдѣ φ есть вторая произвольная функція. Это есть тотъ результатъ, къ которому насъ привелъ общій методъ.

814. П Р И М Ѣ Р Ъ II. — *Нужно интегрировать уравненіе съ частными производными*

$$rt - s^2 = 0,$$

принадлежащее разверзающимся поверхностямъ.

Уравненія (15) § 809 приводятся здѣсь къ

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Для интегрированія перваго уравненія, нужно разсматривать y, p, q какъ постоянныя; въ интегрированіи втораго мы будемъ разсматривать x, p, q какъ постоянныя. Тогда для перваго уравненія имѣемъ

$$V = \text{функція отъ } z - px, y, p, q;$$

и для втораго

$$V = \text{функція отъ } z - qy, x, p, q;$$

мы будемъ поэтому имѣть общее рѣшеніе двухъ предыдущихъ уравненій, если положимъ

$$V = \Phi(z - px - qy, p, q),$$

мы удовлетворимъ данному уравненію, если приравняемъ это значеніе V нулю.

Поэтому мы имѣемъ два слѣдующихъ промежуточныхъ интеграла уравненія $rt - s^2 = 0$,

$$q = \varphi(p), \quad z - px - qy = \psi(p),$$

гдѣ φ и ψ двѣ произвольныя функціи. Но должно замѣтить, что существуетъ въ настоящемъ случаѣ рѣшеніе, содержащее произвольную функцію двухъ количествъ, именно

$$z - px - qy = \Psi(p, q).$$

Чтобы окончить интегрированіе даннаго уравненія, нужно къ промежуточнымъ интеграламъ присоединить уравненіе

$dz = p dx + q dy$; эти интегралы черезъ дифференцирование даютъ

$$dq = \varphi'(p) dp, \quad x dp + y dq + \psi'(p) dp = 0;$$

потомъ черезъ исключение dq имѣемъ

$$x + y\varphi'(p) + \psi'(p) = 0.$$

Искомый интеграль получится поэтому отъ исключенія p изъ двухъ уравненій

$$z = px + y\varphi(p) + \psi(p), \quad 0 = x + y\varphi'(p) + \psi'(p),$$

изъ которыхъ второе получается отъ дифференцированія перваго относительно p . Такимъ образомъ мы вполнѣ находимъ огибающую поверхность движущейся плоскости.

815. П р и м ѣ р ъ III. — *Найти поверхности, которыхъ линіи одной кривизны расположены въ параллельныхъ плоскостяхъ.*

Прямоугольныя координаты суть x, y, z ; если возьмемъ плоскость zx параллельно плоскостямъ линій кривизны, то уравненіе съ частными производными искомой поверхности будетъ (§ 322)

$$pqr - (1 + p^2)s = 0.$$

Здѣсь имѣемъ

$$H = pq; \quad 2K = -(1 + p^2),$$

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad \sqrt{G} = \frac{1 + p^2}{2}.$$

Уравненія (14) § 809, если дать \sqrt{G} знакъ $+$, тогда будутъ

$$dy = 0, \quad pq dp - (1 + p^2) dq = 0,$$

взявъ \sqrt{G} съ знакомъ $-$, имѣемъ

$$pq dy + (1 + p^2) dx = 0, \quad dp = 0.$$

Разсмотримъ сначала первую систему; имѣемъ

$$y = \text{const.},$$

далѣе

$$\frac{p dp}{1 + p^2} - \frac{dq}{q} = 0,$$

откуда

$$\frac{q}{\sqrt{1 + p^2}} = \text{const.};$$

поэтому имѣемъ промежуточный интегралъ

$$q = \sqrt{1 + p^2} \varphi'(y),$$

гдѣ $\varphi'(y)$ есть производная произвольной функции $\varphi(y)$.

Разсмотримъ теперь два уравненія второй системы, которыя, по причинѣ $p dx + q dy = dz$, суть

$$p dz + dx = 0, \quad dp = 0;$$

изъ этихъ уравненій находимъ

$$p = \text{const.}, \quad pz + x = \text{const.};$$

слѣдовательно

$$x = -pz + \Psi(p)$$

будетъ второй промежуточный интегралъ, гдѣ Ψ есть произвольная функция

Остается интегрировать уравненіе

$$dz = p dx + q dy;$$

для этого надлежитъ взять y и p за независимыя переменныя. Второй интегралъ даетъ

$$dx = -p dz - z dp + \Psi'(p) dp.$$

Подставивъ въ выраженіе dz это значеніе dx , а также значеніе q , полученное изъ перваго интеграла, получимъ

$$\sqrt{1 + p^2} dz + \frac{zp dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \Psi'(p) dp + \varphi'(y) dy;$$

обѣ части этого уравненія суть точные дифференціалы, а такъ какъ имѣемъ

$$\int \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \Psi'(p) dp = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \Psi(p) - \int \Psi(p) \frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

то, если сдѣлаемъ, для освобожденія отъ знака \int ,

$$\Psi(p) = (1 + p^2)^{\frac{3}{2}} \frac{d \frac{\psi(p)}{\sqrt{1+p^2}}}{dp},$$

гдѣ $\psi(p)$ есть новая произвольная функція, интегрированіе дастъ

$$z \sqrt{1+p^2} = -p \sqrt{1+p^2} \psi'(p) + \sqrt{1+p^2} \psi(p) + \varphi(y).$$

Въ то же время второй промежуточный интеграль приметъ видъ

$$x + pz = -(1 + p^2) \psi'(p) + p \psi(p),$$

и уравненіе искомымъ поверхностей будетъ результатъ исключенія p изъ двухъ предыдущихъ уравненій. Если положимъ

$$V = z - px - \sqrt{1+p^2} \varphi(y) - \psi(p),$$

то систему этихъ двухъ уравненій можно будетъ замѣнить слѣдующей:

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial p} = 0.$$

Поверхности, къ которымъ принадлежатъ эти уравненія, допускаютъ линіи точекъ округленія (§ 319), которыя опредѣляются уравненіемъ

$$\frac{t}{1+q^2} = \frac{s}{pq}.$$

Приложеніе преобразованія Лежандра.

816. Мы изложили это преобразование въ § 92; оно часто бываетъ полезнымъ въ Интегральномъ исчисленіи; мы сейчасъ дадимъ этому примѣръ.

З а д а ч а. — *Найти общее уравненіе поверхностей, въ которыхъ главные радіусы кривизны въ каждой точкѣ равны и противоположныхъ направленій.*

Уравненіе съ частными производными искомой поверхности есть (§ 320)

$$(1) \quad (1 + q^2) r - 2 p q s + (1 + p^2) t = 0.$$

Если приложимъ къ нему преобразование Лежандра и если сдѣлаемъ

$$(2) \quad u = p x + q y - z,$$

откуда

$$(3) \quad x = \frac{\partial u}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial q},$$

гдѣ p и q взяты за независимыя переменныя, то оно станетъ такимъ

$$(4) \quad (1 + q^2) \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + 2 p q \frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} + (1 + p^2) \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = 0.$$

Уравненія (3) даютъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \frac{\partial x}{\partial p}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} = \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial p}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \frac{\partial y}{\partial q},$$

слѣдовательно уравненіе (4) можетъ быть написано однимъ изъ слѣдующихъ способовъ:

$$(1 + q^2) \frac{\partial y}{\partial q} + 2 p q \frac{\partial x}{\partial q} + (1 + p^2) \frac{\partial x}{\partial p} = 0,$$

$$(1 + q^2) \frac{\partial y}{\partial q} + 2 p q \frac{\partial y}{\partial p} + (1 + p^2) \frac{\partial x}{\partial p} = 0,$$

Взявъ дифференціалъ перваго изъ этихъ уравненій относительно p и втораго относительно q , мы получимъ два новыхъ уравненія, которыя получаются изъ слѣдующаго:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} (1 + q^2) \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} + 2 p q \frac{\partial^2 U}{\partial p \partial q} + (1 + p^2) \frac{\partial^2 U}{\partial p^2} \\ + 2 q \frac{\partial U}{\partial q} + 2 p \frac{\partial U}{\partial p} = 0, \end{aligned} \right.$$

если положимъ $U = x$, $U = y$. Если же, принявъ во вниманіе этотъ результатъ, въ уравненіи (4) замѣнимъ u черезъ $p x + q y - z$, то мы увидимъ, что уравненіе (5) еще удовлетворяется для $U = z$. Такимъ образомъ три координаты,

разсматриваемыя какъ функціи отъ p и q , удовлетворяютъ тому же уравненію съ частными производными втораго порядка.

Методъ § 809 неприменимъ къ уравненію (5); однако уравненія (15) этого параграфа, примененныя къ настоящимъ означеніямъ, удовлетворяются функціею V двухъ только переменныхъ p, q ; приравнявъ эту функцію произвольной постоянной α , мы будемъ имѣть общій интегралъ уравненія (5). Тотъ же самый интегралъ можетъ быть полученъ изъ перваго уравненія (14) § 809, именно

$$(1 + p^2) dq - (pq \pm \sqrt{1 - p^2 - q^2}) dp = 0.$$

Это дифференціальное уравненіе въ предположеніи $dq = \text{const.}$ даетъ

$$d^2 p = 0,$$

откуда

$$\frac{dp}{dq} = \text{const.}$$

Я буду означать постоянную черезъ α или черезъ ϵ , смотря по тому, возьму-ли я радикаль $\sqrt{1 - p^2 - q^2}$ съ тѣмъ или другимъ знакомъ. Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$(6) \quad \begin{cases} 1 + p^2 = \alpha (pq + \sqrt{1 - p^2 - q^2}), \\ 1 + p^2 = \epsilon (pq - \sqrt{1 - p^2 - q^2}). \end{cases}$$

Уравненіе (5) удовлетворяется, когда даемъ U значеніе α или значеніе ϵ , поэтому очевидно, что оно упростится, если возьмемъ вмѣсто p и q за независимыя переменныя α и ϵ . Изъ формулъ (6) имѣемъ

$$p = \alpha q + \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad p = \epsilon q + \sqrt{1 - \epsilon^2},$$

откуда

$$p = \frac{\alpha \sqrt{1 - \epsilon^2} - \epsilon \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha - \epsilon}, \quad q = \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha - \epsilon},$$

и мы находимъ, что уравненіе (5) приводится къ

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \varepsilon} = 0,$$

котораго интеграль есть

$$U = \Phi(\alpha) + \Psi(\varepsilon),$$

гдѣ Φ и Ψ двѣ произвольныя функціи. Такимъ образомъ мы можемъ написать

$$x = \frac{\partial u}{\partial p} = \varphi'(\alpha) + \psi'(\varepsilon),$$

гдѣ φ и ψ двѣ произвольныя функціи. Въ предположеніи q постоянной имѣемъ

$$dp = q d\alpha + d\sqrt{-1-\alpha^2} = q d\varepsilon + d\sqrt{-1-\varepsilon^2},$$

поэтому

$$u = q[\varphi(\alpha) + \psi(\varepsilon)] + \sqrt{-1-\alpha^2} \varphi'(\alpha) + \sqrt{-1-\varepsilon^2} \psi'(\varepsilon) - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sqrt{-1-\alpha^2} \varphi''(\alpha) d\alpha - \int_{\beta_0}^{\beta} \sqrt{-1-\varepsilon^2} \psi''(\varepsilon) d\varepsilon + \bar{\omega}(q),$$

гдѣ $\bar{\omega}(q)$ есть нѣкоторая функція отъ q . Взявъ дифференціалъ относительно q , изъ предыдущихъ формулъ получимъ

$$y = [\varphi(\alpha) - \alpha \varphi'(\alpha)] + [\psi(\varepsilon) - \varepsilon \psi'(\varepsilon)] + \bar{\omega}(q).$$

Но такъ какъ y есть вида $\Phi(\alpha) + \Psi(\varepsilon)$, то надо, чтобы $\bar{\omega}(q)$ была постоянной; тогда можно включить эту постоянную въ произвольныя функціи φ , ψ , это же приводитъ къ предположенію, что она есть нуль; поэтому имѣемъ

$$y = [\varphi(\alpha) - \alpha \varphi'(\alpha)] + [\psi(\varepsilon) - \varepsilon \psi'(\varepsilon)].$$

Такъ какъ функція $\bar{\omega}(q)$ постоянная, то она входитъ въ интегралы, находящіеся въ предыдущемъ значеніи u , и которыхъ нижніе предѣлы произвольны. Изъ этого значенія u и формулы (2) выводимъ значеніе z , именно

$$z = \int \sqrt{-1-\alpha^2} \varphi''(\alpha) d\alpha + \int \sqrt{-1-\varepsilon^2} \psi''(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Такимъ образомъ интеграль даннаго уравненія происходитъ отъ исключенія α и ε изъ трехъ уравненій

$$(7) \quad \begin{cases} x = \varphi'(\alpha) + \psi'(\epsilon), \\ y = \varphi'(\alpha) - \alpha \varphi'(\alpha) + \psi(\epsilon) - \epsilon \psi'(\epsilon), \\ z = \int \sqrt{1 - \alpha^2} \varphi''(\alpha) d\alpha + \int \sqrt{1 - \epsilon^2} \psi''(\epsilon) d\epsilon, \end{cases}$$

гдѣ φ и ψ означаютъ двѣ произвольныя функціи. Хотя эти формулы (7) содержатъ мнимыя количества, но онѣ все-таки представляютъ не менѣе безконечности дѣйствительныхъ поверхностей.

О линейныхъ уравненіяхъ съ частными производными.

817. Разсмотримъ уравненіе съ частными производными какого-нибудь порядка и съ какимъ угодно числомъ независимыхъ переменныхъ, но которое линейно относительно неизвѣстной функціи и ея частныхъ производныхъ. Очевидно, что если уравненіе имѣетъ *вторую часть*, то намъ достаточно будетъ знать особое рѣшеніе этого уравненія, чтобы уничтожить эту вторую часть.

Если данное уравненіе не имѣетъ второй части, то оно будетъ обладать двумя свойствами, доказанными нами въ § 724 и § 725, въ случаѣ обыкновенныхъ линейныхъ уравненій, именно: 1) если знаемъ функцію, удовлетворяющую уравненію съ частными производными, то мы получимъ болѣе общее рѣшеніе, если умножимъ эту функцію на произвольную постоянную; (2) если данныя функціи, въ какомъ-нибудь числѣ, удовлетворяютъ уравненію, то сумма этихъ функцій будетъ также удовлетворять ему.

Когда дѣло идетъ объ уравненіяхъ съ частными производными, линейныхъ и безъ второй части, которыхъ коэффициенты постоянны, тѣ свойства, о которыхъ мы только что говорили, позволяютъ получить рѣшеніе уравненія, содержащее сколько угодно произвольныхъ; иногда даже они приводятъ къ рѣшенію, содержащему произвольныя функціи. Чтобы показать это, мы рассмотримъ случай, гдѣ имѣется только двѣ независимыхъ переменныхъ x , y ; но наше разсужденіе можно будетъ приложить ко всѣмъ случаямъ.

818. Пусть будетъ линейное уравненіе съ частными производными

$$(1) \quad 0 = a_0 z + \left(b_0 \frac{\partial z}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(c_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + \dots,$$

какого-нибудь порядка n и котораго коэффициенты суть постоянны.

Замѣнимъ z черезъ $e^{\alpha x + \beta y}$; результатъ внесенія будетъ $e^{\alpha x + \beta y} f(\alpha, \beta)$, гдѣ

$$f(\alpha, \beta) = a_0 + (b_0 \alpha + b_1 \beta) + (c_0 \alpha^2 + c_1 \alpha \beta + c_2 \beta^2) + \dots$$

Если уравненіе

$$(2) \quad f(\alpha, \beta) = 0$$

удовлетворяется для $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ и если C означаетъ произвольную постоянную, то мы удовлетворимъ уравненію (1), положивъ

$$z = C_0 e^{\alpha_0 x + \beta_0 y},$$

и такъ какъ уравненіе (2) допускаетъ безконечное число системъ общихъ рѣшеній (α, β) , то мы будемъ имѣть рѣшеніе уравненія (1)

$$(3) \quad z = \sum C e^{\alpha x + \beta y}$$

содержащее сколько угодно членовъ.

819. Нужно замѣтить случай, гдѣ нѣкоторые изъ корней β уравненія (2) суть линейныя функціи отъ α ; тогда можно получить рѣшеніе уравненія съ частными производными, содержащее столько произвольныхъ функцій, сколько имѣется такихъ корней β . Предположимъ, въ самомъ дѣлѣ, что мы можемъ получить изъ уравненія (2)

$$\beta = m\alpha + n.$$

Взявъ для β это значеніе, изъ формулы (3) получимъ

$$z = e^{ny} \sum C (e^x + m y)^{\alpha}.$$

Число членовъ, содержащихся подъ знакомъ \sum , неопредѣленно; показатели α этихъ членовъ и ихъ коэффициенты C произвольны; поэтому сумма есть ничто иное, какъ произвольная функція отъ e^{x+my} или, если угодно, отъ $x+my$. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть такое рѣшеніе

$$z = e^{ny} \Phi(x + my),$$

гдѣ Φ означаетъ произвольную функцію.

Равнымъ образомъ, если уравненіе (2) имѣетъ второй корень

$$b = m_1 \alpha + n_1,$$

линейную функцію отъ α , то мы будемъ въ состояніи образовывать новое рѣшеніе даннаго уравненія,

$$z = e^{n_1 y} \Phi_1(x + m_1 y),$$

и такъ далѣе. Сумма этихъ рѣшеній, именно

$$z = e^{ny} \Phi(x + my) + e^{n_1 y} \Phi_1(x + m_1 y) + \dots,$$

будетъ опять рѣшеніемъ даннаго уравненія.

820. ПРИЛОЖЕНІЕ КЪ ЗАДАЧѢ О СОТЯСЕНІИ СТРУНЪ. — Различныя вопросы математической физики приводятъ къ уравненіямъ съ частными производными того вида, который мы только-что рассматривали. Въ этихъ вопросахъ, неизвѣстная функція должна удовлетворять, сверхъ того, нѣкоторымъ частнымъ условіямъ, и чтобы получить полное рѣшеніе, мы такъ должны выбрать произвольныя, чтобы выполнить требуемыя условія. Мы здѣсь ограничимся случаемъ уравненія задачи о сотрясеніи струнъ, которымъ мы уже занимались въ § 812 и § 813.

Наша задача состоитъ въ нахожденіи функціи y переменныхъ x и t , которая удовлетворяла бы уравненію

$$(1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

и была бы такой, чтобы имѣли

$$(2) \quad y = F(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = f(x) \quad \text{для } t = 0,$$

гдѣ $F(x)$, $f(x)$ суть данныя функции отъ x .

Подставивъ $e^{\alpha x + \beta t}$ вмѣсто y въ уравненіе (1), найдемъ

$$\epsilon^2 - a^2 \alpha^2 = 0,$$

откуда находимъ

$$\epsilon = + a\alpha, \quad \epsilon = - a\alpha;$$

отсюда слѣдуетъ, что мы удовлетворимъ уравненію (1) (§ 819), если положимъ

$$(3) \quad y = \Phi(x + at) + \Psi(x - at),$$

гдѣ Φ и Ψ произвольныя функции. Намъ остается удовлетворить условію, относящемуся къ $t = 0$; изъ уравненія (3) находимъ

$$(4) \quad \frac{\partial y}{\partial t} = a\Phi'(x + at) - a\Psi'(x - at);$$

уравненія (3) и (4) для $t = 0$ даютъ

$$y = \Phi(x) + \Psi(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = a\Phi'(x) - a\Psi'(x).$$

Чтобы удовлетворить уравненіямъ (2), нужно положить

$$\Phi(x) + \Psi(x) = F(x),$$

$$\Phi(x) - \Psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x f(x) dx = F_1(x);$$

поэтому будемъ имѣть

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} F(x) + \frac{1}{2} F_1(x),$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} F(x) - \frac{1}{2} F_1(x),$$

и слѣдовательно

$$y = \frac{F(x + at) + F(x - at)}{2} + \frac{F_1(x + at) - F_1(x - at)}{2}.$$

Объ интегрированіи уравненій съ частными производными посредством рядовъ или опредѣленныхъ интеграловъ.

821. Случаи, въ которыхъ можно точно интегрировать уравненія съ частными производными порядковъ выше перваго, составляютъ очень небольшое число, и въ приложеніяхъ мы должны стараться получить интегралы посредствомъ рядовъ. Но этотъ способъ только приложимъ въ случаѣ линейныхъ уравненій; можно тогда употребить формулу Маклорена или Тейлора, какъ и въ случаѣ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Способъ неопредѣленныхъ коэффициентовъ часто предпочитается, онъ же даетъ большую общность, потому что позволяетъ найти разложеніе интеграловъ въ рядъ, расположенный по степенямъ какой-нибудь изъ независимыхъ переменныхъ

Такимъ образомъ можно интегралы однихъ и тѣхъ же уравненій представить посредствомъ различныхъ рядовъ, различающихся часто числомъ произвольныхъ функцій, отсюда выходитъ такое слѣдствіе, что мы не можемъ указать *a priori* число и природу произвольныхъ функцій, которыя должны входить въ самый общій интегралъ уравненія съ частными производными порядка выше перваго.

822. Разсмотримъ, наримѣръ, уравненіе

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

которое встрѣчается въ математической теоріи теплоты и въ которомъ a означаетъ данную постоянную.

Взявъ дифференціалъ этого уравненія относительно t , найдемъ

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = a^2 \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t} = a^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{\partial u}{\partial t} = a^3 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

и если дадимъ t частное значеніе t_0 , то уравненія (1) и (2)

опредѣляютъ соотвѣтствующія значенія послѣдовательныхъ производныхъ отъ u относительно t . Но значеніе u остается произвольной функціей отъ x ; означивъ ее черезъ $F(x)$, по формулѣ Тейлора будемъ имѣть

$$(3) \quad \begin{cases} u = F(x) + \frac{aF''(x)}{1} (t - t_0) + \frac{a^2F^{IV}(x)}{1 \cdot 2} (t - t_0)^2 \\ + \frac{a^3F^{VI}(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (t - t_0)^3 + \dots, \end{cases}$$

выраженіе, содержащее только одну произвольную функцію $F(x)$.

Предположимъ теперь, что мы желаемъ разложить u по восходящимъ степенямъ $x - x_0$, гдѣ x_0 есть опредѣленное количество, выбранное по произволу. Уравненіе (1) дастъ

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t},$$

далѣе

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^3} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Значенія u и $\frac{\partial u}{\partial x}$, отвѣчающія $x = x_0$, суть произвольныя функціи отъ t ; если означимъ ихъ соотвѣтственно черезъ $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, то формулы (4) и (5) опредѣляютъ послѣдовательныя производныя $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, \dots ; и мы по формулѣ Тейлора будемъ имѣть

$$(6) \left\{ \begin{aligned} u &= \varphi(t) + \frac{\varphi'(t)}{1 \cdot 2} \frac{(x - x_0)^2}{a} + \frac{\varphi''(t)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{(x - x_0)^4}{a^2} + \dots \\ &+ \frac{\psi(t)}{1} (x - x_0) + \frac{\psi'(t)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{(x - x_0)^3}{a} + \frac{\psi''(t)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{(x - x_0)^5}{a^2} + \dots \end{aligned} \right.$$

Это выражение u состоитъ изъ двухъ различныхъ рядовъ и оно содержитъ двѣ произвольныя функціи $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Однако формула (6) имѣетъ еще только общность формулы (3); Пуассонъ дѣйствительно показалъ, что обѣ формулы могутъ быть получены одна изъ другой, только въ предположеніи сходимости рядовъ (*Théorie mathématique de la chaleur*, p. 137).

823. Вмѣсто разложенія интеграловъ въ рядъ, иногда бываетъ выгодно выразить ихъ черезъ опредѣленные интегралы; намъ достаточно будетъ дать примѣръ этого рода вычисленія и мы выберемъ для этого уравненіе, которымъ мы только-что занимались, именно

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Приложимъ къ этому уравненію способъ § 818; внесеніе $e^{\alpha x + \beta t}$ вмѣсто u даетъ

$$\beta = a\alpha^2,$$

и слѣдовательно имѣемъ такое рѣшеніе нашего уравненія

$$u = C e^{a\alpha^2 t} e^{\alpha x} + C_1 e^{a\alpha_1^2 t} e^{\alpha_1 x} + \dots,$$

которое содержитъ неопредѣленное число произвольныхъ постоянныхъ $C, C_1, \dots, \alpha, \alpha_1, \dots$. Но мы имѣемъ (§ 498)

$$e^{\alpha^2 a t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} e^{\alpha \omega \sqrt{a t}} d\omega;$$

поэтому можно написать

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} (C e^{\alpha (x + \omega \sqrt{a t})} + C_1 e^{\alpha_1 (x + \omega \sqrt{a t})} + \dots) d\omega$$

Рядъ

$$C e^{\alpha x} + C_1 e^{\alpha_1 x} + \dots$$

способенъ выразить произвольную функцію отъ e^x или, если угодно, произвольную функцію отъ x ; если означимъ ее черезъ $F(x)$, то значеніе u будетъ

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + 2\omega \sqrt{at}) e^{-\omega^2} d\omega;$$

оно приводится для $t = 0$ къ $F(x)$, и слѣдовательно, оно тождественно тому, которое дается формулой (3) § 822, когда предполагаемъ въ ней $t_0 = 0$. Однако, нужно замѣтить, что предъидущая формула существуетъ только тогда, когда $F(x)$ есть такая функція, что произведеніе $e^{-x} F(x)$ для x равнаго безконечности есть нуль.

Анализъ, котораго мы дали сейчасъ краткое обозрѣніе, однако интересенъ съ точки зрѣнія приложеній его къ физикѣ; спеціальныя трактаты, такіе какъ Пуассона, даютъ множество примѣровъ; мы же здѣсь считаемъ бесполезнымъ входить по этому предмету въ дальнѣйшія подробности.

ГЛАВА XII.

О МЕТОДѢ ВАРИАЦІЙ.

Опредѣленіе вариаций системы переменныхъ, зависящихъ отъ одной изъ нихъ.

824. Пусть будутъ x и y двѣ переменныя, зависящія одна отъ другой такъ, что имѣемъ

$$(1) \quad y = f(x).$$

Если рассматриваемъ x и y какъ координаты, то предыдущее уравненіе представитъ кривую; если желаемъ сравнить эту кривую съ той, которая дается другимъ какимъ-нибудь уравненіемъ

$$(2) \quad y = f_1(x),$$

то будемъ въ состояніи заключить ихъ, и ту и другую, безконечнымъ числомъ различныхъ способовъ, въ одинъ видъ, котораго уравненіе

$$(3) \quad y = F(x, \alpha)$$

будетъ содержать произвольный интегралъ α . Функція F должна быть такъ выбрана, чтобы она приводилась послѣдовательно къ f и f_1 , когда даемъ параметру α два частныя значенія; на примѣръ, можно будетъ, означивъ черезъ α_0 и α_1 два какія-нибудь опредѣленные значенія α , положить

$$F(x, \alpha) = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_0} f(x) + \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} f_1(x),$$

потому что эта формула даетъ

$$F(x, \alpha_0) = f(x), \quad F(x, \alpha_1) = f_1(x).$$

Если желаемъ имѣть самую общую функцію $F(x, \alpha)$, выполняющую требуемое нами условіе, то очевидно, что достаточно будетъ прибавить къ образованному только-что нами выраженію произвольную функцію отъ x и отъ α , подчиненную тому условію, что она, при какомъ угодно x , уничтожается для $\alpha = \alpha_0$ и для $\alpha = \alpha_1$.

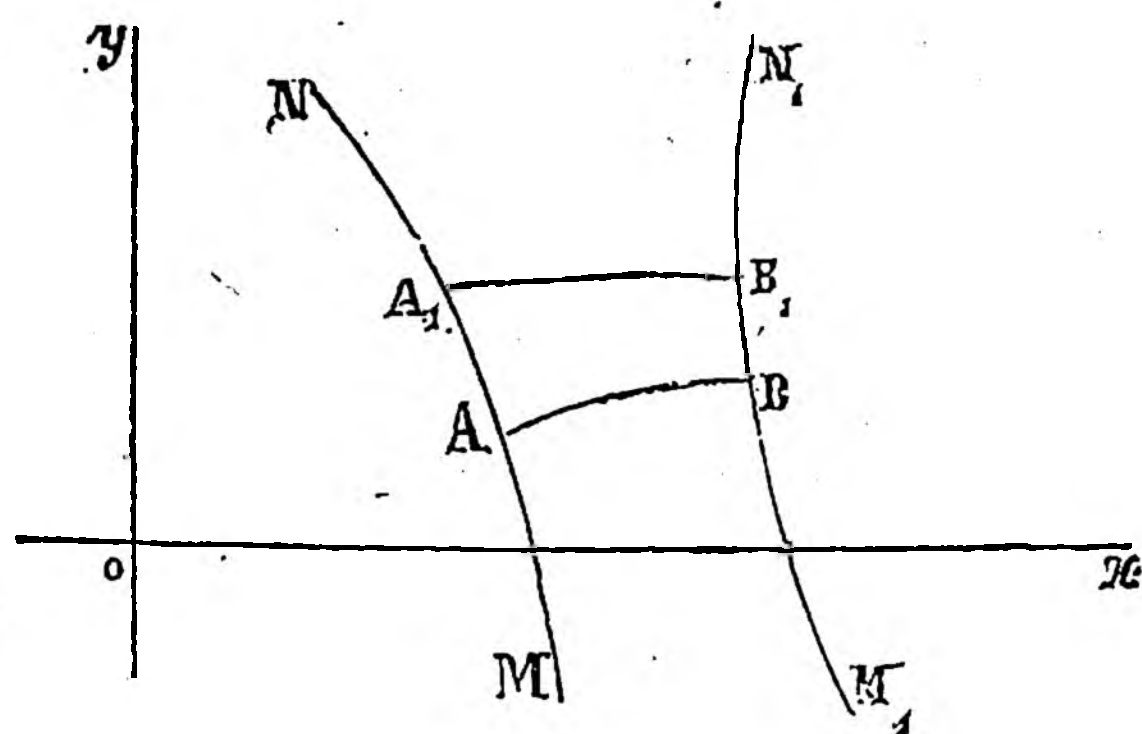
Когда заставимъ α измѣняться отъ α_0 до α_1 , то кривая, опредѣляемая уравненіемъ (3), совпадаетъ сначала съ той, которая дается уравненіемъ (1), потомъ она станетъ непрерывно измѣняться и наконецъ совпадетъ съ кривой, опредѣляемой уравненіемъ (2).

Если желаемъ сравнить между собой двѣ дуги кривыхъ (1) и (2), заключающіяся между ординатами, отвѣчающими двумъ даннымъ значеніямъ x_0 и X переменнѣй x , то мы можемъ предположить, что, когда α измѣняется отъ α_0 до α_1 , различныя точки первой дуги совпали соотвѣтственно съ точками дуги второй кривой (2), двигаясь по параллельной къ оси y ; тогда точки кривыхъ (3), отвѣчающія значенію x , заключенному между x_0 и X , будутъ *соотвѣтствующими*.

825. Какія бы ни были дуги двухъ кривыхъ, которыя мы желаемъ сравнить между собой, мы всегда можемъ вторую дугу разсматривать, какъ полученную отъ измѣненія первой, т. е. заставивъ разныя точки первой дуги описывать извѣстныя линіи; крайнія точки каждой изъ этихъ линій будутъ соотвѣтствующими точками двухъ кривыхъ. Но измѣненіе, о которомъ я только-что говорилъ, можетъ быть произведено безконечнымъ числомъ различныхъ способовъ, и это есть то, что намъ нужно изложить здѣсь.

Пусть будутъ AB и A_1B_1 дуги двухъ кривыхъ, которыя мы желаемъ разсматривать какъ соотвѣтствующія. Мы можемъ произвольно выбрать кривыя MN и M_1N_1 , по которымъ будутъ двигаться крайнія точки A, B первой дуги для совпаденія, послѣ измѣненія, съ крайними точками $A_1,$

B_1 второй дуги. Сверхъ того, поступивъ такъ, какъ мы сдѣлали въ предыдущемъ параграфѣ, мы будемъ въ состо-



яніи заключить двѣ кривыя MN , M_1N_1 , безконечнымъ числомъ различныхъ способовъ, въ одинъ видъ кривыхъ, которыя будутъ опредѣляться уравненіемъ

$$(4) \quad F(x, y, t) = 0,$$

гдѣ t означаетъ переменный параметръ; кривыя MN , M_1N_1 будутъ отвѣчать двумъ опредѣленнымъ значеніямъ t_0 , t_1 параметра t . Пусть будетъ также

$$(5) \quad F(x, y, \alpha) = 0$$

уравненіе вида кривыхъ, заключающаго двѣ кривыя AB , A_1B_1 , которыя мы рассматриваемъ, и предположимъ, какъ въ предыдущемъ параграфѣ, что эти двѣ кривыя отвѣчаютъ значеніямъ α_0 , α_1 параметра α .

Системы кривыхъ (4) и (5) опредѣляютъ всѣ точки плоскости, потому что, если дадимъ x и y опредѣленные значенія, эти уравненія дадутъ значенія t и α . Такимъ образомъ x и y можно рассматривать, какъ функціи отъ t и α ; предположимъ, что мы получили изъ уравненій (4) и (5)

$$(6) \quad x = \Phi(t, \alpha), \quad y = \Psi(t, \alpha).$$

Если заставимъ измѣняться t , рассматривая α какъ постоянную, то уравненія (6) опредѣляютъ кривую системы α , которая содержитъ двѣ данныя кривыя AB , A_1B_1 . Если, напротивъ, заставимъ измѣняться α , рассматривая t какъ постоянную, то уравненія (6) будутъ принадлежать кривой системы t , которая содержитъ кривыя MN , M_1N_1 , и каждая кривая системы t пересѣчетъ данныя кривыя и другія кривыя

системы α въ точкахъ, которыя можно будетъ разсматривать какъ соотвѣтствующія.

826. Предъидущія разсмотрѣнія распространяются на какое угодно число переменныхъ, зависящихъ отъ одной изъ нихъ. Дѣйствительно, можно выразить такое предложеніе:

Всегда возможно, безконечнымъ числомъ способовъ, найти n функций Φ, Ψ, Π, \dots двухъ переменныхъ t и α такъ, чтобы, если вообще положимъ

$$(7) \quad x = \Phi(t, \alpha), \quad y = \Psi(t, \alpha), \quad z = \Pi(t, \alpha), \quad \dots,$$

имѣли соотвѣтственно для значеній α_0 и α_1 параметра α

$$(8) \quad \begin{cases} x = \varphi_0(t), & y = \psi_0(t), & z = \bar{\omega}_0(t), & \dots, \\ x = \varphi_1(t), & y = \psi_1(t), & z = \bar{\omega}_1(t), & \dots, \end{cases}$$

и для значеній t_0, t_1 параметра t ,

$$(9) \quad \begin{cases} x = \Phi_0(\alpha), & y = \Psi_0(\alpha), & z = \Pi_0(\alpha), & \dots, \\ x = \Phi_1(\alpha), & y = \Psi_1(\alpha), & z = \Pi_1(\alpha), & \dots, \end{cases}$$

какія-бы ни были данныя функции $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \dots, \Phi_0, \Phi_1, \Psi_0, \dots$. Очевидно однако, что функции $\Phi_0, \Psi_0, \Pi_0, \dots$ должны быть соотвѣтственно равны $\varphi_0, \psi_0, \bar{\omega}_0, \dots$ когда предполагаемъ $\alpha = \alpha_0, t = t_0$ и $\varphi_1, \psi_1, \bar{\omega}_1, \dots$ когда предполагаемъ $\alpha = \alpha_1, t = t_1$; равнымъ образомъ функции $\Phi_1, \Psi_1, \Pi_1, \dots$ должны быть равны $\varphi_0, \psi_0, \bar{\omega}_0, \dots$ или $\varphi_1, \psi_1, \bar{\omega}_1, \dots$ когда предполагаемъ $\alpha = \alpha_0, t = t_1$, или $\alpha = \alpha_1, t = t_0$.

Напримѣръ, если положимъ

$$\Phi(t_0, \alpha_0) = \varphi_0(t_0) = \Phi_0(\alpha_0) = A,$$

$$\Phi(t_0, \alpha_1) = \varphi_1(t_0) = \Phi_0(\alpha_1) = B,$$

$$\Phi(t_1, \alpha_0) = \varphi_0(t_1) = \Phi_1(\alpha_0) = C,$$

$$\Phi(t_1, \alpha_1) = \varphi_1(t_1) = \Phi_1(\alpha_1) = D,$$

то можно будетъ для $\Phi(t, \alpha)$ взять слѣдующее выраженіе

$$\begin{aligned} \Phi(t, \alpha) = & \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_0} \varphi_0(t) + \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \varphi_1(t) \\ & + \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} \left[\Phi_0(\alpha) - A \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_0} - B \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \right], \\ & + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \left[\Phi_1(\alpha) - C \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_0} - D \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \right]; \end{aligned}$$

то же самое для другихъ $\Psi(t, \alpha), \dots$

Уравненія первой линіи системы (8) опредѣляютъ какую-нибудь систему переменныхъ, зависящихъ отъ одной изъ нихъ. Если возьмемъ x за независимую переменную, то переменныя можно будетъ выразить черезъ

$$(10) \quad y = f(x), \quad z = f^{(1)}(x), \quad u = f^{(2)}(x), \quad \dots,$$

Равнымъ образомъ уравненія второй линіи системы (8) опредѣляютъ вторую систему функцій

$$(11) \quad y = f_1(x), \quad z = f_1^{(1)}(x), \quad u = f_1^{(2)}(x), \quad \dots,$$

обѣ же системы будутъ заключаться въ болѣе общей системѣ, опредѣляемой уравненіями (7); онѣ отвѣчаютъ, одна предположенію $\alpha = \alpha_0$, другая предположенію $\alpha = \alpha_1$.

827. Предположимъ, что мы дали α какое-нибудь опредѣленное значеніе; уравненія (7) опредѣлятъ систему функцій y, z, \dots переменной x . Если сверхъ того положимъ

$$\begin{aligned} dy &= y' dx, \quad dz = z' dx, \quad du = u' dx, \quad \dots, \\ dy' &= y'' dx, \quad dz' = z'' dx, \quad du' = u'' dx, \quad \dots, \\ dy'' &= y''' dx, \quad dz'' = z''' dx, \quad du'' = u''' dx, \quad \dots, \\ &\dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \end{aligned}$$

то новыя переменныя $y', z', u', \dots, y'', z'', u'', \dots$ можно будетъ, подобно переменнымъ x, y, z, \dots , выразить въ функціи t и α . Напримѣръ, дифференцированіе уравненій (7) даетъ

$$dx = \frac{\partial \Phi(t, \alpha)}{\partial t} dt, \quad dy = \frac{\partial \Psi(t, \alpha)}{\partial t} dt, \quad dz = \frac{\partial \Pi(t, \alpha)}{\partial t} dt, \quad \dots,$$

и мы отсюда заключаемъ, что

$$y' = \frac{\partial \Psi(t, \alpha)}{\partial t} : \frac{\partial \Phi(t, \alpha)}{\partial t}, \quad z' = \frac{\partial \Pi(t, \alpha)}{\partial t} : \frac{\partial \Phi(t, \alpha)}{\partial t}, \quad \dots,$$

посредствомъ новаго дифференцированія также будемъ имѣть переменныя y'', z'', \dots и т. д.

828. Переменныя $x, y, z, \dots, y', z', \dots, y'', \dots$ такимъ образомъ выражаются въ функціи отъ t и α , поэтому разсматриваемъ t какъ постоянную и заставляемъ α измѣняться отъ

$d\alpha$; x , y , z , ... будутъ принимать приращенія, которыхъ выраженія суть

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{\partial \Phi(t, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial^2 \Phi(t, \alpha)}{\partial \alpha^2} \frac{d\alpha^2}{1 \cdot 2} + \dots, \\ \Delta y &= \frac{\partial \Psi(t, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial^2 \Psi(t, \alpha)}{\partial \alpha^2} \frac{d\alpha^2}{1 \cdot 2} + \dots, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Если употребимъ знакъ δ для означенія дифференціаловъ разныхъ порядковъ, относящихся къ одной переменнѣй α , то можно будетъ проще написать

$$\begin{aligned}\Delta x &= \delta x + \frac{\delta^2 x}{1 \cdot 2} + \dots, \\ \Delta y &= \delta y + \frac{\delta^2 y}{1 \cdot 2} + \dots, \\ \Delta z &= \delta z + \frac{\delta^2 z}{1 \cdot 2} + \dots, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

и мы также будемъ имѣть

$$\begin{aligned}\Delta y' &= \delta y' + \frac{\delta^2 y'}{1 \cdot 2} + \dots, \\ \Delta z' &= \delta z' + \frac{\delta^2 z'}{1 \cdot 2} + \dots, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Дифференціалы

$$\delta x, \delta y, \delta z, \dots, \delta y', \delta z', \dots, \delta y'', \dots$$

называются *варіаціями* переменныхъ

$$x, y, z, \dots, y', z', \dots, y'' \dots;$$

они относятся къ переходу отъ системы функцій, которыя опредѣляютъ уравненія (7), для нѣкотораго значенія α , къ новой системѣ функцій, которыя опредѣляютъ тѣ же уравненія (7), когда α увеличивается отъ своего дифференціала $d\alpha$. Но мы предположимъ въ томъ, что сейчасъ будетъ слѣдовать, $\alpha = \alpha_0$; система (7) будетъ тогда тождественна данной системѣ (10) и варіаціи $\delta x, \delta y, \delta z, \dots, \delta y', \dots$ будутъ относиться къ измѣненію функцій этой

системы; сверхъ того, это измѣненіе произвольно, потому что система (7) опредѣляетъ для $\alpha = \alpha_1$, систему произвольныхъ функцій, разность же $\alpha_1 - \alpha_0$ можетъ быть предположена какъ угодно малой.

Вторые дифференціалы

$$\delta^2 x, \delta^2 y, \dots, \delta^2 y', \dots$$

называются *варіаціями втораго порядка* переменныхъ

$$x, y, \dots, y', \dots;$$

также

$$\delta^3 x, \delta^3 y, \dots, \delta^3 y', \dots$$

будутъ *варіаціи третьаго порядка* и т. д.

Пусть будетъ вообще

$$V = F(x, y, z, \dots, y', z', \dots, y'', \dots)$$

Функція переменныхъ $x, y, z, \dots, y', z', \dots$. Функціи y, z, \dots опредѣляются уравненіями (10); если подставимъ въ систему (10) систему (7), которой она тождественна для $\alpha = \alpha_0$, то послѣдовательные дифференціалы V относительно α примутъ для $\alpha = \alpha_0$ значенія, которыя будутъ *варіаціями* послѣдовательныхъ порядковъ функціи V .

Варіаціи, какъ мы видимъ, ни что иное какъ дифференціалы, поэтому правила дифференцированія здѣсь приложимы; мы будемъ имѣть, напримѣръ, слѣдующее выраженіе варіаціи перваго порядка δV :

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \dots + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial V}{\partial y''} \delta y'' + \dots$$

Разсмотрѣнія, только-что данныя нами, прилагаются къ случаю системы функцій нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ.

Теоремы, относящіяся къ перемѣщенію знаковъ.

829. ТЕОРЕМА I. — Можно нарушить порядокъ действий, выражаемыхъ знаками δ и d .

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ

$$V = F(x, y, z, \dots, y', z', \dots, y'', \dots).$$

Перемѣнныя $x, y, z, \dots, y', z', \dots, y'', \dots$, какъ мы говорили выше, выражаются въ функціи двухъ перемѣнныхъ t и α , поэтому будемъ имѣть

$$V = f(t, \alpha),$$

гдѣ предполагаемъ, что α имѣетъ определенное значеніе α_0 . Теперь по опредѣленію имѣемъ

$$dV = \frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial t} dt, \quad \delta V = \frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha;$$

перемѣнныя t и α независимы, поэтому ихъ дифференціалы dt и $d\alpha$ суть произвольные и постоянные; если поэтому возьмемъ дифференціалъ предъидущихъ двухъ формулъ, первой относительно α , второй относительно t , то будемъ имѣть

$$\delta dV = \frac{\partial \frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial t}}{\partial \alpha} dt d\alpha, \quad d\delta V = \frac{\partial \frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha}}{\partial t} dt d\alpha,$$

и слѣдовательно (§ 60)

$$\delta dV = d\delta V,$$

это же доказываетъ изложенную теорему.

Слѣдствіе. — Какія-бы ни были цѣлыя числа m и n , имѣемъ $\delta^n d^m V = d^m \delta^n V$.

830. **ТЕОРЕМА II.** — Можно нарушить порядокъ дѣйствій, выражаемыхъ знаками \int и δ , какіе-бы при этомъ ни были предѣлы, между которыми должно быть произведено интегрированіе.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V dx;$$

V означаетъ данную функцію

$$V = F(x, y, z, \dots, y', z', \dots, y'', z'', \dots)$$

независимой перемѣнной x , различныхъ функцій y, z, \dots

отъ x и производныхъ этихъ функцій; она можетъ также зависеть отъ значеній $x, y, z, \dots, y', z', \dots$ въ предѣлахъ интегрированія.

Можно выразить $x, y, z, \dots, y', z', \dots$ въ функціи двухъ переменныхъ t и α , но нужно будетъ послѣ внесенія этихъ значеній въ V предположить для α опредѣленное значеніе α_0 . Тогда, если t_0 и t_1 означаютъ значенія t , отвѣчающія предѣламъ x_0 и x_1 , можно будетъ написать

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(V \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

Теперь для полученія δS нужно дифференцировать этотъ интегралъ относительно α , а такъ какъ предѣлы t_0, t_1 не зависятъ отъ α , то дифференцированіе можно произвести подъ знакомъ \int . Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta \left(V \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

Но такъ какъ dt есть постоянная, то имѣемъ $\delta \left(V \frac{dx}{dt} \right) = \frac{\delta (V dx)}{dt}$; поэтому

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta (V dx)}{dt} dt,$$

перейдя къ независимой переменнѣй x , найдемъ

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta (V dx)}{dx} dx.$$

Иногда также пишутъ

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \delta (V dx),$$

гдѣ уничтоженъ множитель dx , входящій въ числитель и знаменатель подъ знакомъ \int , подразумѣвая, что интегрированіе относится къ независимой переменнѣй x . Предъидущая формула согласуется съ изложенной теоремой, и она существуетъ при какихъ угодно предѣлахъ x_0 и x_1 , которые

постоянны, когда переменная x равна t , но которые въ общемъ случаѣ измѣняются вмѣстѣ съ α .

Выраженія варіацій функціи и ея производныхъ въ функціи варіаціи независимой переменной и новой переменной.

831. Пусть y данная функція переменной x . Положимъ

$$(1) \quad dy = y' dx, \quad dy' = y'' dx, \dots,$$

сдѣлаемъ также

$$(2) \quad \omega = \delta y - y' \delta x,$$

откуда

$$\delta y = y' \delta x + \omega.$$

Если возьмемъ дифференціалъ перваго уравненія (1) съ знакомъ δ и предыдущаго уравненія съ d , то будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \delta dy &= \delta y' dx + y' \delta dx, \\ d \delta y &= dy' \delta x + y' d \delta x + d\omega; \end{aligned}$$

такъ какъ можно нарушить порядокъ двухъ знаковъ d и δ , то сравненіе этихъ уравненій дастъ

$$dy' dx = dy' \delta x + d\omega$$

или, раздѣливъ эту формулу на dx и употребивъ второе уравненіе (1), найдемъ

$$\delta y' = y'' \delta x + \frac{d\omega}{dx}.$$

Равнымъ образомъ, если возьмемъ дифференціалъ втораго уравненія (1) съ знакомъ δ и предыдущаго съ d , то будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \delta dy' &= \delta y'' dx + y'' \delta dx, \\ d \delta y' &= dy'' \delta x + y'' d \delta x + d \frac{d\omega}{dx}, \end{aligned}$$

откуда

$$\delta y'' dx = dy'' \delta x + d \frac{d\omega}{dx}$$

или, раздѣливъ на dx ,

$$\delta y'' = y''' \delta x + \frac{d^2 \omega}{dx^2}.$$

Очевидно, что, продолжая такимъ образомъ далѣе, мы образуемъ уравненія

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta y = y' \delta x + \omega, \\ \delta y' = y'' \delta x + \frac{d\omega}{dx}, \\ \delta y'' = y''' \delta x + \frac{d^2 \omega}{dx^2}, \\ \dots\dots\dots, \\ \delta y^{(n-1)} = y^{(n)} \delta x + \frac{d^{n-1} \omega}{dx^{n-1}}, \\ \dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

которыя позволяютъ выразить вариации δy , $\delta y'$, $\delta y''$, ... только въ однихъ количествахъ δx и ω .

832. Посредствомъ этихъ формулъ, можно получить очень простое выраженіе вариации какой-нибудь функціи отъ x , y и производныхъ y' , y'' , ... Пусть будетъ

$$(4) \quad V = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}),$$

означимъ черезъ

$$(5) \quad dV = X dx + Y dy + Y' dy' + \dots + Y^{(n)} dy^{(n)}$$

полный дифференціалъ отъ V ; будемъ имѣть (§ 828)

$$(6) \quad \delta V = X \delta x + Y \delta y + Y' \delta y' + \dots + Y^{(n)} \delta y^{(n)}.$$

Если вычтемъ уравненія (5) и (6) одно изъ другаго, послѣ умноженія перваго на $\frac{\delta x}{dx}$, то получимъ

$$\begin{aligned} \delta V - dV \frac{\delta x}{dx} &= Y(\delta y - y' \delta x) + Y'(\delta y' - y'' \delta x) + \dots \\ &\quad + Y^{(n)}(\delta y^{(n)} - y^{(n+1)} \delta x) \end{aligned}$$

или, по причинѣ формулъ (3), имѣемъ:

$$(7) \quad \delta V = dV \frac{\delta x}{dx} + Y\omega + Y' \frac{d\omega}{dx} + Y'' \frac{d^2 \omega}{dx^2} + \dots + Y^{(n)} \frac{d^n \omega}{dx^n}.$$

Если функція V содержитъ другія функціи отъ x ,

именно: z, u, \dots , съ ихъ производными $z', u', \dots, z'', u'', \dots$, то нужно будетъ прибавить ко второй части формулы (5) новые члены

$$Z dz + Z' dz' + \dots + U du + U' du' + \dots$$

и ко второй части формулы (6) аналогичные члены

$$Z \delta z + Z' \delta z' + \dots + U \delta u + U' \delta u' + \dots;$$

тогда, если положимъ

$$\omega = \delta z - z' \delta x, \chi = \delta u - u' \delta x, \dots,$$

очевидно, что формула (7) будетъ продолжать давать вариацию δV , если только прибавимъ ко второй части члены

$$Z\omega + Z' \frac{d\omega}{dx} + \dots + U\chi + U' \frac{d\chi}{dx} + \dots$$

Вычисленіе вариации опредѣленнаго интеграла.

833. Предположимъ опредѣлить вариацию опредѣленнаго интеграла

$$(1) \quad S = \int_{x_0}^{x_1} V dx.$$

Предположимъ сначала, что V не зависитъ отъ предѣловъ x_0, x_1 , которые вообще переменны съ α , и что она содержитъ только одну функцію y отъ x ; такимъ образомъ будемъ имѣть

$$(2) \quad V = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}).$$

Взявъ дифференціалъ уравненія (1) съ δ , получимъ (§ 830)

$$(3) \quad \delta S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta(V dx)}{dx} dx,$$

сверхъ того, такъ какъ можно нарушить порядокъ дифференцированій черезъ d и δ , имѣемъ

$$\delta(V dx) = \delta V dx + V \delta x,$$

также имѣемъ (§ 832)

$$\delta V = dV \frac{\delta x}{dx} + Y\omega + Y' \frac{d\omega}{dx} + \dots + Y^{(n)} \frac{d^n \omega}{dx^n}$$

гдѣ

$$dV = X dx + Y dy + Y' dy' + \dots + Y^{(n)} dy^{(n)}$$

и

$$\omega = \delta y - y' \delta x.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$(4) \quad \delta(V dx) = d(V \delta x) + \left(Y\omega + Y' \frac{d\omega}{dx} + \dots + Y^{(n)} \frac{d^n \omega}{dx^n} \right) dx;$$

и, слѣдовательно, формула (3) дастъ

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta S &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{d(V \delta x)}{dx} dx + \int_{x_0}^{x_1} Y\omega dx + \int_{x_0}^{x_1} Y' \frac{d\omega}{dx} dx \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} Y'' \frac{d^2 \omega}{dx^2} dx + \dots + \int_{x_0}^{x_1} Y^{(n)} \frac{d^n \omega}{dx^n} dx. \end{aligned} \right.$$

Первый изъ интеграловъ, содержащихся въ этой формулѣ, равенъ разности значеній, принимаемыхъ произведе-
ніемъ $V\delta x$ для предѣловъ интегрированія; между слѣдую-
щими интегралами, тѣ, которые зависятъ отъ производныхъ
отъ ω , могутъ быть преобразованы, посредствомъ интегри-
рованія по частямъ, въ другіе, въ которые входитъ только
одно количество ω . Дѣйствительно, имѣемъ

$$\begin{aligned} \int Y' \frac{d\omega}{dx} dx &= Y'\omega - \int \frac{dY'}{dx} \omega dx, \\ \int Y'' \frac{d^2 \omega}{dx^2} dx &= Y'' \frac{d\omega}{dx} - \frac{dY''}{dx} \omega + \int \frac{d^2 Y''}{dx^2} \omega dx, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

откуда, взявъ предѣлами x_0 и x_1 , найдемъ

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} Y' \frac{d\omega}{dx} dx &= \left[Y'\omega \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dY'}{dx} \omega dx, \\ \int_{x_0}^{x_1} Y'' \frac{d^2 \omega}{dx^2} dx &= \left[Y'' \frac{d\omega}{dx} - \frac{dY''}{dx} \omega \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2 Y''}{dx^2} \omega dx, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Если для краткости положимъ

$$(7) \quad K = Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \dots + (-1)^n \frac{d^n Y^{(n)}}{dx^n}$$

и

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \Gamma &= V\delta x + \left(Y' - \frac{dY''}{dx} + \frac{d^2Y'''}{dx^2} - \dots \right) \omega + \left(Y'' - \frac{dY'''}{dx} + \dots \right) \frac{d\omega}{dx} \\ &+ \left(Y''' - \dots \right) \frac{d^2\omega}{dx^2} + \dots + Y^{(n)} \frac{d^{n-1}\omega}{dx^{n-1}}, \end{aligned} \right.$$

потомъ если означимъ черезъ Γ_0 , Γ_1 значенія, принимаемыя Γ для предѣловъ интегрированія, то выраженіе (5) δS , по причинѣ формулъ (6), сдѣлается такимъ

$$(9) \quad \delta S = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int_{x_0}^{x_1} K\omega dx.$$

Если замѣнимъ ω , $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$, ... ихъ значеніями $\delta y - y' \delta x$, $\delta y' - y'' \delta x$, $\delta y'' - y''' \delta x$, ..., то выраженіе (8) Γ будетъ

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \Gamma &= \left[V - \left(Y' - \frac{dY''}{dx} + \frac{d^2Y'''}{dx^2} - \dots \right) y' \right. \\ &\quad \left. - \left(Y'' - \frac{dY'''}{dx} + \dots \right) y'' - (Y''' - \dots) y''' - \dots \right] \delta x \\ &+ \left(Y' - \frac{dY''}{dx} + \frac{d^2Y'''}{dx^2} - \dots \right) \delta y \\ &+ \left(Y'' - \frac{dY'''}{dx} + \dots \right) \delta y' + (Y''' - \dots) \delta y'' + \dots + V^{(n)} \delta y^{(n-1)}. \end{aligned} \right.$$

834. Мы предполагали, что въ выраженіе V входитъ только одна функція y отъ x съ нѣсколькими ея производными; но очевидно, что вычисленіе варіаціи δS будетъ произведено точно также, если V будетъ содержать другія функціи z , u , ... съ ихъ производными z' , z'' , ..., $z^{(p)}$, u' , u'' , ..., $u^{(q)}$, ... Въ самомъ дѣлѣ, если, какъ въ § 832, положимъ

$$\bar{\omega} = \delta z - z' \delta x, \quad \chi = \delta u - u' \delta x, \quad \dots,$$

то очевидно, что формула (4) не перестанетъ давать варіацію $\delta(Vdx)$, если только прибавимъ ко второй части члены

$$\left(Z^{\omega} + Z' \frac{d\bar{\omega}}{dx} + \dots + Z^{(p)} \frac{d^p \bar{\omega}}{dx^p} \right) + \left(U\chi + U' \frac{d\chi}{dx} + \dots + U^{(q)} \frac{d^q \chi}{dx^q} \right) + \dots$$

аналогичные тѣмъ, которые зависятъ отъ ω . Приложивъ къ этимъ новымъ членамъ способъ, который мы употребляли, найдемъ такое выраженіе δS ,

$$(11) \quad \delta S = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int_{x_0}^{x_1} (K\omega + H\bar{\omega} + G\chi + \dots) dx,$$

гдѣ K означаетъ количество, опредѣляемое формулой (7), и гдѣ сдѣлали кромѣ того

$$(12) \quad \begin{cases} H = Z - \frac{dZ'}{dx} + \frac{d^2Z''}{dx^2} - \dots + (-1)^p \frac{d^pZ^{(p)}}{dx^p}, \\ G = U - \frac{dU'}{dx} + \frac{d^2U''}{dx^2} - \dots + (-1)^q \frac{d^qU^{(q)}}{dx^q}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Сверхъ того Γ_0 , Γ_1 всегда выражаютъ значенія, принимаемыя Γ для предѣловъ интегрированія, т. е. значенія, отвѣчающія соовѣтственно $x = x_0$ и $x = x_1$; но къ общему выраженію Γ , данному формулой (10), нужно прибавить новыя члены, именно тѣ, которые получаются изъ членовъ, уже написанныхъ и содержащихъ буквы Y , y , черезъ соотвѣтственное замѣщеніе этихъ буквъ Z , z , потомъ U , u , и т. д.

835. Наконецъ намъ остается разобрать тотъ случай, когда функція V зависитъ, въ предѣлахъ интеграла, отъ значеній x , y , y' , y'' , \dots , $y^{(n-1)}$, z , z' , z'' , \dots , $z^{(p-1)}$, \dots .

Въ этомъ случаѣ варіація Vdx составляется изъ двухъ частей, именно той, которая получается безъ измѣненія количествъ, относящихся къ предѣламъ, и той, которая получается только отъ измѣненія этихъ однихъ количествъ. Первую часть мы разсмотрѣли въ предъидущихъ параграфахъ, и если означимъ черезъ знакъ δ' варіаціи, относящіяся къ однимъ только предѣламъ, то вторая часть будетъ $\delta'(Vdx)$ или $\delta'Vdx$. Поэтому достаточно будетъ прибавить къ выраженію (11) δS членъ

$$A = \int_{x_0}^{x_1} \delta'Vdx.$$

Имѣемъ

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta V &= \frac{\partial V}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial V}{\partial y_0} \delta y_0 + \frac{\partial V}{\partial y'_0} \delta y'_0 + \dots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}_0} \delta y^{(n-1)}_0 + \frac{\partial V}{\partial z_0} \delta z_0 + \dots \\ &+ \frac{\partial V}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial V}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial V}{\partial y'_1} \delta y'_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}_1} \delta y^{(n-1)}_1 + \frac{\partial V}{\partial z_1} \delta z_1 + \dots, \end{aligned} \right.$$

откуда, взявъ интеграль, получимъ

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \Lambda &= \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial x_0} dx + \delta y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y_0} dx + \dots + \delta y^{(n-1)}_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}_0} dx + \delta z_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial z_0} dx + \dots \\ &+ \delta x_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} dx + \delta y_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y_1} dx + \dots + \delta y^{(n-1)}_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}_1} dx + \delta z_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial z_1} dx + \dots; \end{aligned} \right.$$

если же сдѣлаемъ для краткости

$$(15) \quad G = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \Lambda,$$

то полное выраженіе δS будетъ

$$(16) \quad \delta S = G + \int_{x_0}^{x_1} (K\omega + H\bar{\omega} + G\chi + \dots) dx,$$

и, мы видимъ, что члены, введенные въ G черезъ Λ , одного и того же вида съ тѣми, которые уже существовали.

Другой способъ вычисленія вариациі опредѣленнаго интеграла.

836. вмѣстѣ того, чтобы прилагать общую формулу, полученную нами въ предыдущемъ параграфѣ, часто бываетъ въ приложеніяхъ выгоднѣе приступить къ прямому изысканію. Въ этомъ случаѣ можно избавиться отъ введенія, какъ это прежде дѣлали, количествъ ω , $\bar{\omega}$, ..., направивъ вычисленіе слѣдующимъ образомъ. Данный интеграль есть

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V dx$$

поэтому, какъ мы видѣли,

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\delta(V dx)}{dx} dx,$$

но мы просто напишемъ

$$\delta S = \int \delta(V dx),$$

безъ означенія переменнѣй, относительно которой производится интегрированіе, при чемъ значенія, принимаемыя этой переменнѣй, когда имѣемъ $x = x_0$, $x = x_1$, должны быть взяты за предѣлы интеграла.

Теперь, V есть функція отъ $x, y, y', \dots, z, z', \dots$; но мы введемъ вмѣсто производныхъ $y', y'', \dots, z', \dots$, дифференціалы переменныхъ x, y, z, \dots , причемъ независимая переменная есть параметръ t , которой вариация есть нуль. Такъ какъ имѣемъ

$$y = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dx \frac{d^2y}{dx^2} - dy \frac{d^2x}{dx^2}}{dx^3}, \quad \dots, \quad z' = \frac{dz}{dx}, \quad \dots,$$

то $V dx$ сдѣлается функціей отъ $x, y, z, \dots, dx, dy, dz, \dots, d^2x, d^2y, d^2z, \dots$; взявъ дифференціалъ этого произведенія со знакомъ d и замѣтивъ, что можно нарушить порядокъ дѣйствій, выражаемыхъ знаками d и δ , мы будемъ имѣть результатъ такого вида:

$$\begin{aligned} \delta(V dx) = & X_0 \delta x + X_1 d \delta x + X_2 d^2 \delta x + \dots \\ & + Y_0 \delta y + Y_1 d \delta y + Y_2 d^2 \delta y + \dots \\ & + Z_0 \delta z + Z_1 d \delta z + Z_2 d^2 \delta z + \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

Дифференцированія, выражаемыя знакомъ d , относятся къ переменнѣй t , и интегрированіе по частямъ даетъ

$$\begin{aligned} \int X_1 d \delta x &= X_1 \delta x - \int d X_1 \delta x, \\ \int X_2 d^2 \delta x &= X_2 d \delta x - d X_2 \delta x + \int d^2 X_2 \delta x, \\ &\dots, \\ \int Y_1 d \delta y &= Y_1 \delta y - \int d Y_1 \delta y, \\ \int Y_2 d^2 \delta y &= Y_2 d \delta y - d Y_2 \delta y + \int d^2 Y_2 \delta y, \\ &\dots \end{aligned}$$

Слѣдовательно, если положимъ

$$\begin{aligned} X &= X_0 - dX_1 + d^2X_2 - \dots, \\ Y &= Y_0 - dY_1 + d^2Y_2 - \dots, \\ Z &= Z_0 - dZ_1 + d^2Z_2 - \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \Gamma &= (X_1 - dX_2 + \dots) \delta x + (X_2 - \dots) \delta dx + \dots \\ &+ (Y_1 - dY_2 + \dots) \delta y + (Y_2 - \dots) \delta dy + \dots \\ &+ (Z_1 - dZ_2 + \dots) \delta z + (Z_2 - \dots) \delta dz + \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

потомъ, если означимъ черезъ Γ_0, Γ_1 значенія Γ для предѣловъ, для которыхъ соответственно имѣемъ $x = x_0, y = y_0, \dots$ и $x = x_1, y = y_1, \dots$, то будемъ имѣть

$$\delta S = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z + \dots),$$

если же x есть переменная, относительно которой производится интегрированіе, то мы должны будемъ написать

$$\delta S = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{X \delta x + Y \delta y + Z \delta z + \dots}{dx} dx.$$

Мы предполагали здѣсь, что функція V не зависитъ отъ значеній, принимаемыхъ въ предѣлахъ переменной; но если противное имѣетъ мѣсто, то достаточно будетъ прибавить къ предъидущему выраженію δS новые члены, которые мы вычислили въ § 835.

Предъидущая формула будетъ тождественна формулѣ § 835, если только замѣнимъ въ ней $\delta y, \delta z, \dots$ выраженіями

$$\frac{dy}{dx} \delta x + \omega, \quad \frac{dz}{dx} \delta x + \bar{\omega}, \quad \dots;$$

черезъ это внесеніе количество $X \delta x + Y \delta y + Z \delta z + \dots$ приводится къ

$$(X dx + Y dy + Z dz + \dots) \frac{\delta x}{dx} + Y \omega + Z \bar{\omega} + \dots;$$

отсюда слѣдуетъ, что мы тождественно имѣемъ

$$X dx + Y dy + Z dz + \dots = 0$$

и что Y, Z ничто иное, какъ количества, означенныя въ § 835 черезъ K, H, \dots

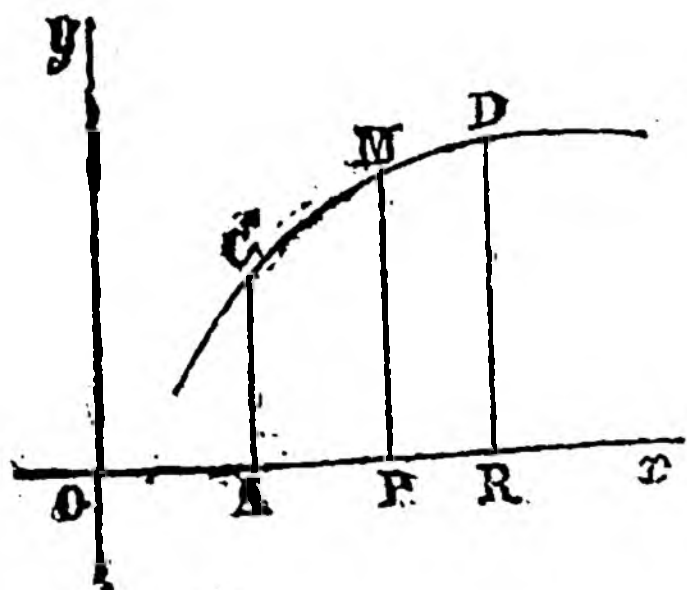
837. Мы вычислили вариацию опредѣленнаго интеграла S въ самомъ общемъ случаѣ, предполагая какое угодно измѣненіе въ системѣ функцій отъ x , которыя мы означили черезъ y, z, \dots . Если предположимъ, что переменная x равна переменной t , которой вариация есть нуль, то предѣлы x_0, x_1 будутъ постоянныя, и мы будемъ имѣть вообще $\delta x = 0$. Тогда количества, означенныя черезъ $\omega, \bar{\omega}, \dots$ будутъ ничѣмъ инымъ, какъ вариациями $\delta y, \delta z, \dots$. Выраженіе δS приведетъ тогда къ

$$\delta S = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{Y\delta y + Z\delta z + \dots}{dx} dx.$$

Предметъ метода вариаций.

838. Методъ вариаций былъ придуманъ Лагранжемъ, съ цѣлью рѣшить нѣкоторыя задачи о максимума и минимума частнаго вида; но онъ можетъ быть употребленъ съ выгодой въ другихъ различныхъ вопросахъ. Въ задачахъ о максимума и минимума, о которыхъ я говорилъ, надлежитъ такъ опредѣлить функцію независимой переменной, чтобы нѣкоторый опредѣленный интегралъ, въ который входятъ эти функціи, принималъ наибольшія или наименьшія значенія. Нѣкоторыя задачи этого рода были рѣшены въ первый разъ Лагранжемъ; вотъ примѣръ:

Найти такую плоскую кривую CMD , проходящую черезъ двѣ данныя точки C, D , чтобы площадь, описанная дугой CD , обращающейся вокругъ оси, расположенной въ ея плоскости, была минимит.



Если выберемъ двѣ прямоугольныя оси Ox, Oy , изъ которыхъ первая совпадаетъ съ осью вращенія, если прове-

демъ ординаты CA , DB крайнихъ точекъ C , D и если сделаемъ $OA = x_0$, $OB = x_1$, то поверхность, описанная дугой кривой CD , будетъ равна $2\pi S$, гдѣ S означаетъ интегралъ

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx.$$

Поэтому здѣсь надлежитъ найти, какого вида функція отъ x , которую нужно подставить вмѣсто y , чтобы значеніе S было minimum.

Вмѣсто того, чтобы взять крайнія точки C и D искомой дуги, можно предположить, что эти точки расположены на двухъ данныхъ кривыхъ; вопросъ приведется опять къ отысканію minimum'а интеграла S , но здѣсь предѣлы x_0 , x_1 болѣе не будутъ даны.

Отысканіе значеній maxima и minima опредѣленнаго интеграла.

839. Пусть будетъ опредѣленный интегралъ

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V dx,$$

гдѣ предположено

$$V = F(x, y, y', \dots, y^{(n)}, z, z', \dots, z^{(p)}, \dots),$$

гдѣ y, z, \dots суть функціи отъ x , а $y', y'', \dots, z', \dots$ означаютъ, какъ и прежде, производныя этихъ функцій. Функція V можетъ зависѣть также отъ значеній, принимаемыхъ переменными въ предѣлахъ интеграла; что касается этихъ предѣловъ, то они даются или подчиняются нѣкоторымъ условіямъ. Теперь надлежитъ опредѣлить функціи y, z, \dots , отвѣчающія maximum или minimum S .

Система функцій, которую нужно найти, и другая система, какъ угодно мало разнящаяся отъ первой, могутъ быть заключены, какъ мы видѣли, въ болѣе общую систему, зависящую отъ параметра α . Въ этой послѣдней системѣ всѣ переменныя x, y, z, \dots , такъ же какъ и производныя $y', y'', \dots, z', \dots$ выражаются въ функціи но-

вой переменной t и параметра α ; то же самое имѣетъ мѣсто и для частныхъ значеній, принимаемыхъ тѣми же переменными въ предѣлахъ, которыя будутъ зависѣть отъ предѣловъ t_0 , t_1 переменной t параметра α . Послѣ внесенія значеній x , y , . . . , выраженіе S будетъ

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(V \frac{dx}{dt} \right) dt,$$

это же приводится къ простой функціи параметра α .

Такимъ образомъ мы здѣсь имѣемъ обыкновенный случай maximum и minimum. Необходимое условіе для maximum и minimum есть то, что производная $\frac{dS}{d\alpha}$ или дифференціалъ $\frac{dS}{d\alpha} d\alpha$ есть нуль: но этотъ дифференціалъ есть ни что иное, какъ варіація S ; поэтому условіе, о которомъ мы говоримъ, просто есть

$$\delta S = 0.$$

Но мы знаемъ, что этого недостаточно. Нужно, сверхъ того, для maximum, чтобы $\frac{d^2S}{d\alpha^2}$ или $\frac{d^2S}{d\alpha^2} d\alpha^2$ былъ отрицательный, и для minimum тотъ же дифференціалъ былъ положительный; этотъ же дифференціалъ есть варіація второго порядка $\delta^2 S$; поэтому нужно, чтобы мы имѣли

$$\delta^2 S < 0$$

для maximum и

$$\delta^2 S > 0$$

для minimum. Въ случаѣ $\delta^2 S = 0$, нужно для maximum и minimum, чтобы мы также имѣли $\delta^3 S = 0$. Но мы не станемъ дальше продолжать этого разбора, который не имѣетъ цѣли, потому что въ большей части случаевъ мы можемъ по природѣ вопроса рѣшить, имѣется ли дѣйствительно maximum или minimum. Также мы ограничимся изученіемъ условія $\delta S = 0$, общаго maximum'у и minimum'у.

840. Случай, когда V содержитъ только одну

функцию y отъ x . — Тогда въ самомъ общемъ предположеніи, по формулѣ (16) § 835, имѣемъ

$$\delta S = G + \int_{x_0}^{x_1} K \omega dx.$$

Условіе $\delta S = 0$ требуетъ, чтобы мы имѣли отдѣльно

$$G = 0, \quad K = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что мы опредѣлили варіаціи относительно предѣловъ. Такъ какъ *измѣненіе*, происходящее изъ варіацій параметра α , вполнѣ произвольно, то функція ω также произвольна и, если K не есть нуль, то мы можемъ такъ выбрать ω , что, для всѣхъ значеній x , заключающихся между x_0 и x_1 , оно будетъ имѣть постоянно знакъ K или постоянно обратный знакъ. Тогда интегралъ $\int_{x_0}^{x_1} K \omega dx$ будетъ имѣть значеніе отличное отъ нуля и оно будетъ по произволу положительное или отрицательное; слѣдовательно, какое бы значеніе мы ни давали G , можно будетъ такъ сдѣлать, что δS не будетъ нуль. Условіе максимум'а и minimum'а требуетъ поэтому, чтобы

$$(1) \quad K = 0,$$

отсюда слѣдуетъ необходимо, что мы также должны имѣть

$$(2) \quad G = 0.$$

Пусть будутъ

$$V = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$$

и

$$dV = X dx + Y dy + Y' dy' + \dots + Y^{(n)} dy^{(n)};$$

уравненіе (1) можетъ быть представлено (§ 833) въ видѣ

$$-\frac{dY'}{dx} + \frac{d^2 Y''}{dx^2} - \dots + (-1)^n \frac{d^n Y^{(n)}}{dx^n} = 0.$$

Это, какъ мы видимъ, есть дифференціальное уравненіе, котораго порядокъ вообще есть $2n$, и его интеграль будетъ

содержать $2n$ произвольныхъ постоянныхъ. Предположимъ, что мы нашли этотъ интегралъ, и означимъ его черезъ

$$(4) \quad y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{2n});$$

уравненіе (4) дастъ неизвѣстную функцію y , намъ нужно еще опредѣлить $2n$ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_n такъ, чтобы удовлетворить условію (2). Нужно въ этомъ отношеніи различать нѣсколько случаевъ.

1) Если значенія $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}, x_1, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}$, даны относительно предѣловъ, то варіаціи этихъ количествъ будутъ нули и уравненіе (2) будетъ удовлетворяться само собой. Дифференцируемъ n разъ уравненіе (4); мы будемъ имѣть результаты такого вида:

$$(5) \quad \begin{cases} y' = f^{(1)}(x, C_1, C_2, \dots, C_{2n}), \\ y'' = f^{(2)}(x, C_1, C_2, \dots, C_{2n}), \\ \dots\dots\dots, \\ y^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \dots, C_{2n}). \end{cases}$$

Замѣнивъ тогда въ уравненіяхъ (4) и (5), $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ сначала черезъ $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, потомъ черезъ $x_1, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(n-1)}$, мы получимъ систему $2n$ уравненій, именно

$$(6) \quad \begin{cases} y_0 = f(x_0, C_1, C_2, \dots, C_{2n}), \\ y'_0 = f^{(1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_{2n}), \\ \dots\dots\dots, \\ y_0^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_{2n}), \\ y_1 = f(x_1, C_1, C_2, \dots, C_{2n}), \\ y'_1 = f^{(1)}(x_1, C_1, C_2, \dots, C_{2n}), \\ \dots\dots\dots, \\ y_1^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x_1, C_1, C_2, \dots, C_{2n}), \end{cases}$$

которыя будутъ служить для опредѣленія $2n$ произвольныхъ.

2) Если даны только значенія нѣкоторыхъ изъ $2n$ количествъ $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}, x_1, y_1, \dots, y_1^{(n-1)}$ или вообще если дано i уравненій

$$(7) \quad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad \dots, \quad M_i = 0$$

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V dx$$

будетъ (§ 835)

$$\delta S = G + \int_{x_1}^{x_0} (K\omega + H\bar{\omega} + G\chi + \dots) dx;$$

я говорю, что условіе $\delta S = 0$ требуетъ, чтобы мы имѣли отдѣльно

$$K = 0, \quad H = 0, \quad G = 0, \quad \dots$$

и

$$G = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что K, H, G не всѣ равны нулю и что мы сдѣлали постоянными варіаціи относительно предѣловъ; функціи $\omega, \bar{\omega}, \chi, \dots$ произвольны, поэтому мы можемъ ихъ такъ выбрать, что для каждаго значенія x , заключающагося между x_0, x_1 , онѣ соотвѣтственно будутъ имѣть тѣ же знаки, что и K, H, G, \dots или, если угодно, знаки противные K, H, G, \dots . Тогда интеграль, входящій въ выраженіе δS , будетъ имѣть значеніе отличное отъ нуля, котораго знакъ можетъ быть выбранъ по произволу; слѣдовательно, мы всегда будемъ въ состояніи такъ сдѣлать, что δS не будетъ нуль. Такимъ образомъ мы должны имѣть

$$K = 0, \quad H = 0, \quad G = 0, \quad \dots,$$

и слѣдовательно также

$$G = 0.$$

Первыя уравненія составляютъ систему совмѣстныхъ уравненій, которыхъ мы сначала должны отыскать интегралы. Намъ нужно будетъ потомъ удовлетворить уравненію $G = 0$ и опредѣлить произвольныя, введенныя черезъ интегрированіе, такъ же, какъ и количества относительно предѣловъ, если только эти не даны; это разысканіе не представляетъ никакого затрудненія, послѣ того, что мы

сказали въ предъидущемъ параграфѣ; ходъ дѣйствій остается тотъ же самый.

842. Намъ остается разобрать случай, когда V содержитъ нѣсколько функцій y, z, u, \dots отъ x , связанныхъ съ переменнѣй одной или нѣсколькими данными уравненіями. Пусть

$$\Phi(x, y, z, u, \dots) = 0$$

будетъ такое уравненіе. Взявъ дифференціалъ со знакомъ δ , потомъ съ d , получимъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \delta z + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \delta u + \dots &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial u} du + \dots &= 0; \end{aligned}$$

если вычтемъ эти уравненія одно изъ другаго послѣ умноженія втораго на $\frac{\delta x}{dx}$ и если вспомнимъ, что

$$\delta y - \frac{dy}{dx} \delta x = \omega, \quad \delta z - \frac{dz}{dy} \delta x = \bar{\omega}, \quad \dots,$$

то получимъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \omega + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \bar{\omega} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \chi + \dots = 0.$$

Такимъ образомъ каждому данному уравненію между x, y, z, u, \dots отвѣчаетъ линейное уравненіе между $\omega, \bar{\omega}, \chi, \dots$. Если число этихъ уравненій равно i , то можно будетъ выразить i количествъ $\omega, \bar{\omega}, \chi, \dots$ въ функціи $\mu - i$ другихъ; подставивъ же найденныя значенія въ выраженіе δS , получимъ

$$\delta S = G + \int_{x_0}^{x_1} (K' \omega + H' \bar{\omega} + G' \chi + \dots) dx.$$

Оставшіяся $\mu - i$ функцій $\omega, \bar{\omega}, \chi, \dots$ произвольны, поэтому разсужденіе предъидущаго параграфа покажетъ, что

$$K' = 0, \quad H' = 0, \quad G' = 0, \quad \dots,$$

а также и

$$G = 0.$$

Первыя уравненія, сложенныя съ i данными уравненіями $\Phi(x, y, z, u, \dots) = 0, \dots$, составляютъ систему i совмѣстныхъ уравненій, которую нужно интегрировать. Уравненіе $G = 0$ будетъ служить для опредѣленія произвольныхъ u , если это имѣетъ мѣсто, для опредѣленія количествъ, относящихся къ предѣламъ.

Предположимъ, что функція V содержитъ только двѣ функціи y, z , связанныя съ x соотношеніемъ

$$\Phi(x, y, z) = 0;$$

будемъ имѣть

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \omega + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \bar{\omega} = 0, \quad \text{откуда} \quad \bar{\omega} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}} \omega,$$

потомъ

$$\delta S = G + \int_{x_0}^{x_1} \frac{K \frac{\partial \Phi}{\partial z} - H \frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}} \omega dx;$$

условія максима и минима поэтому будутъ

$$K \frac{\partial \Phi}{\partial z} - H \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad G = 0.$$

Объ особомъ классѣ относительныхъ максима и минима.

843. Послѣ того какъ мы показали, какимъ образомъ можно найти условія максимум или минимум опредѣленнаго интеграла

$$(1) \quad S = \int_{x_0}^{x_1} V dx,$$

когда не обставляемъ его никакими условіями, мы разсмотрѣли случай, гдѣ переменныя, входящія въ функцію V , связаны между собой данными уравненіями. Можетъ случиться также, что уравненія условія содержатъ или производныя

отъ неизвѣстныхъ функцій, или одинъ или нѣсколько опредѣленныхъ интеграловъ. Развитие общаго рѣшенія этого вопроса не входитъ въ нашъ планъ; намъ достаточно будетъ разобрать самый простой случай, тотъ, въ которомъ предполагается обратить интегралъ S въ maximum или minimum, оставивъ его новымъ условіемъ, чтобы второй опредѣленный интегралъ

$$(2) \quad S' = \int_{x_0}^{x_1} V' dx$$

имѣлъ данное значеніе l . Въ этой новой задачѣ, которая безъ труда приводится къ задачѣ § 840, надлежитъ найти условія относительнаго maximum или относительнаго minimum.

Мы будемъ здѣсь рассуждать какъ въ § 839; система неизвѣстныхъ функцій и другая, какъ угодно мало отличающаяся отъ первой, могутъ быть заключены въ болѣе общую систему, содержащую параметръ α . Сверхъ того въ этой системѣ всѣ переменныя выражаются одною и тою же переменною t , независимою отъ α , и въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$S = \int_{t_0}^{t_1} V \frac{dx}{dt} dt, \quad S' = \int_{t_0}^{t_1} V' \frac{dx}{dt} dt,$$

отсюда слѣдуетъ, что S и S' суть функціи отъ α . Но вторая изъ этихъ функцій должна приводиться къ постоянной, потому что интегралъ S' , въ переходѣ отъ одной системы функцій къ другой, долженъ сохранять одно и то же значеніе; поэтому будемъ имѣть $\frac{dS'}{d\alpha} = 0$; сверхъ того условіе maximum или minimum, какъ въ § 839, будетъ $\frac{dS}{d\alpha} = 0$; такимъ образомъ мы будемъ имѣть

$$(3) \quad \delta S = 0, \quad \delta S' = 0.$$

844. Предположимъ сначала, что V и V' содержатъ только одну функцію y переменной x ; выраженія δS и $\delta S'$ могутъ быть представлены (§ 833) въ видѣ

$$(4) \quad \delta S = G + \int_{x_0}^{x_1} K \omega dx, \quad \delta S' = G' + \int_{x_0}^{x_1} K' \omega dx,$$

гдѣ G' , K' означаютъ количества соотвѣтственно аналогичныя G , K . Положимъ, согласно Коши,

$$(5) \quad \int_{x_0}^x K' \omega dx = \varphi(x);$$

взявъ дифференціалъ, получимъ

$$(6) \quad K' \omega = \varphi'(x), \quad \text{откуда} \quad \omega = \frac{\varphi'(x)}{K'}.$$

Такъ какъ по формулѣ (5) $\varphi(x_0)$ есть нуль, то выраженіе S' будетъ

$$(7) \quad \delta S' = G' + \varphi(x_1),$$

выраженіе же δS , если замѣнимъ въ немъ ω его значеніемъ (6), будетъ такимъ

$$\delta S = G + \int_{x_0}^{x_1} \frac{K}{K'} \varphi'(x) dx.$$

Интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int \frac{K}{K'} \varphi'(x) dx = \frac{K}{K'} \varphi(x) - \int \frac{d \frac{K}{K'}}{dx} \varphi(x) dx;$$

слѣдовательно, если означимъ черезъ K_1 , K'_1 значенія K и K' для $x = x_1$, то, по причинѣ $\varphi(x_0) = 0$, будемъ имѣть

$$(8) \quad \delta S = G + \frac{K_1}{K'_1} \varphi(x_1) - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d \frac{K}{K'}}{dx} \varphi(x) dx.$$

Функція $\varphi(x)$ вполнѣ произвольна; она только, по своему опредѣленію, подчинена одному условію, что уничтожается для $x = x_0$.

Положивъ это, изъ формулы (7) мы видимъ, что условіе $\delta S' = 0$ равнозначаетъ

$$\varphi(x_1) = -G',$$

это же приводит формулу (8) къ виду

$$\delta S = \left(G - \frac{K_1}{K'_1} G' \right) - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d \frac{K}{K'}}{dx} \varphi(x) dx.$$

Функция $\varphi(x)$ можетъ быть выбрана по произволу, по-этому разсужденіе, употребленное въ § 840, показываетъ, что условіе $\delta S = 0$ требуетъ

$$(9) \quad G - \frac{K_1}{K'_1} G' = 0, \quad \frac{d \frac{K}{K'}}{dx} = 0.$$

Второе изъ этихъ уравненій черезъ интегрированіе даетъ $\frac{K}{K'} = -a$ или

$$(10) \quad K + aK' = 0,$$

гдѣ a есть произвольная постоянная; первое уравненіе (9) послѣ этого сдѣлается

$$(11) \quad G + aG' = 0.$$

Уравненія (10) и (11) суть искомыя условія относительнаго maximum или относительнаго minimum; мы видимъ, что они также суть условія абсолютнаго maximum или абсолютнаго minimum интеграла

$$(12) \quad S + aS' = \int_{x_0}^{x_1} (V + aV') dx;$$

отсюда слѣдуетъ, что задача, которой мы занимались, приводится къ той, которая была рѣшена въ § 840. Правда, мы здѣсь имѣемъ сверхъ того произвольную постоянную a , но мы также имѣемъ новое уравненіе, именно $S' = 1$.

845. Предъидущій анализъ прилагается безъ измѣненія къ тому случаю, когда V и V' содержатъ нѣсколько функций y, z, \dots независимой переменнѣй x . Дѣйствительно, имѣемъ

$$\delta S = G + \int_{x_0}^{x_1} (K\omega + H\bar{\omega} + \dots) dx,$$

$$\delta S' = G' + \int_{x_0}^{x_1} (K'\omega + H'\bar{\omega} + \dots) dx.$$

Положимъ

$$\int_{x_0}^x (K'\omega + H'\bar{\omega} + \dots) dx = \varphi(x),$$

откуда

$$K'\omega + H'\bar{\omega}' + \dots = \varphi'(x), \quad \omega = \frac{\varphi'(x)}{K'} - \frac{H'}{K'} \bar{\omega} - \dots;$$

мы будемъ имѣть $\varphi(x_0) = 0$, условіе же $\delta S' = 0$ дастъ $\varphi(x_1) = -G'$; сверхъ того выраженіе δS будетъ

$$\delta S = G + \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{K}{K'} \varphi'(x) + \left(H - \frac{KH'}{K} \right) \bar{\omega} + \dots \right] dx;$$

кромѣ того интегрированіе по частямъ, по причинѣ $\varphi(x_1) = -G'$, даетъ

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K}{K'} \varphi'(x) dx = -\frac{K_1}{K'_1} G' - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \frac{K}{K'} \varphi(x) dx,$$

и слѣдовательно

$$\delta S = \left(G - \frac{K_1}{K'_1} G' \right) + \int_{x_0}^{x_1} \left[-\frac{d}{dx} \frac{K}{K'} \varphi(x) + \left(H - \frac{KH'}{K} \right) \bar{\omega} + \dots \right] dx.$$

Функции $\varphi(x)$, $\bar{\omega}$, ... произвольны, поэтому условіе δS требуетъ

$$\frac{d}{dx} \frac{K}{K'} = 0, \quad \frac{H}{H'} = \frac{K}{K'}, \quad \dots$$

и

$$G - \frac{K}{K'} G' = 0.$$

Первое изъ этихъ уравненій даетъ $\frac{K}{K'} = \text{постоянной } -a$; слѣдовательно, условія относительнаго maximum или minimum въ этомъ случаѣ будутъ

$$K + aK' = 0, \quad H + aH' = 0, \quad \dots$$

и

$$G + a G' = 0;$$

это же есть вполнѣ условія абсолютнаго maximum или абсолютнаго minimum интеграла $S + a S'$.

Замѣчанія на нѣкоторые особенные случаи.

846. Такъ какъ случаи относительныхъ maxima или minima приводятся къ случаю абсолютнаго maximum или minimum, то мы и рассмотримъ здѣсь только этотъ послѣдній случай.

Возьмемъ снова формулу

$$S = \int_{x_0}^{x_1} V dx,$$

и предположимъ, что V содержитъ только одну функцію y отъ x съ двумя первыми ея производными y' , y'' . Если положимъ

$$V = f(x, y, y', y'')$$

и

$$dV = X dx + Y dy + Y' dy' + Y'' dy'',$$

то неизвѣстная функція будетъ зависѣть отъ дифференціального уравненія

$$(1) \quad Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2 Y''}{dx^2} = 0,$$

которое вообще будетъ четвертаго порядка. Мы сейчасъ покажемъ нѣсколько общихъ случаевъ, въ которыхъ можно непосредственно произвести одно или два интегрированія.

1) Если V не содержитъ y и если вслѣдствіе этого сдѣлаемъ

$$V = f(x, y', y''),$$

то Y будетъ нуль, въ этомъ случаѣ уравненіе (1) приводится къ

$$-\frac{dY'}{dx} + \frac{d^2 Y''}{dx^2} = 0;$$

взявъ интеграль и означивъ черезъ C постоянную, получимъ

$$(2) \quad -Y' + \frac{dY''}{dx} = C,$$

это же вообще есть уравнение третьей степени.

Точно также можно поступить, когда V содержитъ членъ въ y только первой степени, потому что, въ этомъ случаѣ, Y есть постоянная, и взявъ интеграль уравненія (1), получимъ

$$Yx - Y' + \frac{dY''}{dx} = C.$$

2) Предположимъ, что V не содержитъ x и что мы имѣемъ

$$V = f(y, y', y'').$$

Если рѣшимъ тождественное уравненіе

$$dV = Y dy + Y' dy' + Y'' dy''$$

относительно Y и если внесемъ полученное значеніе въ уравненіе (1), то получимъ

$$dV - \left(Y' dy' + \frac{dY'}{dx} dy \right) + \left(\frac{d^2 Y''}{dx^2} dy - Y'' dy'' \right) = 0,$$

или, по причинѣ $dy = y' dx$, $dy' = y'' dx$, имѣемъ

$$dV - \left(Y' \frac{dy'}{dx} + y' \frac{dY'}{dx} \right) dx + \left(y' d \frac{dY''}{dx} - Y'' d \frac{dy'}{dx} \right) = 0;$$

первая часть этого уравненія есть точный дифференціалъ; взявъ интеграль этого уравненія и означивъ черезъ C постоянную, получимъ

$$(3) \quad V - y' \left(Y' - \frac{dY''}{dx} \right) - Y'' y'' = C,$$

дифференціальное уравненіе, которое вообще третьяго порядка.

3) Предположимъ, что V не содержитъ ни x , ни y и что имѣемъ

$$V = f(y', y'').$$

Мы сразу имѣемъ два разобранныхъ только-что нами случая, по причинѣ $Y = 0$, будемъ имѣть такіе два первые интеграла уравненія (1)

$$-Y' + \frac{dY''}{dx} = C', \quad V - y' \left(Y' - \frac{dY''}{dx} \right) - Y'' y'' = C,$$

гдѣ C и C' двѣ произвольныя. Исключеніе $\frac{dY''}{dx}$, которое вообще содержитъ одну производную отъ y , порядокъ которой самый высшій, дастъ поэтому второй интегралъ

$$(4) \quad V = Y'' y'' + C' y' + C.$$

Приложеніе метода варіацій къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ.

847. **ЗАДАЧА I.** — *Найти кратчайшую линію между двумя точками.*

Пусть x_0, y_0, z_0 и x_1, y_1, z_1 координаты крайнихъ точекъ искомой линіи относительно трехъ прямоугольныхъ осей. Длина этой линіи будетъ

$$(1) \quad S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx.$$

Здѣсь, сохранивъ означенія предыдущихъ параграфовъ, имѣемъ

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}, \quad dV = \frac{y' dy' + z' dz'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

далѣе

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \\ Y' = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}, \quad Z' = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}.$$

Уравненія, опредѣляющія неизвѣстныя функціи, именно $K = 0, H = 0$, суть

$$\frac{dY'}{dx} = 0, \quad \frac{dZ'}{dx} = 0,$$

откуда заключаемъ, что

$$Y' = \text{const.}, \quad Z' = \text{const.},$$

и слѣдовательно

$$y' = C, \quad z' = C';$$

черезъ интегрированіе находимъ

$$(2) \quad y = Cx + C_1, \quad z = C'x + C'_1;$$

такимъ образомъ искомая линія есть прямая.

Условіе $G = 0$ есть

$$(V_1 - Y'_1 y'_1 - Z'_1 z'_1) \delta x_1 + Y'_1 \delta y_1 + Z'_1 \delta z_1 - (V_0 - Y'_0 y'_0 - Z'_0 z'_0) \delta x_0 - Y'_0 \delta y_0 - Z'_0 \delta z_0 = 0,$$

гдѣ индексы 0 и 1 употреблены для выраженія значеній, принимаемыхъ различными, рассматриваемыми нами, количествами для предѣловъ. Если означимъ черезъ ds дифференціалъ дуги искомой линіи, отсчитываемой отъ какого-нибудь начала, то можно будетъ написать

$$Y' = \frac{dy}{ds}, \quad Z' = \frac{dz}{ds} \quad \text{и} \quad V - Y' y' - Z' z' = \frac{dx}{ds};$$

условіе относительно предѣловъ поэтому есть

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds} \right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds} \right)_1 \delta z_1 \right] \\ & - \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds} \right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds} \right)_0 \delta z_0 \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

848. Перейдемъ къ опредѣленію постоянныхъ. Если крайнія точки искомой линіи даны, то варіаціи $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ суть нули, и условіе (3) удовлетворяется само по себѣ. Мы опредѣлимъ тогда постоянныя C, C_1, C', C'_1 , если выразимъ, что прямая, опредѣляемая уравненіями (2), проходитъ черезъ двѣ данныя точки $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)$.

Если крайнія точки не даны и если ихъ координаты связаны между собой i данными уравненіями, то продифференцируемъ эти уравненія со знакомъ δ , потомъ исключимъ i варіацій изъ полученныхъ уравненій и формулы (3); наконецъ, приравняемъ нулю коэффициенты при δ — i оставшихся варіацій. Взявъ i данныхъ уравненій и уравненія, выражающія, что прямая (2) проходитъ черезъ точки $(x_0, y_0, z_0),$

(x_1, y_1, z_1) , будемъ имѣть десять уравненій, необходимыхъ для опредѣленія координатъ крайнихъ точекъ и произвольныхъ постоянныхъ.

Разсмотримъ, на примѣръ, случай, гдѣ координаты x_0, y_0, z_0 не зависятъ отъ x_1, y_1, z_1 ; уравненіе (3) разложится на два другихъ, именно

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{ds_1} \delta x_1 + \frac{dy_1}{ds_1} \delta y_1 + \frac{dz_1}{ds_1} \delta z_1 = 0, \\ \frac{dx_0}{ds_0} \delta x_0 + \frac{dy_0}{ds_0} \delta y_0 + \frac{dz_0}{ds_0} \delta z_0 = 0. \end{cases}$$

Предположимъ, что крайняя точка (x_0, y_0, z_0) находится постоянно на данной поверхности, имѣющей уравненіемъ

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0;$$

будемъ имѣть

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial F}{\partial y_0} \delta y_0 + \frac{\partial F}{\partial z_0} \delta z_0 = 0.$$

Если исключимъ δx_0 изъ этого уравненія и втораго уравненія (4), потомъ если приравняемъ нулю коэффициенты при δy_0 и δz_0 , то будемъ имѣть

$$\frac{\frac{dx_0}{ds_0}}{\frac{\partial F}{\partial x_0}} = \frac{\frac{dy_0}{ds_0}}{\frac{\partial F}{\partial y_0}} = \frac{\frac{dz_0}{ds_0}}{\frac{\partial F}{\partial z_0}},$$

это же выражаетъ, что линія наименьшей длины есть нормаль къ данной поверхности; этотъ результатъ согласуется съ тѣмъ, который мы получили въ § 157.

Если крайняя точка (x_0, y_0, z_0) находится постоянно на данной кривой, имѣющей уравненіями

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial F}{\partial y_0} \delta y_0 + \frac{\partial F}{\partial z_0} \delta z_0 &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial f}{\partial y_0} \delta y_0 + \frac{\partial f}{\partial z_0} \delta z_0 &= 0. \end{aligned}$$

Варіації $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$, отношенія которыхъ опредѣляютъ эти уравненія, пропорціональны косинусамъ угловъ, образуемыхъ осью касательной къ данной кривой въ точкѣ (x_0, y_0, z_0) : поэтому второе уравненіе (4) показываетъ, что эта кривая имѣетъ нормалью линію наименьшей длины.

Очевидно, что предъидущее прилагается къ той и другой изъ двухъ крайнихъ точекъ этой линіи.

849. Вмѣсто того, чтобы прилагать общія формулы, можно прямо отыскать условія minimum интеграла

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{dx} dx$$

поступивъ здѣсь такъ, какъ это мы показали въ § 836. Имѣемъ

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial ds}{\partial x} dx \text{ или } \delta S = \int \partial ds.$$

Но уравненіе $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ даетъ

$$ds \partial ds = dx \partial dx + dy \partial dy + dz \partial dz;$$

поэтому

$$\delta S = \int \left(\frac{dx}{ds} d \delta x + \frac{dy}{ds} d \delta y + \frac{dz}{ds} d \delta z \right),$$

здѣсь интегрированіе по частямъ даетъ

$$\begin{aligned} \delta S = & \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds} \right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds} \right)_1 \delta z_1 \right] \\ & - \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds} \right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds} \right)_0 \delta z_0 \right] \\ & - \int \left(\delta x d \frac{dx}{ds} + \delta y d \frac{dy}{ds} + \delta z d \frac{dz}{ds} \right). \end{aligned}$$

Варіації $\delta x, \delta y, \delta z$ подъ знакомъ \int произвольны, поэтому условія minimum, опредѣляющія неизвѣстныя функціи, будутъ

$$d \frac{dx}{ds} = 0, \quad d \frac{dy}{ds} = 0, \quad d \frac{dz}{ds} = 0;$$

эти три уравненія приводятся къ двумъ, и мы, какъ въ предъидущемъ параграфѣ, находимъ

$$\frac{dy}{dx} = \text{const.}, \quad \frac{dz}{dx} = \text{const.}$$

Условія относительно предѣловъ очевидно будутъ тѣ, которыя мы уже получили.

850. ЗАДАЧА II. — *Найти кратчайшую линію между двумя данными точками на данной поверхности.*

Искомая линія называется *геодезической* линіей. Пусть будутъ (x_0, y_0, z_0) , (x_1, y_1, z_1) координаты данныхъ точекъ, отнесенныхъ къ тремъ прямоугольнымъ осямъ, и

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0$$

уравненіе данной поверхности.

Сохранимъ всѣ означенія предъидущаго параграфа; значеніе, полученное для δS , годится для настоящаго случая, условія же minimum или maximum опять будутъ

$$(2) \quad \delta x \, d \frac{dx}{ds} + \delta y \, d \frac{dy}{ds} + \delta z \, d \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds} \right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds} \right)_1 \delta z_1 \right] \\ & - \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)_0 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds} \right)_0 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds} \right)_0 \delta z_0 \right]; \end{aligned} \right.$$

только варіаціи должны здѣсь удовлетворять уравненію

$$(4) \quad \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = 0.$$

Если исключимъ δz изъ уравненій (2) и (4), потомъ если приравняемъ нулю коэффиціенты при оставшихся варіаціяхъ δx , δy , то получимъ

$$(5) \quad \frac{d \frac{dx}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{d \frac{dy}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{d \frac{dz}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial z}};$$

не трудно видѣть, что два уравненія, содержащіяся въ этой формулѣ, приводятся къ одному, по причинѣ равенствъ

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$\frac{dx}{ds} d \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d \frac{dz}{ds} = 0,$$

изъ которыхъ второе получается отъ дифференцированія тождества

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

Искомая кривая поэтому будетъ опредѣлена двумя изъ трехъ уравненій (1) и (5). Постоянныя, введенныя черезъ интегрированіе, и координаты $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$, если онѣ переменныя, опредѣлятся потомъ безъ труда изъ уравненій, относящихся къ предѣламъ.

Числители отношеній (5) пропорціональны косинусамъ угловъ, образуемыхъ съ осями главной нормалью геодезической линіи; сверхъ того, знаменатели пропорціональны косинусамъ угловъ, образуемыхъ съ тѣми же осями нормалью данной поверхности; поэтому обѣ нормали совпадаютъ, и мы имѣемъ такую теорему:

Соприкасающаяся плоскость геодезической линіи какой-нибудь поверхности постоянно есть нормаль къ поверхности.

Свойство быть кратчайшею линіею между двумя точками не имѣетъ необходимо мѣста для всѣхъ дугъ геодезической линіи. Такъ, на шарѣ геодезическія линіи суть большіе круги, и если возьмемъ двѣ точки на окружности одного изъ большихъ круговъ, то свойство мінімумъ будетъ принадлежать только дугѣ меньшей полуокружности.

851. Задача III. — *Найти плоскую кривую, проходящую черезъ двѣ данныя точки или подчиненную даннымъ условіямъ, которая, обращаясь вокругъ данной оси, находящейся въ ея плоскости, описывала бы наименьшую площадь.*

Если возьмемъ двѣ прямоугольныя оси въ плоскости кри-

вой, изъ которыхъ одна, именно x , совпадаетъ съ осью вращения, то площадь, которой ищется minimum, будетъ произведение $2n$ на интегралъ

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Обратившись къ общимъ формуламъ § 833, найдемъ

$$V = y \sqrt{1 + y'^2}, \quad X = 0, \quad Y = \sqrt{1 + y'^2}, \quad Y' = \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Уравненіе

$$K = 0 \quad \text{или} \quad Y - \frac{dY'}{dx} = 0$$

есть одинъ изъ случаевъ § 846; его первый интегралъ есть

$$V = Y'y' + c \quad \text{или} \quad \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = c,$$

гдѣ c есть произвольная постоянная. Отсюда имѣемъ

$$dx = \frac{cdy}{\sqrt{y^2 - c^2}}, \quad \text{откуда} \quad \frac{x - \alpha}{c} = \log \frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c},$$

гдѣ α есть произвольная постоянная. Можно написать

$$\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c} = e^{\frac{x - \alpha}{c}}, \quad \frac{y - \sqrt{y^2 - c^2}}{c} = e^{-\frac{x - \alpha}{c}}$$

откуда

$$y = \frac{c}{2} \left[e^{\frac{x - \alpha}{c}} + e^{-\frac{x - \alpha}{c}} \right],$$

это же есть уравненіе цѣпной линіи.

Уравненіе относительно предѣловъ $G = 0$ здѣсь есть

$$(\partial x_1 + y'_1 \partial y_1) - (\partial x_0 + y'_0 \partial y_0) = 0;$$

оно будетъ служить для опредѣленія координатъ x_1 , y_1 и x_0 , y_0 , когда онѣ будутъ переменными.

Если крайнія точки даны, то уравненія кривой будетъ достаточно для опредѣленія постоянныхъ c и α ; предполо-

жимъ, напримѣръ, что ординаты крайнихъ точекъ равны между собой, и возьмемъ за ось y перпендикуляръ, проведенный на равномъ разстояніи отъ этихъ двухъ точекъ. Будемъ имѣть $x_1 = -x_0$; слѣдовательно, постоянная будетъ нуль, и мы для уравненія кривой будемъ имѣть

$$y = \frac{c}{2} \left[e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right];$$

постоянная c опредѣлится поэтому изъ условія

$$y_0 = \frac{c}{2} \left[e^{\frac{x_0}{c}} + e^{-\frac{x_0}{c}} \right].$$

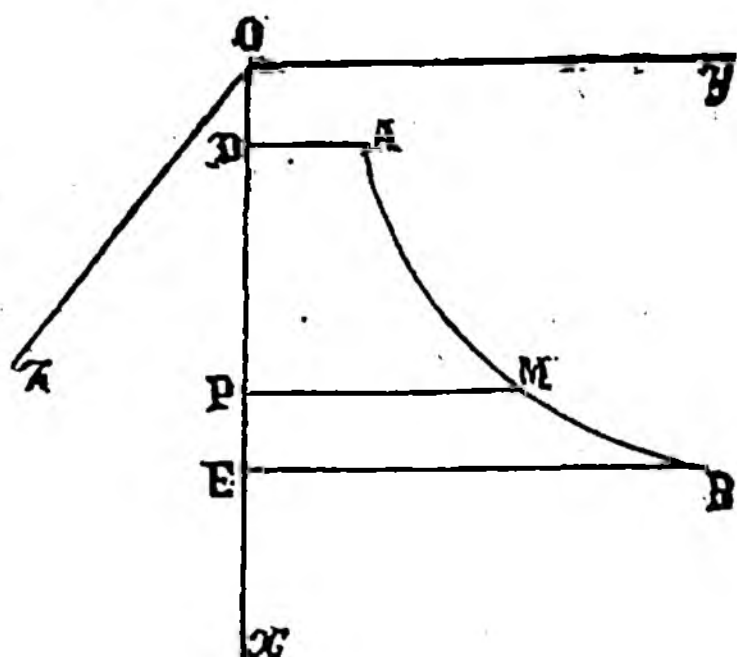
Если отношеніе $\frac{y_0}{x_0}$ меньше нѣкотораго предѣла, который нетрудно опредѣлить, то предъидущее уравненіе не имѣетъ ни одного дѣйствительнаго корня c ; въ этомъ случаѣ не существуетъ ни minimum , ни maximum .

Когда крайнія точки двигаются по данной кривой, то имѣемъ

$$\delta x_1 + y'_1 \delta y_1 = 0, \quad \delta x_0 + y'_0 \delta y_0,$$

и нетрудно отсюда заключить, что искомая цѣпная линія есть нормаль къ двумъ даннымъ кривымъ.

852. ЗАДАЧА IV. — Даны двѣ точки A и B , найти кривую AMB , по которой должна слѣдовать въсвая матеріальная точка, чтобы пройти отъ точки A до точки B въ кратчайшее время.



Искомая кривая называется *брахистохроной*. Возьмемъ три прямоугольныя оси, изъ которыхъ одна, ось x , параллельна направленію тяжести; означимъ черезъ (x_0, y_0, z_0) , (x_1, y_1, z_1) координаты точекъ A и B . Если g означаетъ

ускореніе свободно падающаго тѣла, а y' , z' представляютъ, какъ обыкновенно, производныя $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, то время, употребленное вѣсомымъ тѣломъ, вышедшимъ изъ покоя, для прохожденія отъ А до В, равно, какъ доказывается въ механикѣ, произведенію постоянной $\sqrt{2g}$ на интеграль

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{x - x_0}} dx;$$

надлежитъ найти условія minimum S. Здѣсь имѣемъ

$$V = \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{x - x_0}}, \quad X = -\frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{2(x - x_0)^{\frac{3}{2}}}, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

$$Y' = \frac{y'}{\sqrt{x - x_0} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}, \quad Z' = \frac{z'}{\sqrt{x - x_0} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

потомъ

$$K = -\frac{dY'}{dx}, \quad H = -\frac{dZ'}{dx}.$$

Такъ какъ точки А и В даны, то условія minimum здѣсь будутъ

$$\frac{dY'}{dx} = 0, \quad \frac{dZ'}{dx} = 0,$$

откуда

$$Y' = c, \quad Z' = c',$$

гдѣ c и c' произвольныя постоянныя. Поэтому имѣемъ

$$y' = c \sqrt{x - x_0} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}, \quad z' = c' \sqrt{x - x_0} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

откуда

$$z' = \frac{c'}{c} y',$$

взявъ интеграль этого уравненія и означивъ черезъ c'' новую произвольную постоянную, получимъ

$$z = \frac{c'}{c} y + c'',$$

уравнение вертикальной плоскости, содержащей искомую кривую. Эта плоскость проходит через двѣ данныя точки, и слѣдовательно она опредѣлена; ее можно взять за плоскость xu , тогда $c' = 0$, $c'' = 0$, откуда $z = 0$, $z' = 0$ и

$$y' = c \sqrt{x - x_0} \sqrt{1 + y'^2}.$$

Рѣшивъ это уравнение относительно $y' = \frac{dy}{dx}$, получимъ

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x - x_0}{\frac{1}{c^2} - (x - x_0)}}.$$

это же есть уравнение циклоиды, которой основаніе горизонтально (§ 231); мы dokonчимъ опредѣленіе этой кривой условіемъ, что она проходитъ черезъ точки А и В; $\frac{1}{c^2}$ здѣсь есть діаметръ образующаго круга.

853. Предположимъ теперь, что крайнія точки А и В не даны, но что онѣ подчинены нѣкоторымъ условіямъ. Уравненіе

$$z = \frac{c'}{c} y + c''$$

постоянно имѣетъ мѣсто, и слѣдовательно искомая кривая опять расположена въ вертикальной плоскости. Хотя эта плоскость не извѣстна, но ничто не мѣшаетъ выбрать двѣ оси такъ, чтобы отнести къ нимъ кривую; предъидущій анализъ покажетъ, что эта кривая, во всѣхъ случаяхъ, есть циклоида.

Здѣсь все приводится къ опредѣленію крайнихъ точекъ и радіуса образующаго круга. Уравненіе относительно предѣловъ здѣсь есть

$$\left[(V - Y' y' - Z' z') \delta x + Y' \delta y + Z' \delta z \right]_0^1 + \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V}{\partial x_0} dx = 0.$$

Но мы имѣемъ

$$\frac{\partial V}{\partial x_0} = - \frac{\partial V}{\partial x} = - X,$$

поэтому

$$\frac{\partial V}{\partial x_0} dx = -X dx = (Y' dy' + Z' dz' - dV),$$

а такъ какъ Y' и Z' имѣютъ постоянныя значенія, то

$$\frac{\partial V}{\partial x_0} dx = d(V' y' + Z' z' - V);$$

наше уравненіе поэтому будетъ

$$\left[(V - Y' y' - Z' z') \delta x + Y' \delta y + Z' \delta z \right]_0^1 - \left[V - Y' y' - Z' z' \right]_0^1 \delta x_0 = 0.$$

замѣнивъ V , Y' и Z' ихъ значеніями, получимъ

$$\left[\frac{\delta x + y' \delta y + z' \delta z}{\sqrt{x - x_0} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{\sqrt{x - x_0} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right]_0^1 \delta x_0 = 0.$$

Наконецъ, такъ какъ имѣемъ

$$\frac{1}{\sqrt{x - x_0} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{c}{y'} = \frac{c'}{z'},$$

то, если означимъ черезъ λ общее значеніе этихъ отношеній, при чемъ $\lambda y'$ и $\lambda z'$ постоянны, будемъ имѣть

$$\lambda_0 y'_0 = \lambda_1 y'_1, \quad \lambda_0 z'_0 = \lambda_1 z'_1,$$

а слѣдовательно уравненіе условія, послѣ уничтоженія множителя λ_1 , будетъ

$$(\delta x_1 + y'_1 \delta y_1 + z'_1 \delta z_1) - (\delta x_0 + y'_1 \delta y_0 + z'_1 \delta z_0) = 0.$$

Какія бы ни были условія, которымъ должны удовлетворять крайнія точки, мы безъ труда теперь dokonчимъ рѣшеніе. Предположимъ, что каждая изъ этихъ точекъ должна находиться на данной кривой: будемъ имѣть отдѣльно

$$\delta x_1 + y'_1 \delta y_1 + z'_1 \delta z_1 = 0,$$

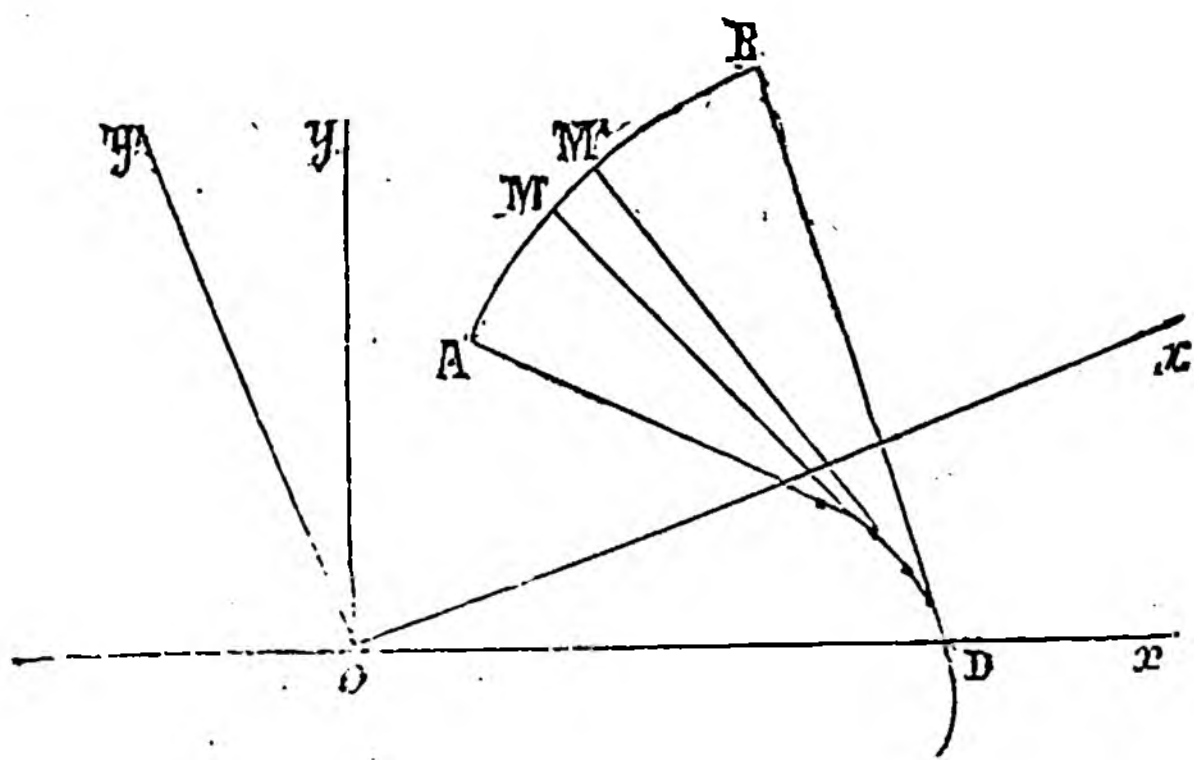
$$\delta x_0 + y'_1 \delta y_0 + z'_1 \delta z_0 = 0,$$

откуда нетрудно заключить, что брахистохрона есть нормаль къ данной кривой, проходящей черезъ точку прихода, и что касательная второй данной кривой въ точку выхода

есть перпендикуляръ къ касательной брахистохроны въ точку прихода.

854. ЗАДАЧА V. — Найти такую плоскую кривую АМВ, чтобы площадь ABCD, заключающаяся между дугой АМВ, радиусами кривизны AC и BD отвечающими двумъ крайнимъ точкамъ А, В, и другой разверткой CD, заключающейся между центрами кривизны C, D, была минимумомъ.

Пусть будетъ МК радиусъ кривизны въ точкѣ М дуги АМ = s, М' К' радиусъ кривизны бесконечно-близкій; пло-



щадь, заключающаяся между этими радиусами R и двумя кривыми, будетъ очевидно равна $Rds(1+\epsilon)$, гдѣ ϵ есть бесконечно-малая. Если же отнесемъ кривую къ двумъ прямоугольнымъ осямъ Ox, Oy, то интеграль, который долженъ быть минимумомъ, будетъ

$$S = \int_{x_0}^{x_1} R \frac{ds}{dx} dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(1 + y'^2)^2}{y''} dx.$$

Такимъ образомъ имѣемъ

$$V = \frac{(1 + y'^2)^2}{y''}, \quad X = 0, \quad Y = 0;$$

мы здѣсь имѣемъ одинъ изъ случаевъ § 846; уравненіе минимумомъ допускаетъ второй интеграль

$$V = C + C' y' + Y'' y'';$$

но здѣсь этотъ интеграль, по причинѣ $Y'' y'' = -V'$, приводится просто къ

$$V = C + C' y',$$

гдѣ C и C' произвольныя постоянныя. Подставивъ $R \frac{ds}{dx}$ вмѣсто V и $\frac{dy}{dx}$ вмѣсто y' , для опредѣленія искомой кривой будемъ имѣть

$$R \frac{ds}{dx} = C + C' \frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad R = C \frac{dx}{ds} + C' \frac{dy}{ds}.$$

Положимъ

$$\frac{dx}{ds} = \sin \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \varphi,$$

потомъ

$$C = 4a \cos \alpha, \quad C' = -4a \sin \alpha,$$

гдѣ a и α новыя произвольныя; наше уравненіе сдѣлается

$$R = 4a \sin (\varphi - \alpha).$$

Но если уголъ α заставимъ обращаться вокругъ осей и если черезъ φ означимъ наклоненіе касательной кривой на ось x , то болѣе просто будемъ имѣть

$$R = 4a \sin \varphi \quad \text{или} \quad ds = 4a \sin \varphi d\varphi,$$

ибо $d\varphi$, очевидно, равенъ углу касанія. Потомъ имѣемъ

$$\begin{aligned} dx &= ds \sin \varphi = 4a \sin^2 \varphi d\varphi = 2a (1 - \cos 2\varphi) d\varphi, \\ dy &= ds \cos \varphi = 4a \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 2a \sin 2\varphi d\varphi, \end{aligned}$$

откуда, взявъ интегралъ и означивъ черезъ x_0 , y_0 новыя произвольныя постоянныя, получимъ

$$x - x_0 = a (2\varphi - \sin 2\varphi), \quad y - y_0 = a (1 - \cos 2\varphi);$$

мы видимъ, что искомая кривая есть циклоида.

855. ЗАДАЧА VI. — Даны двѣ прямоугольныя оси Ox , Oy и двѣ точки C , D въ ихъ плоскости, требуется отыскать изъ всѣхъ кривыхъ данной длины, расположенныхъ въ этой плоскости и оканчивающихся въ точкахъ C , D , такую, для которой площадь $ABCD$, заключающаяся между кривой, осью x и крайними ординатами, есть максимумъ.

Интеграль, котораго нужно найти maximum, здѣсь есть

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y \, dx,$$

и мы еще должны имѣть

$$S' = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} \, dx = l,$$

гдѣ l данная длина. Тогда нужно (§ 843) отыскать абсолютный maximum интеграла

$$S + a S' = \int_{x_0}^{x_1} (y + a \sqrt{1 + y'^2}) \, dx,$$

гдѣ a есть неопредѣленная. Здѣсь имѣемъ

$$V = y + a \sqrt{1 + y'^2}, \quad X = 0, \quad Y = 1, \quad Y' = \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

мы имѣемъ здѣсь второй изъ случаевъ § 846; уравненіе maximum допускаетъ первый интеграль

$$V - y' Y' = c \quad \text{или} \quad y + \frac{a}{\sqrt{1 + y'^2}} = c,$$

гдѣ c произвольная постоянная. Отсюда имѣемъ

$$dx = \frac{(c - y) \, dy}{\sqrt{a^2 - (c - y)^2}},$$

откуда

$$x - c' = \sqrt{a^2 - (c - y)^2} \quad \text{или} \quad (x - c')^2 + (y - c)^2 = a^2.$$

Искомая кривая поэтому есть кругъ радіуса a .

856. ЗАДАЧА VII. — Изъ всѣхъ кривыхъ одинаковой длины, которая можно провести на плоскости между двумя данными точками, опредѣлить такую, которая, обращаясь вокругъ данной прямой въ той же плоскости, описываетъ наибольшую или наименьшую поверхность вращенія.

Интеграль, который долженъ быть maximum или minimum, есть

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

и мы сверхъ того имѣемъ

$$S' = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l;$$

поэтому нужно искать абсолютный maximum или minimum выраженія

$$S + aS' = \int_{x_0}^{x_1} (y + a) \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Такъ какъ a есть постоянная, то вычисленіе здѣсь будетъ то же, что и въ задачѣ III (§ 851), поэтому кривая, описывающая наибольшую поверхность, есть цѣпная линія.

857. ЗАДАЧА VIII. — *Какая изъ всѣхъ кривыхъ равной длины описываетъ наименьшій объемъ вращенія?*

Интеграль, который долженъ быть minimum, есть

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx;$$

мы, какъ въ предыдущихъ задачахъ, имѣемъ

$$S' = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l.$$

Нужно искать абсолютный minimum выраженія

$$S + aS' = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + a \sqrt{1 + y'^2}) dx.$$

Имѣемъ

$$V = y^2 + a \sqrt{1 + y'^2}, \quad X = 0, \quad Y = 2y, \quad Y' = \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

слѣдовательно, какъ въ задачѣ VI, будемъ имѣть

$$V - y' Y' = c$$

для перваго интеграла дифференціального уравненія, выражающаго условіе minimum, т. е.

$$y^2 + \frac{a}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

или

$$dx = \frac{(y^2 - c)dy}{\sqrt{(a^2 - y - c)^2}},$$

это же есть дифференціалъ уравненія *гибкой кривой* (§ 709).

858. **З а д а ч а IX.** — *Опредѣлитъ плоскую кривую, которая описываетъ наименьшую поверхность, содержащую данный объемъ.*

Интегралъ, который долженъ быть *minimum*, есть

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1+y'^2} dx,$$

и мы имѣемъ

$$S' = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx = \text{const.} = l.$$

Мы отыщемъ абсолютный *minimum* интеграла

$$2aS + S' = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + 2ay\sqrt{1+y'^2}) dx,$$

гдѣ a есть неопредѣленная. Имѣемъ

$$V = y^2 + 2ay\sqrt{1+y'^2}, \quad X = 0;$$

мы здѣсь для интеграла уравненія, отвѣчающаго *minimum*, будемъ имѣть

$$V - y' Y' = \pm b^2$$

или

$$y^2 + \frac{2ay}{\sqrt{1+y'^2}} = \pm b^2,$$

гдѣ b произвольная постоянная. Отсюда имѣемъ

$$dx = \frac{(y^2 \pm b^2) dy}{\sqrt{4a^2 y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}}.$$

Это уравненіе есть ни что иное, какъ то, которымъ мы занимались въ § 712 и которое принадлежитъ кривой, описанной фокусомъ эллипса или гиперболы, катящейся безъ скользенія по опредѣленной кривой, расположенной въ ея плоскости.

КОНЕЦЪ ВТОРАГО ТОМА.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВТОРАГО ТОМА.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

ГЛАВА I.

Объ интегрированіи дифференціаловъ.

| | СТР |
|--|-----|
| Предметъ интегральнаго исчисленія | |
| О неопредѣленныхъ и опредѣленныхъ интегралахъ | |
| О способахъ интегрированія | |
| Интегрированіе раціональныхъ дифференціаловъ | 15 |
| Условія, при которыхъ интеграль раціональнаго дифференціала есть алгебраическій. | 16 |
| Другой видъ интеграла раціональныхъ дифференціаловъ | 18 |
| Объ алгебраическихъ дифференціалахъ, не содержащихъ другихъ ирраціональныхъ выраженій кромѣ дробныхъ степеней перемѣнной | 20 |
| Объ алгебраическихъ дифференціалахъ, не содержащихъ другаго ирраціональнаго выраженія, кромѣ квадратнаго корня изъ полинома второй степени | 21 |
| Ученіе объ алгебраическихъ дифференціалахъ, не содержащихъ иного ирраціональнаго выраженія, кромѣ квадратнаго корня изъ многочлена третьей или четвертой степени | 29 |
| Объ эллиптическихъ функціяхъ | 42 |
| О дифференціальныхъ биномахъ | 46 |
| Упрощеніе интеграла дифференціальнаго бинорма | 48 |
| О нѣкоторыхъ дифференціальныхъ биномахъ, которыхъ интеграль приводится къ эллиптическимъ функціямъ | 57 |
| Интегрированіе нѣкоторыхъ трансцендентныхъ дифференціаловъ | 59 |

| | |
|---|----|
| Интегрирование дифференціаловъ вида $P dx$, гдѣ P есть произведе- ніе синусовъ или косинусовъ линейныхъ функцій отъ x | 63 |
| Интегрирование дифференціаловъ вида $\sin^m x \cos^n x dx$ | 65 |

ГЛАВА II.

Теорія опредѣленныхъ интеграловъ и интеграловъ функцій нѣсколь- кихъ переменныхъ.

| | |
|--|-----|
| Основные свойства опредѣленныхъ интеграловъ | 71 |
| Случай, когда предѣлы интеграловъ суть безконечности | 75 |
| Случай, когда функція, находящаяся подъ знакомъ \int , для предѣ- ловъ интеграла обращается въ безконечность | 78 |
| Случай, когда функція, содержащаяся подъ знакомъ \int , обращается въ безконечность между предѣлами интегрированія | 82 |
| Новое доказательство формулы Тейлора | 86 |
| Интегрирование помощью рядовъ | 87 |
| Дифференцирование интеграловъ | 93 |
| Дифференцирование подъ знакомъ \int | 94 |
| Интегрирование подъ знакомъ \int | 95 |
| Объ интегрированіи дифференціаловъ, зависящихъ отъ нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ | 97 |
| Интегрирование дифференціаловъ въ случаѣ мнимыхъ переменныхъ | 101 |
| Опредѣленіе значеній нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ . . | 103 |
| Нѣкоторыя слѣдствія изъ предъидущихъ формулъ | 111 |
| Приложеніе дифференцированія и интегрированія подъ знакомъ \int къ отысканію нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ | 113 |
| О переходѣ отъ дѣйствительныхъ количествъ къ мнимымъ | 119 |
| Формула Коши | 120 |
| Употребленіе опредѣленныхъ интеграловъ для выраженія коэффи- ціентовъ рядовъ, расположенныхъ по синусамъ или косину- самъ кратныхъ переменныхъ | 126 |
| Замѣчанія на измѣненіе переменныхъ въ опредѣленныхъ интегралахъ | 129 |
| О кратныхъ значеніяхъ, которыя могутъ имѣть интегралы, взятые между двумя опредѣленными предѣлами | 133 |
| О двойномъ періодѣ эллиптическихъ функцій | 139 |

ГЛАВА III.

Теорія Эйлеровыхъ интеграловъ.

| | |
|---|-----|
| Объ Эйлеровыхъ интегралахъ перваго и втораго рода | 146 |
| Приведеніе интеграловъ перваго рода къ интеграламъ втораго рода | 148 |
| Первое свойство функцій Γ | 149 |
| Второе свойство функцій Γ | 150 |
| Третье свойство функцій Γ | 151 |

| | СТР. |
|---|------|
| Выраженіе функціи $\log \Gamma(x)$ посредствомъ опредѣленнаго интеграла | 152 |
| Разложеніе въ рядъ функціи $\log \Gamma(x)$ | 154 |
| Разложеніе функціи $\log \Gamma(1+x)$ въ сходящійся рядъ, расположен- ный по возрастающимъ степенямъ x для значеній x , заклю- чающихся между -1 и $+1$ | 156 |
| Вычисленіе функціи $\frac{d \log \Gamma(x)}{dx}$ въ случаѣ, когда x есть соизмѣримое число | 158 |
| Разысканіе minimum функціи $\Gamma(x)$ | 159 |
| Замѣчаніе на интерполированіе численной функціи | 160 |
| Новыя доказательства свойствъ функціи $\Gamma(x)$ | 163 |
| Приложеніе теоріи Эйлеровыхъ интеграловъ къ отысканію нѣкото- рыхъ опредѣленныхъ интеграловъ | 167 |
| О приближенномъ вычисленіи произведенія $1. 2. 3. \dots x$, когда x есть большое число | 178 |
| Распространеніе предъидущихъ формулъ на случай, когда x не есть цѣлое положительное число | 184 |
| Формула Штирлинга | 185 |

ГЛАВА IV.

О квадратурѣ и спрямленіи кривыхъ.

| | |
|--|-----|
| О квадратурѣ плоскихъ кривыхъ | 202 |
| О спрямленіи кривыхъ | 209 |
| Спрямленіе эллипса и гиперболы | 210 |
| О перемѣнѣ модуля въ эллиптическихъ функціяхъ.—Теорема Ландена | 213 |
| Объ алгебраическихъ кривыхъ, дуги которыхъ выражаются дугами круга | 219 |
| Спрямленіе лемнискаты и овала Кассини | 228 |
| Объ алгебраическихъ кривыхъ, которыхъ дуги выражаются эллип- тическими функціями перваго рода | 233 |

ГЛАВА V.

О кубатурѣ тѣлъ и квадратурѣ кривыхъ поверхностей.—О кратныхъ интегралахъ.

| | |
|--|-----|
| Объемъ цилиндра съ какимъ угодно основаніемъ | 238 |
| Выраженіе объема части какого-нибудь тѣла, заключающейся между двумя параллельными плоскостями | — |
| Приложеніе къ нѣкоторымъ примѣрамъ | 240 |
| Приложеніе къ тѣламъ вращенія | 244 |
| Новыя разсмотрѣнія, относящіяся къ опредѣленію объема тѣлъ, ограниченныхъ какими-нибудь поверхностями | 247 |
| О приложеніи предъидущихъ формулъ къ различнымъ вопросамъ . | 256 |

| | СТР. |
|--|------|
| О площади кривыхъ поверхностей | 258 |
| Случай поверхностей вращенія | 263 |
| Приложенія способа опредѣленія площади какой-нибудь кривой по- верхности | 267 |
| Общая формула для опредѣленія площади поверхностей | 271 |
| Общая формула для опредѣленія объемовъ | 275 |
| Частный случай полярныхъ координатъ | 278 |
| Объ измѣненіи черемѣнныхъ въ кратныхъ интегралахъ | 282 |
| Объ обобщеніи формулы, относящейся къ теоріи Эйлеровыхъ инте- граловъ.—Приложенія | 293 |
| Площадь эллипсоида | 296 |

ГЛАВА VI.

Общая теорія обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

| | |
|---|-----|
| О дифференціальныхъ уравненіяхъ | 301 |
| Объ интегральныхъ уравненіяхъ | 304 |
| Предварительныя предложенія | 307 |
| Доказательство существованія общаго интеграла дифференціальнаго уравненія перваго порядка съ двумя переменными | 310 |
| Доказательство существованія интегральной системы дифференціаль- ныхъ уравненій перваго порядка | 315 |
| Свойства интеграловъ системы дифференціальныхъ уравненій пер- ваго порядка | 319 |
| Приведеніе системъ дифференціальныхъ уравненій между какимъ- нибудь числомъ переменныхъ къ дифференціальнымъ уравне- ніямъ, содержащимъ только двѣ переменныя | 322 |
| Объ интегралахъ различныхъ порядковъ дифференціальнаго уравне- нія какого-нибудь порядка съ двумя переменными | 327 |
| Опредѣленіе частныхъ интеграловъ и особыя рѣшенія дифференціаль- ныхъ уравненій | 331 |
| Объ особомъ рѣшеніи дифференціальнаго уравненія перваго порядка, основанномъ на разсмотрѣніи общаго интеграла | 332 |
| Объ особомъ рѣшеніи дифференціальнаго уравненія перваго порядка, выводимомъ изъ дифференціальнаго уравненія | 335 |
| Объ особыхъ рѣшеніяхъ дифференціальныхъ уравненій порядка выше перваго, выводимыхъ изъ какого-нибудь изъ первыхъ инте- граловъ | 341 |
| Объ особыхъ рѣшеніяхъ дифференціальныхъ уравненій порядка выше перваго, выводимыхъ изъ дифференціальнаго уравненія | 344 |
| Приложеніе предыдущей теоріи къ примѣру | 346 |
| О замѣчательномъ классѣ дифференціальныхъ уравненій | 348 |

ГЛАВА VII.

Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій перваго порядка съ двумя переменными.

| | СТР. |
|--|------|
| Объ отдѣленіи переменныхъ | 354 |
| Интегрированіе уравненій вида $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ | 356 |
| Интегрированіе линейныхъ уравненій перваго порядка | 362 |
| Дифференціальныя уравненія, приводимыя къ линейнымъ | 365 |
| Уравненія, которыхъ можно опредѣлить общій интеграль, когда извѣстенъ частный интеграль | 367 |
| Уравненіе Риккати | 368 |
| Объ уравненіи $L(x dy - y dx) - M dy + N dx = 0$, въ которомъ L, M, N означаютъ линейныя функціи | 372 |
| Случай дифференціальныхъ уравненій $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, не рѣшен- ныхъ относительно $\frac{dy}{dx}$ | 379 |
| О дифференціальныхъ уравненіяхъ линейныхъ относительно пере- менныхъ | 381 |
| Приложеніе къ нѣкоторымъ примѣрамъ | 383 |
| Задача о траекторіяхъ | 387 |
| О множителяхъ, способныхъ привести къ полному дифференціалу вы- раженіе вида $P dx + Q dy$ | 391 |
| Разысканіе множителя, способнаго привести $P dx + Q dy$ къ пол- ному дифференціалу | 396 |
| Приложеніе интегральнаго исчисленія къ опредѣленію основныхъ свойствъ простыхъ трансцендентныхъ функцій съ алгебраиче- скими дифференціалами | 401 |
| Основное свойство эллиптическихъ функцій | 406 |

ГЛАВА VIII.

Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ.

| | |
|---|-----|
| Объ уравненіи $\frac{d^n y}{dx^n} = X$, гдѣ X означаетъ данную функцію отъ x | 410 |
| Объ уравненіяхъ, въ которыя входятъ двѣ послѣдовательныя произ- водныя неизвѣстной функціи | 415 |
| Объ уравненіяхъ, въ которыя входятъ только двѣ производныя, ко- торыхъ порядки различаются двумя единицами | 419 |
| Случай, гдѣ можно понизить порядокъ дифференціальныхъ уравненій | 424 |
| Приложеніе предъидущихъ результатовъ къ нѣкоторымъ примѣрамъ | 428 |

| | СТР. |
|--|------|
| Употребленіе множителя для интегрированія дифференціальныхъ уравненій какого-нибудь порядка. | 442 |
| Употребленіе дифференцированія для интегрированія дифференціальныхъ уравненій | 445 |
| Рѣшеніе задачи, требующей интегрированія системы совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій. | 447 |

ГЛАВА IX.

Теорія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

| | |
|---|-----|
| О линейныхъ уравненіяхъ | 451 |
| Свойства линейныхъ уравненій безъ второй части. | 452 |
| Интегрированіе линейнаго уравненія, снабженнаго второй частью въ томъ случаѣ, когда извѣстенъ общій интегралъ уравненія безъ второй части | 455 |
| Приведеніе линейнаго уравненія къ другому, низшаго порядка, въ томъ случаѣ, когда извѣстенъ одинъ или нѣсколько частныхъ интеграловъ уравненія безъ второй части. | 461 |
| Другой способъ приведенія линейнаго уравненія къ линейному уравненію низшаго порядка. | 464 |
| О линейныхъ уравненіяхъ втораго порядка | 467 |
| О линейныхъ уравненіяхъ безъ второй части съ постоянными коэффиціентами. | 470 |
| О линейныхъ уравненіяхъ со второй частью и съ постоянными коэффиціентами. | 478 |
| О случаѣ линейныхъ уравненій, приводимомъ къ такому, гдѣ коэффиціенты постоянные. | 483 |
| О системахъ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій. | 485 |
| Способъ д'Аламбера для приведенія системъ линейныхъ уравненій перваго порядка къ уравненіямъ съ двумя переменными. | 488 |
| Интегрированіе системы уравненій со вторыми частями, въ томъ случаѣ, когда знаемъ интегралы тѣхъ же уравненій безъ вторыхъ частей | 496 |
| Другой способъ отысканія интеграловъ въ случаѣ постоянныхъ коэффиціентовъ | 498 |
| Объ одномъ классѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій | 500 |

ГЛАВА X.

Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій помощью рядовъ или опредѣленныхъ интеграловъ.

| | |
|---|-----|
| Употребленіе формулъ Тейлора и Маклорена | 503 |
| Измѣненіе переменныхъ, соединенное съ употребленіемъ формулы Маклорена. | 506 |

| | СТР. |
|--|------|
| Употребленіе способа неопредѣленныхъ коэффициентовъ | 508 |
| Объ уравненій Риккати | 516 |
| Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ | 517 |
| Объ отысканіи опредѣленныхъ интеграловъ посредствомъ дифферен- ціальныхъ уравненій | 520 |
| Примѣръ опредѣленія суммы даннаго ряда посредствомъ дифферен- ціальнаго уравненія | 522 |

ГЛАВА XI.

Объ уравненіяхъ съ частными производными или съ полными дифференціалами.

| | |
|--|-----|
| Объ уравненіяхъ съ частными производными, къ которымъ можно приложить способы интегрированія, относящіеся къ обыкно- веннымъ дифференціальнымъ уравненіямъ | 527 |
| Объ уравненіяхъ съ частными производными первого порядка, ли- нейныхъ относительно производныхъ | 529 |
| Приложеніе предыдущей теоріи къ нѣсколькимъ примѣрамъ | 537 |
| Объ уравненіяхъ съ полными дифференціалами | 543 |
| Опредѣленіе общаго интеграла уравненія съ частными производными первого порядка.— О полныхъ интегралахъ | 548 |
| Интегрированіе уравненій съ частными производными первого по- рядка, въ случаѣ независимыхъ переменныхъ | 551 |
| Распространеніе предыдущаго метода на случай какова угодно числа независимыхъ переменныхъ | 566 |
| Замѣчаніе о частныхъ рѣшеніяхъ, которыя могутъ быть допущены уравненіями съ частными производными первого порядка . . . | 574 |
| Объ интегрированіи одного класса уравненій съ частными произ- водными второго порядка съ двумя независимыми перемен- ными | 575 |
| Приложеніе предыдущей теоріи къ нѣкоторымъ примѣрамъ | 582 |
| Приложеніе преобразованія Лежандра | 587 |
| О линейныхъ уравненіяхъ съ частными производными | 591 |
| Объ интегрированіи уравненій съ частными производными посред- ствомъ рядовъ или опредѣленныхъ интеграловъ | 595 |

ГЛАВА XII.

О методѣ варіацій.

| | |
|--|-----|
| Опредѣленіе варіацій системы переменныхъ, зависящихъ отъ одной изъ нихъ | 599 |
| Теоремы относящіяся къ перемѣщенію знаковъ | 605 |

| | СТР. |
|---|------|
| Выраженія варіацій функції и ея производныхъ въ функції варіа- ціи независимой перемѣнной и новой перемѣнной | 608 |
| Вычисленіе варіаціи опредѣленнаго интеграла | 610 |
| Другой способъ вычисленія варіаціи опредѣленнаго интеграла . . . | 614 |
| Предметъ метода варіацій | 617 |
| Отысканіе значеній максіма и мініма опредѣленнаго интеграла . . | 618 |
| Объ особомъ классѣ относительныхъ максіма и мініма | 625 |
| Замѣчаніе на нѣкоторые особенные случаи | 630 |
| Приложеніе метода варіацій къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ . . . | 632 |
